電力系統の一般負荷の電圧動特性のための 状態変数表現

正 員 片 岡 良 彦 (東京電力)

State Variable Description for Voltage Dynamics of General Loads in Power Systems
Yoshihiko KATAOKA, Member (Tokyo Electric Power Co.)

This paper deals with descriptive methods of differential equations as models of actual power system loads. Two classes of descriptive methods are discussed: description using power and voltage as descriptive variables (input/output description); description using state variables as descriptive variables (state variable description). Input/output description is frequently used for description of the general types of load actually measured at the load buses of power systems, while state variable description is ordinarily employed for descriptions of individual load devices. The following topics are specifically described. (1) Two descriptive methods are compared principally from the viewpoint of practicality, and state variable description is shown to be advantageous for many types of analysis. (2) The concept of transformation from input/output description to state variable description is described using block diagrams. (3) The transformation is applied to a first order nonlinear load model. (4) The instantaneous load characteristic is introduced as the concept related to the transformation.

キーワード：電圧安定性，負荷電圧動特性，状態変数，不連続外乱，因果関係

1. はじめに

近年電力系統の設備形成や運転に伴う諸制約は強まる傾向にある。ここでいう制約の主なものとしては、新たな電源立地の困難さ、需要の都市部への集中、需要の昼夜間格差の増大、冷暖房負荷等の増加に起因する需要の不確定要因の増加、等がある。さらに公益事業的性格から設備投資が適切であること、運転が環境へ与える悪影響が少ないこと等、様々な側面で厳しい制約が存在する。これら諸制約は、電力系統の重負荷運用を招いている。この結果電圧安定性問題は、常に考慮すべき重要な課題のひとつとなっている。

電圧安定性問題は、系統の受電端の電圧の安定性を扱う問題である。この電圧の低下は、直接的には、電力系統と負荷の間の相互作用により起こると考えられている。このためその解析において、負荷の動特性に関する知識が必要となることがある。

誘導機など特定の負荷(以下特定負荷という)の内部の構造は、一般によく知られている。このため特定負荷の振舞いは比較的説明しやすい。特定負荷の動特性は、微分方程式で記述されることが多い。これを特定負荷モデルという。この微分方程式は一般に状態変数によって記述されている。そしてひとつの微分方程式にひとつの状態変数が対応しているか、またはそのような形式へと簡単に変換でき

る。特定負荷モデルは電圧安定性問題に関連した解析で動的負荷モデルとして採用されることも多い^[4,5]。

一方商用の電力系統の負荷母線から見た負荷(以下一般負荷という)の構造は一般に未知である。このため一般負荷は多くの場合、構造からではなくどちらかという負荷母線からみた応答から、モデル化されることになる。一般負荷は様々なモデルで表現され得る^[7]。ほとんどの場合それは微分方程式で表される。これを一般負荷モデルという。この微分方程式は、電力と電圧のそれぞれの微分により記述されることが多い。すなわちこの場合ひとつの微分方程式に電力と電圧の2つの量の微分が含まれている。

本論文では、特定負荷、一般負荷といった物理構成の違いではなく、それらのモデルの、微分方程式としての、上述のような記述方法の違いに特に着目し、その関係を考察する。次の2点が主要なテーマである。

- (1) 負荷モデルの記述方法の定義、分類、及び比較。
- (2) 負荷モデルの記述方法の変換の意味の考察と手順の検討。

負荷モデルの記述方法が変換できれば、電圧安定性をはじめとする諸解析における負荷モデルやその記述方法の選択の幅が広がることになる。より一般的な負荷がより扱いやすくなれば、諸現象の定性的な説明がし易くなるとともに、定量的諸解析の精度と効率との向上が期待できる。

各章では、次に示す事項を扱う：2章ではモデルの記述方

法の定義、分類、及び比較；3章では簡単なモデルによる、記述方法の変換の概念の説明；4章では比較的一般性のあるクラスの一般負荷モデルの記述方法の変換の手順；5章では記述方法の変換に関連する概念としての負荷の瞬時特性の定義と考察；6章では例題；7章では全般的な考察。

2. 負荷モデルの記述方法

本章では検討の出発点として、負荷モデルの2つの記述方法を定義し、諸解析における扱い易さの観点から比較する。

<2.1> 負荷モデルの分類 誘導機など特定負荷の構造は一般に既知である。そしてそのモデルの同定に際しては、端子で計測できる物理量（電圧、電流、それらに従属して電力など）に加え、その物理系に特有の量（例えば誘導機の場合回転速度など）が利用できることが多い。

これに対し一般負荷の内部の構造を詳しく知ることは不可能であろう。なぜならば一般負荷は、各々の需要家の自由意志の下で並解列される個々の特定負荷の集合体であり、この全ての特定負荷の接続状態と個々の構造とを知ることが現実的には不可能だからである。そしてそのモデルの同定にあたって利用できる物理量は、その端子で計測できる量に限られる。

このように一般負荷のモデルの同定に際しては、特定負荷の場合よりも多くの制約が課せられる。この結果一般負荷に対しては、特定負荷とは異なった形式のモデルが用いられることになる。以下にこれらのモデルを例示する。

(特定負荷モデル) 代表的な特定負荷として誘導電動機に着目する。実効値領域での誘導機モデルは次式で、等価回路は図1で、それぞれ表される。

$$\frac{ds_L}{dt} = \frac{1}{M\omega_0^2} \left(\frac{P_m}{1-s_L} - P \right) \quad (1a)$$

$$P = \Re\{V^2 \bar{Y}_{IM}(s_L)\} \quad (1b)$$

$$Q = \Im\{V^2 \bar{Y}_{IM}(s_L)\} \quad (1c)$$

ここに、 $s_L := (\omega_0 - \omega_m)/\omega_0$ ：すべり、 M ：慣性定数、 ω_0 ：電源角周波数、 ω_m ：回転子角周波数、 P_m ：機械負荷、 $\bar{Y}_{IM}(s_L)$ ：誘導電動機の等価アドミタンス、 P ：有効電力、 Q ：無効電力、 V ：端子電圧

