最大負荷点の新しい定式化と解法

正員 餘利野 直人 (広島大)

正員 原田 繁実 (広島大)

A new formulation and its solution method for a maximum loading point in electric power systems.

Naoto Yorino, Member, Shigemi Harada, Member (Hiroshima University)

This paper proposes a new efficient formulation and its solution method for a maximum loading point or saddle node bifurcation point in electric power systems. This point, corresponding to a tip of the $P(Q)$ -V curve, is characterized by singularity of the load flow Jacobian. The proposed formulation is of dimension $n+1$, instead of $2n+1$ in the standard formulation, for n -dimensional load flow equations. The proposed method uses 1-dimensional singularity condition, obtained from a reduction of the standard $n+1$ -dimensional singularity conditions. For this reduction, one of the diagonal elements of the load flow Jacobian is selected. We also propose an index for this selection to make the proposed method reliable. The solution for the proposed formulation can effectively be obtained based on the Newton-Raphson method with sparse matrix techniques. The computational performance of the proposed method is demonstrated on 6, 14, and 118 bus test systems.

キーワード：電圧安定性，最大負荷点，サドルノード分岐

1. まえがき

近年，電力系統の電源の遠隔化，負荷の定電力化等のために，運用・計画時に電圧安定性を考慮することが重要となってきた[1]．このため，様々な電圧安定性指標が提案され一部はオンラインで用いられている[2]．これら指標のうち現在の運用状態から最大負荷点（ノーズ・カーブの先端の点，潮流限界点）までの負荷の余裕量は表現が直感的に理解しやすい等の理由から有効な指標の一つである．

最大負荷点は潮流ヤコビアンの特異性により特徴づけられる点であり，分岐理論では潮流ヤコビアンの退化次数が1である一般的な場合に対してサドルノード分岐点 (saddle node bifurcation point) といった用語が用いられる．この計算は，負荷・発電等を変化させる方法により大きく二つに分けられる．一つはそれぞれの負荷・発電等を一律にパラメータ空間内の指定した方向に変化させ到達する最大負荷点を求めるものである[3-14]．もう一つは，負荷・発電の変化方向を特に指定せず，現在の運用点から最も近い最大負荷点（最近接潮流限界点）を計算する方法である[15-19]．本稿では負荷・発電等をパラメータ空間内で特定方向に変化させる場合のみを取り扱う．

ある方向に負荷・発電を変化させるという条件下で最大負荷点を計算する場合の標準的な定式化は $2n+1$ 次元

(n :潮流方程式の次元) である[3-5, 14]．これは n 次元の潮流方程式と $n+1$ 次元の潮流ヤコビアンの特異性条件により構成される．この定式化をNewton-Raphson法（以下N-R法）により解く手法はPoint of Collapse法（以下PoC法）と呼ばれている．PoC法ではスパース行列技法を用いて潮流計算の4-10倍程度の時間で最大負荷点を求めることができる[5]．

よく知られているもう一つのアプローチとしては，系統のノーズ・カーブを追跡しながら最大負荷点を計算するContinuation法がある[5-8]．ノーズ・カーブは系統の運用者に有益な情報を与えるが，最大負荷点のみを求めたい場合にはContinuation法は計算時間の観点から必ずしも効率的な手法とは言えない．

その他にも，非線形最適化を用いる手法[9, 10]， $n+1$ 次元のアプローチ[11, 12]等が提案されている．これらいずれにもそれぞれ長所・短所があり，様々なケースに対して最も優れた手法というのは現在のところ決定できないが，PoC法とContinuation法が最も広く用いられている．

本稿では $n+1$ 次元の最大負荷点の計算法を提案する．このために標準的な定式化の特異性条件 ($n+1$ 次元) を縮約することにより1次元の特異性条件を導出する．この縮約時に潮流ヤコビアンの対角要素の一つを選択することが必要である．以上で得られた定式化の解はN-R法により求められる．このときに現れる行列はスパースなものであり，ま