(一般負荷モデル) 一般負荷は様々なモデルで表現される^[7]。ここでは一階の微分方程式で表される多くの負荷モデルを包含し得る比較的一般性のあるモデルとして、次式で表される一階の微分方程式による非線形負荷モデル^[1]を議論の対象とする。

$$\frac{dP}{dt} - g_P(P, V) \frac{dV}{dt} = h_P(P, Q, V) \quad (2a)$$

$$\frac{dQ}{dt} - g_Q(Q, V) \frac{dV}{dt} = h_Q(P, Q, V) \quad (2b)$$

ここに、 g_P, g_Q, h_P, h_Q ：負荷特性を表す連続

関数

諸量及び諸関数の値はすべて実数スカラである。周波数への依存性は考慮していない。この負荷モデルは文献[1]において、いくつかの負荷モデルの共通した形式として紹介されている。文献[7]で扱われている負荷モデルのいくつかもこの形式で表現することができる。

<2.2> 負荷モデルの記述方法の分類 本節では微分方程式の記述の方法を状態変数表現と入出力表現とに分類する。状態変数表現とは状態変数を記述変数とする方法を指すものとする。すなわち状態変数表現とは、次の2つの性質を持つ記述方法、ということができるであろう。

(性質1) ひとつの微分方程式あたり、微分されている量はひとつである。

(性質2) その微分されている量は、考えられる外乱に対し連続である。

その微分されている量が状態変数である。式(1)の形式は、これらの性質を満たしている。よってそれは、すべり s_L を状態変数とした状態変数表現である。状態変数表現の一般形式を付録1に示してある。

式(2)は上述の性質1を満たしていない。またもし系統条件を参照して性質1を満たすような形式に変換したとしても、そのとき性質2を満たすことはできない。これを付録3に示す。よって式(2)は状態変数表現ではない。式(2)のように電力と電圧のそれぞれの微分で記述したものを入出力表現ということにする。

文献[1]では、状態変数表現への変換が可能な、入出力表

図1 誘導機等価回路

Fig. 1. Induction motor equivalent circuit.

図2 物理負荷、負荷モデル、負荷表現の関係

Fig. 2. Relations among physic, model, and description.

現された負荷モデルが提案されている。また文献[1,11,12]では状態変数表現された負荷モデルが入出力表現へと変換されている。これらの事実、負荷モデルの記述方法が、負荷の物理構成、すなわちそれが特定負荷であるか一般負荷であるかの区別、からは独立であることを示唆している。この関係を図2に示す。図2のなかで、一般負荷モデルと状態変数表現の間の関係の一般性は、十分に確立されているとはいえない。この関係の考察が、本論文での重要な論点である。

<2・3> 条件式と未知数の整合性 負荷は単体では動作せず、系統へ接続された状態で動作する。系統として次式のものを仮定する。

$$f_{SI}(P, Q, V) = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

ここに f_{SI} は潮流特性を表す関数で、その値は実数スカラである。上式は、発電機等の動特性が無視できるような、静的な一端子系統を表している。この系統と負荷とが一体となり動的システムを構成する。この動的システムの特性は、数式上、負荷特性と式(3)とを連立したものである。ここで、式(1)、(3)から成る動的システムと、式(2)、式(3)から成る動的システムの各々における、変数と条件式の整合性を確認しておく。これを表1にまとめる。どちらの動的システムでも、未知数の個数と方程式の数が整合していることが、すなわち動的システムとしての記述が完結していることが、確認できる。このときどちらの動的システムにおいても同一の系統条件を用いていることから、これらの負荷モデルは形式上は異なった記述方法でありながら、機能の面においては系統に対して同様なインタフェースを持つものであることがわかる。具体的には、どちらの負荷においても、系統と負荷との接続点における3量 (P , Q , V) の決定において、系統が1条件を提供し、負荷が2条件を提供していると考えることができよう。この事実、すなわち2つの記述方法における系統とのインタフェースの類似性は、図2の関係の裏付けのひとつと考えることができよう。

<2・4> 2つの記述方法の比較 前節までで、2つの記述方法の主に形式上の相違点と共通点とを明らかにした。本節では実際の解析に用いる観点から、扱いやすさの面からの比較を行う。2つの負荷モデルの差分近似を求め、式(1a)に対しては、次のように近似できる。

$$\Delta s_L \approx \frac{\Delta t}{M\omega_0^2} \left(\frac{P_m}{1-s_L} - P \right) \quad \dots \dots \dots (4)$$

ここに $\Delta \bullet$ は、量 $\bullet$ の微小な変化を表している。式(2)に対しては、次のように近似できる。

$$\Delta P - g_P(P, V)\Delta V \approx h_P(P, Q, V)\Delta t \quad \dots \dots \dots (5a)$$

$$\Delta Q - g_Q(Q, V)\Delta V \approx h_Q(P, Q, V)\Delta t \quad \dots \dots \dots (5b)$$

負荷特性自体は、動的システムの記述としては完結したものではない。よって一般には、与えられた Δt に対応する他の量を、負荷特性だけを用いて厳密に決めることはでき

ない。しかし誘導機すなわち式(4)の場合、 Δt が十分に小さいならば Δt 間の右辺の変化が無視できて、 Δs_L が近似的に唯一に定まる。ところが式(5)の場合、 Δt をどんなに小さくとも、 ΔP , ΔQ , ΔV は唯一には定まらない。これら3つの量の関係が2つ定まるだけである。この事実、以下のように、諸解析における利便性に大きな違いをもたらしている。

(負荷が関連する諸現象の定性的説明) 誘導機モデルを用いれば、複数の誘導機の相互作用における各誘導機の内部状態の変化を、各誘導機の加減速すなわちすべりの変化で説明する^[4]ことができる。これは式(1a)または(4)の右辺の符号により、すべりの増減を直接知ることができるからである。入出力表現ではこれができない。

(不連続外乱の数値的及び解析的扱い) 系統から負荷へと印加される不連続外乱を想定する。式(3)の系統の場合それは f_{SI} 自体の不連続変化である。このとき運転点は図3のように移動する。第一の移動は瞬時で、第二の移動は時刻に依存する。外乱印加の瞬間、すなわちこの第一の移動の過程では、誘導機モデルではすべり一定すなわち等価アド

表1 未知数の数と条件式の数との関係

Table 1. Relation between number of unknowns and number of equations.

	式(1)を負荷とした動的システム	式(2)を負荷とした動的システム
未知数	s_L, P, Q, V	P, Q, V
微分方程式	式(1a)	式(2a), (2b)
代数方程式	式(1b), (1c), (3)	式(3)
未知数個数	4	3
方程式数	4	3

図3 系統の不連続変化と運転点の移動

Fig. 3. Discontinuous change in power system and shift of operating point.

ミタンス一定と考える^[4]ことができる。一方入出力表現された一般負荷の場合、扱っている全ての量が瞬時に変化してしまい、どの量も固定して考えることができない。

(数値シミュレーションでの交互解法の適用) 電力系統の数値解析においては、発電機などの動特性を記述した微分方程式と、回路網の特性を記述した代数方程式とを、交互に解くことが多い^[9]。これを交互解法と呼ぶ。これに対し全ての方程式を同時に解く解法を同時解法と呼ぶ。交互解法は、誘導機を例に挙げると、前述の「 Δt が十分に小さいならば、 Δt_L が近似的に定まる」という性質を利用した解法である。入出力表現された負荷の場合、 Δt が小さくてもどの量も唯一には決まらないので、そのままでは交互解法は適用できない。また同時解法を適用する場合でも、付録4に示すように、全ての数値解法が問題なく適用できるわけではない。

以上3点から、諸解析においては、入出力表現よりも状態変数表現の方が扱いやすい場合が多いといえよう。

3. 線形負荷モデルの状態変数表現

本章以降では、入出力表現された負荷モデルを、より扱いやすい記述方法すなわち状態変数表現へと変換することを検討する。これは図2に示したような関係を検証することに他ならない。なぜならば、図2の関係が成立するならば入出力表現と状態変数表現の間の変換が可能であると考えられるからである。なお状態変数表現から入出力表現への変換は簡単に行うことができる^[1,11,12]。本章で簡単なモデルに関し考察し、次章で式(2)のクラスのモデルを扱う。

次式で表現できる線形のクラスの負荷モデルを材料に、ブロック線図の等価変換を手段として、入出力表現から状態変数表現への変換を考察する。

$$\frac{d\Delta P}{dt} - g_{PI} \frac{d\Delta V}{dt} = h_{PP}\Delta P + h_{PV}\Delta V \quad (6a)$$

$$Q = 0 \quad (6b)$$

ここに g_{PI} , h_{PP} , h_{PV} は、負荷定数である。なお式(6a)は、電力や電圧の、基準とする運転点(P, Q, V)からの、比較的小さな変動量により記述されている。系統としては、式(3)を用いる。無効分は恒等的に零としたので、有効分に関してのみ述べる。

< 3.1 > 系統と負荷の機能ブロック線図

式(6a)をラプラス変換し初期値を零とおき次式を得る。
 $s(\Delta P - g_{PI}\Delta V) = h_{PP}\Delta P + h_{PV}\Delta V \quad (7)$

これより負荷は、電圧を入力とし、電力を出力とするような伝達関数として表すことができる。

$$\Delta P = \frac{sg_{PI} + h_{PV}}{s - h_{PP}} \Delta V \quad (8)$$

電圧を入力とし、電力を出力とするような負荷機能ブロックを図4(a)に示す。負荷の、一次遅れ要素と静的要素に分けた記述^[6,11]も、同時に示している。

系統と負荷とが構成する動的システムのブロック線図を図5(a)に示す。

< 3.2 > 瞬時ループの消去 図5(a)に示しているように、系統と負荷とが「瞬時ループ」を構成する。このループは、2つの信号伝達経路から構成される：負荷における、電圧から電力への瞬時の信号伝達経路；系統における、電力から電圧への瞬時の信号伝達経路。系統が発電機動特性等による動特性を持つ場合も、この瞬時ループは存在する。

この瞬時ループの役割を考察するために、時刻を仮想的に固定する。時刻を固定すると、負荷の一次遅れ要素の出力は一定となる。なぜならば、一次遅れ要素の出力は、直接的には時間領域での積分作用の出力だからである。このとき、電力と電圧は、系統と負荷との間の瞬時の相互作用により決定される。電力を決定する要因は系統と負荷の両方である。電圧を決定する要因もまた系統と負荷の両方である。すなわちこれらの記述変数はどちらも、負荷の固有の状態を表してはいないものと考えられる。

この瞬時ループの働きが、前章で述べた入出力表現の欠点に深く関与していると考えられる。この瞬時ループを見かけ上消去することを試みる。このための準備として、新

(a) 静的要素と一次遅れ要素への分解

(b) 一次遅れ要素の分解

図4 負荷単体の機能ブロック

Fig. 4. First order linear load.