た行列の次元が縮約されているので提案法は現在 広く用いられているPoC法より更に効率的である。

なお本手法の他にも潮流計算と同程度の次元の定式化による手法がいくつか提案されているので、以下でそれらの概要と本手法との相違点について述べる。

片岡[11]は負荷・発電の増加度のパラメータを間接的に表わし、最大負荷点においてもヤコビアンが特異とならないことが保証される定式化を用いている。この定式化の下で、最大負荷点への近接度指標を導入し、 $n+1$ 次元の定式化を実現している。ただし、近接度指標の微係数の解析的な表現が困難であることから、特殊な解法を採用している。計算時間は潮流計算の2-3倍と報告されている。

Chiangら[12]は片岡の定式化と同様の $n+1$ 次元の定式化を提案している。しかし、定式化においてスパース性が失われる等の問題があり、著者等の知る限り現在のところ効率的な解法はない。

鈴木らの方法[13]は最大負荷点において dP/dV （あるいは dQ/dV ）が零になることを利用している。解法としてはN-R法による潮流計算に組み込む方法を採用している。ただし、 dP/dV （あるいは dQ/dV ）およびその微係数の計算に近似を用いているためN-R法の収束特性は若干損なわれている。計算時間は潮流計算の3-4倍と報告されている。

ただし、以上に示した一連の手法[11-13]において、本問題に対して重要な発電機の無効電力出力上限の取り扱いが可能であるか否かに関しては不明な部分が多く、このためこれらの手法が実際のところPoC法と比べて計算効率および収束性の点でどの程度有利であるかは現在のところ判定できない。

本論文で提案する手法と上述の手法の違いは、定式化とその解法にある。提案法の $n+1$ 次元の定式化において、最大負荷点で満たされるべき条件（潮流方程式および潮流ヤコビアンの特異性）のいずれも微係数を厳密に評価できる。すなわち通常のN-R法を収束特性を損なうことなく適用することが可能である。従って、解の近傍では非常に早い収束が期待できる。ただし、本論文においても発電機の無効電力出力上限についての検討は行わない。しかしながら、本論文の解法および収束特性は原理的にPoC法の範疇に属するものであるもので、将来はPoC法における技巧がそのまま採用できるものと考えている。

本論文の構成は以下の通りである。まず、2章で標準的な最大負荷点の定式化について説明する。3章では提案する $n+1$ 次元の定式化を導出する。そして4章で新しい定式化のN-R法による求解を説明する。5章では本定式化において必要とされるヤコビアンの要素の選択について考察し、選択のための基準を示す。6章では6, 14, 118母線系統での数値例を示す。

2. 最大負荷点の条件式

最大負荷点はある母線注入電力の増加パターンの下で系統のヤコビアンが特異となる点に相当している。従って、母線注入電力を指定した方向に直線状に変化させると最大負荷点においては次式が満たされる[3-5]。

$$g(x, \lambda) = f(x) - \lambda y_d - y_0 = 0 \quad (1)$$

$$J_v = 0 \quad \left(J = \frac{\partial g}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$\|v\| \neq 0 \quad (3)$$

ここで

$f(x): R^n \rightarrow R^n$: 潮流方程式

$x \in R^n$: 電圧ベクトル

$y_0 \in R^n$: 運用点の指定値ベクトル

$y_d \in R^n$: 負荷・発電の変化方向

$\lambda \in R^1$: 負荷の増加度を表す変数

$v \in R^n$: ヤコビアンの右固有ベクトル

(1)式は系統が潮流方程式を満足しなければならないという条件であり、(2)式がヤコビアンの特異性、すなわち最大負荷点の条件である。(3)式は(2)式が自明な解に収束するのを防ぐための式であり、たとえば次式である。

$$v^T v = 1$$

以上の標準的な定式化では問題の次元は $2n+1$ 次元となっている。(1)-(3)式を直接N-R法によって解く手法はPoint of Collapse法と呼ばれている[3-5]。PoC法ではスパース性を利用し、潮流計算の4-10倍程度の計算時間で解が得られる[5]。