たに変数を導入する。

$$\Delta x_{PI} := c_{PI}(\Delta P - g_{PI}\Delta V) \dots \dots \dots (9)$$

ここに c_{PI} は非零の任意定数である。これは例えば1とすればよい。 x_{PI} は、式(7)からわかるように、積分作用の出力そのものである。

瞬時ループは静的要因であるから、系統と一緒に扱うことができると考えられる。このとき、ブロック線図は図5(b)のようになる。図中では任意定数は1としている。このようにして瞬時ループは見かけ上消去することができた。

x_{PI} は積分作用の出力、すなわち状態変数と考えることができる。状態変数表現は次式である。

$$\frac{d\Delta x_{PI}}{dt} = c_{PI}(h_{PP}\Delta P + h_{PV}\Delta V) \dots \dots \dots (10)$$

動的システムとしての記述は、式(3), (6b), (9), (10)の4つ

(a) 入出力表現による実現例

(b) 状態変数表現による実現例(その1)

(c) 状態変数表現による実現例(その2)

図5 負荷と系統のブロック線図

Fig. 5. First order linear load and power system.

で完結する。式(3), (6a), (6b)による記述に比較し、条件式と未知数とが各々ひとつずつ増えていることがわかる。

<3.3> 積分作用への入力変数 ここで、負荷要素への入力と、その内部での積分作用への入力について、若干の考察を行う。図4(b)に負荷の一次遅れの部分の詳細を示す。図から、積分作用への入力が、 x_{PI} と電圧の線形結合で構成されていることがわかる。そして実は積分作用への入力は、式(7)の右辺から唯一に決まっている。この量は電圧と電力の線形結合である。

従来負荷要素への入力としては、電圧を用いるのが一般的であった。しかし、必ずしも電圧を入力とすることにこだわる必要はないであろう。なぜなら負荷においては積分作用への入力が、式(7)の右辺により唯一に決まっているからである。よってブロック線図の構成にあたって、負荷要素への入力を選択するとき、次の条件を考慮すれば良い：内部状態である x_{PI} との線形結合により積分作用への入力 $h_{PP}\Delta P + h_{PV}\Delta V$ を構成できること。

以上から負荷要素への入力量の選択には、かなりの自由度があることがわかる。例えば図5(c)のように等価変換することもできる。図5(c)は実は、式(7)のきわめて直接的な実現に他ならない。

従来電力は、負荷の出力として扱われるのが一般的であった。図5(c)では負荷への入力の一部として扱われている。このように変数のあいだの依存関係を形式上変更しても、不都合が生じることは無い。これは図5(c)の下部の静的ブロックを調べれば確認できる。静的ブロックにおける未知数は、 ΔP と ΔV の2つであり、その内部の条件式の数と一致している。よってこの静的ブロックは ΔP と ΔV の両方を正しく出力できる。

4. 一般負荷モデルの状態変数表現

本章では式(2)の一般負荷モデルの状態変数表現を導く。文献[1]では式(2)のクラスそのものではなく、それに含まれる特殊なクラスの負荷モデルに関し、その入出力表現と状態変数表現とが述べられている。本論文では式(2)のクラスをそのまま扱う。入出力表現から状態変数表現への変換の一般的な手順を示すことにより、図2の関係を、式(2)のクラスの一般負荷モデルについて、検証することができる。

はじめに手順を述べ、次に若干の説明を加える。

<4.1> 手順

(準備) 式(2)に現れる諸係数に関連した次の2つの微分方程式を解く。

$$\frac{dP}{dV} = g_P(P, V) \dots \dots \dots (11a)$$

$$\frac{dQ}{dV} = g_Q(Q, V) \dots \dots \dots (11b)$$

これらの微分方程式が解析的に解けるとは限らないが、少なくとも数値的には解けるであろう。これらの解をそれぞれ次式とする。

$$C_P = I_P(P, V) \quad \dots \dots \dots (12a)$$

$$C_Q = I_Q(Q, V) \quad \dots \dots \dots (12b)$$

ここに C_P, C_Q は任意定数である。

(状態変数の定義) 状態変数を次式により定義する。

$$x_P := K_P(I_P(P, V)) \quad \dots \dots \dots (13a)$$

$$x_Q := K_Q(I_Q(Q, V)) \quad \dots \dots \dots (13b)$$

ここに K_P, K_Q は、任意のスカラー関数である。ただしこれらには常に逆関数が存在するものとする。

(状態変数表現) 状態変数表現は次式である。

$$\frac{dx_P}{dt} = h_{xP}(P, Q, V) \quad \dots \dots \dots (14a)$$

$$\frac{dx_Q}{dt} = h_{xQ}(P, Q, V) \quad \dots \dots \dots (14b)$$

$$\text{ここに, } h_{xP}(P, Q, V) := \frac{dK_P}{dI_P} \frac{\partial I_P}{\partial P} h_P(P, Q, V),$$

$$h_{xQ}(P, Q, V) := \frac{dK_Q}{dI_Q} \frac{\partial I_Q}{\partial Q} h_Q(P, Q, V)$$

x_P, x_Q は、上式の右辺の時間領域での積分値であるから、式(14)の右辺が有界である限りは、連続量である。よって式(14)は、前述の、状態変数表現が持つべき2つの性質を満たしている。

この記述における条件式と未知数の個数の整合性は、次のように確認できる。未知数は、 P, Q, V, x_P, x_Q の5個である。条件式は、微分方程式として式(14a), (14b), 代数方程式として式(3), (13a), (13b) の計5個である。よって整合がとれている。表1(右)と比較すると、変数が2個、代数方程式が2つ、それぞれ増えていることがわかる。

<4・2> 手順の妥当性の確認 記述方法の変換の手順の妥当性を示す。ここでは十分性(唯一であるとは限らないがひとつの妥当なものであること)だけを示す。式(12)の両辺を V で微分すると次式を得る。

$$0 = \frac{\partial I_P}{\partial P} \frac{dP}{dV} + \frac{\partial I_P}{\partial V} \quad \dots \dots \dots (15a)$$

$$0 = \frac{\partial I_Q}{\partial Q} \frac{dQ}{dV} + \frac{\partial I_Q}{\partial V} \quad \dots \dots \dots (15b)$$

式(12)は式(11)の解であるから、式(11)と上式の係数の間には、次式の等価性がある。

$$\frac{\partial I_P}{\partial P} g_P(P, V) = -\frac{\partial I_P}{\partial V} \quad \dots \dots \dots (16a)$$

$$\frac{\partial I_Q}{\partial Q} g_Q(Q, V) = -\frac{\partial I_Q}{\partial V} \quad \dots \dots \dots (16b)$$

次に式(13)すなわち状態変数の定義の両辺を時刻で微分すると、次式を得る。

$$\frac{dx_P}{dt} = \frac{dK_P}{dI_P} \left(\frac{\partial I_P}{\partial P} \frac{dP}{dt} + \frac{\partial I_P}{\partial V} \frac{dV}{dt} \right) \quad \dots \dots \dots (17a)$$

$$\frac{dx_Q}{dt} = \frac{dK_Q}{dI_Q} \left(\frac{\partial I_Q}{\partial Q} \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial I_Q}{\partial V} \frac{dV}{dt} \right) \quad \dots \dots \dots (17b)$$

式(16)と式(17)から、次式を得る。

$$\frac{dx_P}{dt} = \frac{dK_P}{dI_P} \frac{\partial I_P}{\partial P} \left(\frac{dP}{dt} - g_P(P, V) \frac{dV}{dt} \right) \quad \dots \dots \dots (18a)$$

$$\frac{dx_Q}{dt} = \frac{dK_Q}{dI_Q} \frac{\partial I_Q}{\partial Q} \left(\frac{dQ}{dt} - g_Q(P, V) \frac{dV}{dt} \right) \quad \dots \dots \dots (18b)$$

これを式(14)と比較すれば、式(2)を得る。よって式(14)は式(2)に等価なもののひとつである。

<4・3> K_P と K_Q の決め方 式(13)に現れる K_P, K_Q の決定に際し許されている自由度は、前章で述べた線形系での状態変数の定義における任意定数に対応している。これらの自由度は、状態変数表現に一般に許されているものである。これを付録2に示す。式(13)の最も単純なものは、 $x_P := I_P, x_Q := I_Q$ とするものである。おおまかにいえば、形式が単純なほど取扱いが簡単なので、実用上はこのようなものが適当であろう。

5. 負荷の瞬時特性

本章では、入出力表現から状態変数表現への変換に関連した概念として、負荷の瞬時特性を定義し考察する。瞬時特性は、図3における移動1を説明するための概念ということができる。

<5・1> 基本的な概念 検討の対象としている微分方程式は、実効値で諸量の関係を記述したものである。実効値は時間が経過して初めて定義できる量なので、厳密には、この微分方程式から瞬時の関係を論ずることはできない。そこで本論文では「瞬時」を、微分方程式が記述している時間領域よりも十分に短い時間、という意味で用いることとする。そしてその「瞬時」の時間領域では、実効値が定義できるものとする。

はじめに用語を定義する。系統特性の不連続変化に対応した P, Q, V の瞬時変化を記述している数式システムを、瞬時システムと呼ぶ。また瞬時システムの構成要素で、負荷固有の特性に相当するものを、負荷の瞬時特性と呼ぶ。

以下これらを、誘導機モデルを例として、説明する。表1(左)に着目する。系統特性の不連続変化、例えば調相用コンデンサの投入による f_{s1} 自体の変化、を想定する。この不連続変化の直前と直後のすべりは等しい。よってこの不連続変化の瞬間だけに着目するとき、式(1b), 式(1c), 式(3)から成るサブシステムでは、未知数が3つとなり条件式の数と一致するので、それだけでひとつの完全な静的システムとなる。これが瞬時システムである。瞬時システムでは、系統特性の不連続変化の量が独立変数で、 P, Q, V はそれに従属する変数である。

瞬時システムでの負荷側の特性である式(1b), (1c)が、誘導機負荷の瞬時特性である。なお式(1b), (1c)を瞬時特性と呼ぶとき、すべりは定数でなければならないことに注意する必要がある。誘導機の瞬時特性は、定アドミタンス特性[4]、あるいは定すべり特性など言うことができよう。

<5・2> 一般負荷の瞬時特性 一般負荷モデルの状態変数表現の場合、動的システム全体は、前述のように式(3), (13a), (13b), (14a), (14b)から構成される。よって瞬時システムは、式(3), (13a), (13b)から構成される。すなわち瞬時特性は式(13)である。このとき誘導機負荷同様に、状態変数を定数と考える必要がある。状態変数が定数の場合は、式(13)は式(12)と等価である。よって瞬時特性は式(12)であると考えてもよい。さらに式(12)は式(11)の解であるから、式(11)の微分方程式が瞬時特性であると捉えても構わない。すなわちこの場合瞬時特性や瞬時システムの記述方法には、大別して、代数方程式系による方法と、微分方程式系による方法の2通りがある。以上から瞬時特性が、入出力表現を状態変数表現へと変換する際の状態変数の定義に、密接に関わっていたことがわかる。

若干記号的な方法かもしれないが、微分方程式(11)が瞬時特性に関するものであることを、別の方法により示すことができる。式(4), (5)は、それぞれ微分方程式(1), (2)の差分近似、すなわちそれらの解に対する局所的な線形近似である。2・4節で、「 Δt が十分に小さいとき、式(4)の場合 $\Delta \varepsilon_L$ が一意にきまるが、式(5)の場合どの量も一意には決まらずそれらの関係が得られるだけである」ことを述べた。この「関係」に着目する。すなわち $\Delta t=0$ とすれば、式(5)から次の関係が得られる。

$$\Delta P - g_P(P, V)\Delta V \approx 0 \quad (19a)$$

$$\Delta Q - g_Q(Q, V)\Delta V \approx 0 \quad (19b)$$

時刻を固定しているのだから、これは瞬時特性であると考えてよからう。しかしこのままでは瞬時特性の局所的な近似に過ぎない。これは、式(11)に対する差分近似と捉えることができる。よって、式(11)が瞬時特性を示す微分方程式であると考えることができよう。

上述の説明はどちらかというと数式上の操作というべきであろう。この数式上の操作に対し、次のような現実的な物理現象を対応付けることもできる。きわめて短い時間 Δt 内に、系統側あるいは着目している負荷以外の負荷の原因により、母線電圧が無視できない大きさの変化をしたケース、を想定する。このとき式(2)の左辺にある微分値が大きくなり、右辺が相対的に小さくなる。よって満たすべき微分方程式は式(11)に近づく。このケースの $\Delta t \rightarrow 0$ の極限が、瞬時変化のケースに相当すると考えられる。

6. 例題

これまで述べた記述方法の変換の手順などの妥当性を、例題により検討する。一例としてある非線形負荷モデルを用意し、その記述方法の変換を行う。状態変数表現から出発し、はじめに入出力表現へと変換し、次に再度状態変数表現へと変換する。

<6・1> 状態変数表現→入出力表現 コンダクタンス G が、次式のような単純な積分作用により変化する負

荷^[2,11]を用いる。

$$\frac{dG}{dt} = \frac{P_0 - P}{\tau} \quad (20a)$$

$$P = GV^2 \quad (20b)$$

$$Q = 0 \quad (20c)$$

ここに $P_0, \tau > 0$ は定数である。この負荷では、 P_0 を有効電力の目標値として、それを達成するべく G が変化する。 G を状態変数として扱うことができる。無効電力は静的なので議論から除外する。

式(20)を、入出力表現に書き換える。状態変数表現から入出力表現への変換は、他の文献^[1,11,12]でも多く扱われている。式(20b)の両辺を時刻で微分して次式を得る。

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(GV^2) = V^2 \frac{dG}{dt} + \frac{2P}{V} \frac{dV}{dt} \quad (21)$$

これと式(20a)とから、入出力表現が得られる。

$$\frac{dP}{dt} - \frac{2P}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{V^2}{\tau} (P - P_0) \quad (22)$$

<6・2> 入出力表現→状態変数表現 本節では4・1節の方法を適用し、式(22)に対応する状態変数表現を求める。次節でその結果を式(20)と比較し、適用した方法の妥当性を評価する。

(瞬時特性) 式(22)の負荷の、瞬時特性に関する微分方程式は次式である。

$$\frac{dP}{P} = \frac{2dV}{V} \quad (23)$$

これは微分方程式としては、よく知られた変数分離形である。この場合には解析的に一般解が得られる。

$$C_P = \frac{P}{V^2} \quad (24)$$

これは瞬時特性としては定コンダクタンス特性に他ならない。

(状態変数) 状態変数は次式で定義できる。

$$x_P := \frac{P}{V^2} \quad (25)$$

状態変数表現は次式である。

$$\frac{dx_P}{dt} = \frac{V^2}{V^2\tau} (P_0 - P) = \frac{P_0 - P}{\tau} \quad (26)$$

式(3)のクラスの静的系統に接続した場合の、系統の不連続変化に対する応答の例を図6に示す。なお設定した外乱は、送電線の一部脱落である。

<6・3> 結果の評価 瞬時特性(24)は式(20b)に、状態変数表現(26)は式(20a)に、それぞれ一致しているといえよう。この結果は、適用した方法の妥当性を示唆している。

7. 考察

<7・1> 一般負荷の物理状態 一般には状態変数

による物理システムの記述は、現実の積分作用を直接的に表現したものである。このとき状態変数は物理量である。一方一般負荷の状態変数表現は、これまで述べたような数式上の変換により得られる。よって定義した状態変数は、実存する物理量ではないから、これはひとつの仮想的な量というべきであろう。しかしながらこの仮想的な量は、以下に述べる理由から、物理量に準ずる量、いわば「準物理量」として扱っても差し支えないと考えられる。

2・1節で述べたように、現実的には一般負荷の構造を知ることが不可能である。しかし必要な精度でその応答を知ることができれば、諸現象の解析を十分に行うことができる。換言すれば、このような解析においては、応答さえ同じであれば、必ずしもその負荷内部での物理過程を問題とする必要はない。仮に着目している母線に、式(2)の根拠となった一般負荷の代わりに、式(14)(状態変数表現)を実現した物理モデルを接続しても、諸現象の結果は(式(2)の同定の精度に応じて)同様となる。よって現実の場合すなわち一般負荷が接続されている場合でも、当該の母線で式(14)(状態変数表現)に対応した物理過程が進行すると考えても、(式(2)の同定の精度が十分ならば)差し支えない。以上から式(13)により定義した状態変数を「準物理量」として扱うことができる。

<7・2> 因果関係の表現について 2・4節では入出力表現と状態変数表現の比較を簡単に行った。ここでは諸現象の定性的な説明のし易さという点に重点をおいて、瞬時ループや瞬時システム概念などを用いて2つの記述方法を比較する。因果関係とは相互作用における原因と結果とを区別する概念である。ブロック線図においては各機能ブロックへの入力「原因」であり出力が「結果」である^[3]。

入出力表現では3章で述べた瞬時ループの存在から、全

ての量(P , Q , V)が系統と負荷の両方の特性に依存して決まるため、負荷固有の状態を考えにくい。このため系統側からの外乱に対し、負荷がどのように影響を受けてその固有の状態を変化させていくか、といった仕組みを説明することが難しい。換言すれば因果関係が不明瞭である。

特定負荷の状態変数表現では、状態変数が各負荷固有の物理状態を表している。前節での考察結果から、一般負荷においても状態変数が負荷の内部状態を等価的に表している。すなわちそれらの状態変化の唯一の「原因」は、状態変数表現(式(1), (14), (26)など)の右辺が非零であることである。ここで因果関係は明瞭である。これにより、状態変数表現された微分方程式で表される積分作用を、信号伝播の「息継ぎ」点と考えて現象を説明することができる。すなわち諸現象を、この積分作用と、5章で述べた瞬時システムとに分割して考察することが可能である。この性質の数値解析への応用のひとつが、2・4節でも触れた交互解法の適用である。すなわち因果関係が明瞭である場合に交互解法が適用できる、と考えられる。

このように、状態変数表現では、因果関係が明瞭に表現されている。これは入出力表現にはない性質である。このため状態変数表現を用いると、諸現象の定性的な説明が容易である。一般に、定性的な説明は応用を広げるためには重要な要件である。よって状態変数表現を用いることにより、一般負荷モデルの応用が広がることが期待できる。

<7・3> 定性的説明への応用例：電圧の安定性の問題 前節で述べたような、状態変数表現における因果関係の明瞭性の一応用として、電圧低下過程のひとつをきわめて巨視的かつ定性的に説明する。

定性的説明においては、実際には同時に進行する次の2つの事象を交互に考えればよい。

- (1) 式(1), (14), (26)など状態変数表現された微分方程式の右辺の符号に応じて、状態変数が増加または減少する。
- (2) その状態変数の値により、瞬時システムの特性に応じて、 P , Q , V が決まる。

例えば式(26)の負荷の、送電線の脱落に対する応答は図6に示されている。以下にこの過程の定性的説明を述べる。まず、送電線脱落の直前直後の x_p の値は等しい。直後の時刻で、式(26)の右辺が正となり x_p が増加する(上述(1))。そして同時に V が低下するとともに P が若干増加する(上述(2))。この2つの事象が交互に進行していくものと考えるのである。その後式(26)の右辺が、零になれば定常状態に達するが、正のままなら x_p が増加し続ける。

このような一連の過程の因果関係に沿った説明は、入出力表現の場合、すなわち式(2), (22)などを用いた場合には、困難である。

8. おわりに

電力系統負荷の動特性を表すモデルの記述方法に関する

- 1: ある外乱への応答
- 2: 1の外乱よりわずかに大きな外乱への応答

図6 例題負荷の応答

Fig. 6. Responses of example Load.

いくつかの考察を述べた。主に以下の事項を扱った。

- (1) 負荷モデルの記述方法を入出力表現と状態変数表現とに分類し、それらを諸解析で用いる場合の扱い易さの観点から比較した。負荷の振舞いの説明のしやすさ、不連続外乱の扱い易さ、適用できる数値手法の範囲、等の点での状態変数表現の優位性を明らかにした。
- (2) 簡単な線形負荷モデルを、入出力表現から状態変数表現へと変換した。この変換の概念を、ブロック線図により説明した。
- (3) 一階の微分方程式で表される非線形負荷モデルを、入出力表現から状態変数表現へと変換した。これにより図2の関係が少なくとも式(2)のクラスの負荷モデルについて成立することが示された。
- (4) 入出力表現から状態変数表現への変換に付随する概念として、負荷の瞬時特性を定義し、その考察を行った。

前述のように一般負荷モデルは入出力表現されることが多いが、これを状態変数表現することにより、次のような効果が得られる。一般負荷が接続された電力システムのモデルに於ける諸量の関係を、自然な因果関係だけで記述することができ、電圧安定性等負荷の関連する諸現象の定性的な説明をし易くすることができる。また数値手法の適用上の制約が減り、定量的諸解析の精度と効率とが向上することが期待できる。

すなわちより一般的には、諸解析における、負荷モデル（一般負荷モデルと特定負荷モデル）やその記述方法（状態変数表現と入出力表現）の選択の幅が広がることになるともいえよう。

本論文での主要な議論の対象は式(2)で表されるクラスの一般負荷モデルであった。今後はより広いクラスの一般負荷モデルへと議論の対象を拡大していきたい。

最後に、有益な御助言をくださった東京電力(株)システム研究所上村勝彦主席研究員に謝意を表する。

(平成5年3月25日受付、同5年12月21日再受付)

文 献

- [1] D. J. Hill: "Nonlinear Dynamic Load Models with Recovery for Voltage Stability Studies", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 8, No. 1, Feb. 1993, pp. 166-176.
- [2] M. K. Pal: "Voltage Stability Conditions Considering Load Characteristics", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 7, No. 1, Feb. 1992, pp. 243-249.
- [3] 高橋安人: システムと制御, 岩波書店, 1971.
- [4] 大槻博司・横山明彦・関根泰次: "誘導機モデルを用いた電圧崩壊現象の過渡解析の検証と一般系統への拡張", 電学論B, 112-8, 平成4, pp. 677-684.

- [5] 餘利野直人・松岡幸三・舟橋淳・佐々木博司・久保川淳司・北川稔・藤岡清人: "電力系統における電圧不安定現象の解析", 電学論B, 112-3, 平成4, pp. 229-236.
- [6] D. Karlsson, D. J. Hill: "Modelling And Identification of Nonlinear Dynamic Loads in Power Systems", Proc. IEEE/PES 1993 WM, No. 171-9.
- [7] 餘利野直人・松岡幸三・増田吉彦・佐々木博司・大下哲・北川稔: "系統電圧の連続的な時間断面解析における動的負荷の模擬", 電気学会電技研資, PE-90-28 (1990).
- [8] 関根泰次: 電力系統過渡解析論, オーム社, 昭和59年.
- [9] 電気共同研究会: 電気共同研究, 34, No. 5 (昭54-1).
- [10] 電気共同研究会: 電気共同研究, 47, No. 1 (平3-7).
- [11] 片岡良彦・石毛浩和: "因果関係の記述を重視した負荷モデルの提案", 平成3年電気学会全大, No. 1097.
- [12] E. Welfonder, H. Weber, and B. Hall, "Investigations of the Frequency and Voltage Dependence of Load Part Systems Using a Digital Self-Acting Measuring and Identification System", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 4, No. 1, Feb. 1989, pp.19-25.
- [13] 片岡良彦: "電力系統負荷電圧特性の状態変数表現", 平成5年電気学会全大, No. 1144.

付 録

1. 状態変数表現の一般形式

状態変数表現の一般形式を示す。動的システムの特性は、この形式の微分方程式で記述されることが多い。前述の誘導機や発電機を含めた電力系統全体の特性もこの形式で表すことができる。

$$\frac{dx}{dt} = h_D(x, y, \lambda_D) \quad \text{--- (A1a)}$$

$$0 = h_S(x, y, \lambda_S) \quad \text{--- (A1b)}$$

ここに、 x : 状態ベクトル, y : 補助ベクトル, λ_D, λ_S : 入力や外乱を表すベクトル, h_D : 動的関係を記述した連続関数, h_S : 静的関係を記述した連続関数

諸量はすべて実数ベクトル量である。上式は、静的なすなわち瞬時の関係が、動的特性と連立された形式である。この特殊な場合として、 y の次元が零の場合も、上式のクラスに含まれる。

なお h_S の値域の次元は、 y の次元以下である。これらの次元が等しい場合は、それは動的システムとして完全な記述であり、そうでない場合は、それは動的システムの部分的な記述である。系統特性を含まない負荷単体の記述は、後者に相当する。

2. 状態変数選択における自由度

状態変数表現では、状態変数の選び方に若干の自由度がある。これを、式(A1)において、 x が1次元で y が零次元の場合について説明する。いま、静的な1対1の対応関係で z を定義する。

$$z := K(x) \dots\dots\dots (A2)$$

ここに $K(x)$ は、常に逆関数が存在するスカラー関数である。この量を用いれば、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dK}{dx} h_D(K^{-1}(z), \lambda_D) \dots\dots\dots (A3)$$

の関係が得られる。これは、式(A1)で表された動特性に対し座標変換を施したものと考えることができる。これら2つの微分方程式では、それらを記述している状態変数は異なるものの、記述対象の動特性は同一である。このようにひとつのシステムでも、状態変数の選び方に若干の自由度がある。

3. 入出力表現における変数消去の一方法

負荷モデルとして式(6)を引用する。簡単のため、システムとして次式の線形のものを用いる。

$$\Delta P = f_V \Delta V + f_\mu \Delta \mu \dots\dots\dots (A4)$$

外乱としてシステムパラメータ μ を考慮している。式(6a)に式(A4)を代入して次式を得る。

$$(f_V - g_{PI}) \frac{d\Delta V}{dt} = (h_{PV} + h_{PP} f_V) \Delta V + (h_{PP} - \frac{d}{dt}) f_\mu \Delta \mu \dots\dots\dots (A5)$$

この式で、強制項すなわち右辺第2項に着目する。この項全体を外乱信号と捉えれば、上式は2・2節で述べた状態変数表現が持つべき性質1を満たす。しかしここでシステムパラメータが微分されていることから、システムパラメータの不連続変化時、この強制項が無限大となる。このとき電圧は、瞬時に変化し得る。よってこの式は状態変数表現が持つべき第2の性質を満たしてはいない。

4. 入出力表現への数値解法の適用

本文2・4節で述べた通り、入出力表現に対しては交互解法は適用できない。ここでは同時解法を適用する場合について若干の考察を行う。微分方程式の数値解法は、陽的解法と陰的解法とに分類することができる。陽的解法とは、繰り返し計算が不要な解法を指し、それに対し繰り返し計算が必要な解法を陰的解法と呼ぶ。

陽的解法は、微分方程式ひとつあたり微分されている量がひとつである形式を対象に述べられている^[8,9]のが一般的である。入出力表現をこの形式に変換するための方法としては、状態変数表現を用いる方法と、付録3の方法を用いる方法とが考えられる。仮に付録3のような変数の消去作業を行う場合、次に述べるように若干の問題がある。付録3の手続きは、無効電力を考慮する場合、若干複雑なものとなる。またシステムパラメータに不連続変化がある場合には、付録3で述べたように ΔV が不連続に変化し得る。この場合には何らかの例外処理が必要となるであろう。

一方陰的解法は、解くべき方程式をすべて代数方程式に帰着させ、それを繰り返し解くものなので、対象の微分方程式の形式に制約は無い。動的システムの記述が完全でありさえすればよい。すなわちこの場合付録3のような手続きは必ずしも必要ではない。

以上から入出力表現に対しては、陽的解法よりは陰的解法の方が適しているといえることができる。

片岡 良彦

(正員) 昭和61年3月千葉大学大学院電気工学専攻修士課程修了。同年4月東京電力(株)入社。昭和63年7月システム研究所、現在に至る。主として、電力システムの安定性に関する研究に従事。IEEE、計測自動制御学会の会員。