3. 定式化

ここでは標準的な定式化の(2)式を縮約することによって、より低い次元の条件式を導出する。まず、(2)式を要素に分けて表すと以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

すなわち、

$$\begin{cases} J_{11}v_1 + J_{12}v_2 = 0 \\ J_{21}v_1 + J_{22}v_2 = 0 \end{cases}$$

ここで $J_{11} \in R^{m \times m}$, $J_{12} \in R^{m \times (n-m)}$, $J_{21} \in R^{(n-m) \times m}$, $J_{22} \in R^{(n-m) \times (n-m)}$, $v_1 \in R^m$, $v_2 \in R^{n-m}$ である。

したがって、 $\det(J_{22}) \neq 0$ のとき

$$v_2 = -J_{22}^{-1} J_{21} v_1 \quad (5)$$

であり次式が成立する。

$$(J_{11} - J_{12} J_{22}^{-1} J_{21}) v_1 = 0 \quad (6)$$

すなわち

$$\det(J_{11} - J_{12} J_{22}^{-1} J_{21}) = 0 \quad (7)$$

でなければならない。

上式より、ヤコビアンの特異性(4)をより小さい行列の特異性(6)に置き換えることができる。ここで $\det(J_{22}) \neq 0$ となるようにヤコビアンを分割すると(6)式は m 次元の式となり、(1)および(3)式とあわせて $n+m+1$ 次元の最大負荷点の条件式が得られる。

以下、上記の定式化について $m=1$ とする。このとき(6)式の括弧内はスカラーとなるため、(6)式の v_1 を定数として扱うことができる。なお v_1 は(4)式に見られるように固有ベクトルの一要素であるので $v_1=0$ の場合以外は任意の定数として取り扱って良い。我々が対象とするのは最大負荷点において $\text{rank}(J)=n-1$ の場合、すなわちサドルノード分岐の場合なので、 $\det(J_{22}) \neq 0$ となるような $J_{11} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ の選択が必ず存在する。このとき潮流ヤコビアンの特異性条件(2)、(3)の代わりに以下を用いることができる。

$$J_1(x) = J_{11} - J_{12}J_{22}^{-1}J_{21} = 0 \quad (8)$$

ここで

$$J_1(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$$

である。

以上をまとめると、 J_{22} が正則であるとき、最大負荷点の条件式は以下となる。

$$g(x, \lambda) = f(x) - \lambda y_d - y_0 = 0 \quad (9)$$

$$J_1(x) = J_{11} - J_{12}J_{22}^{-1}J_{21} = 0 \quad (10)$$

ここで、(9)式は系統が潮流方程式を満足することを示しており、(10)式が潮流ヤコビアンの特異性条件を表わしている。この条件式は全体として $n+1$ 次元である。

4. N-R法による解法

(9)、(10)式をN-R法で解くとき反復 k 回目での修正方程式は次式である。

$$\begin{bmatrix} -g(x^{k-1}, \lambda^{k-1}) \\ -J_1(x^{k-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(x^{k-1}) & -y_d \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$x^k = x^{k-1} + \Delta x \quad (12)$$

$$\lambda^k = \lambda^{k-1} + \Delta \lambda \quad (13)$$

ここで

$$D = \frac{\partial J_1(x^{k-1})}{\partial x}$$

である。以上を繰り返すことにより(9)、(10)式の解を求めることができる。(11)の右辺で J は通常の潮流ヤコビアン、 y_d は指定条件であり特別な計算は必要ない。以下では D の計算について考察する。

さて前述の(10)式は(6)において $m=1$ の場合について v_1 を定数扱いしたものであった。しかし、ここでは D の計算のために再度(6)式を考察する。いま(6)式の左辺を h_1 とおく。

$$h_1 = (J_{11} - J_{12}J_{22}^{-1}J_{21})v_1 \quad (14)$$

図1 提案法の計算手順

Fig. 1. Procedure of the proposed method.

ここで

$$h(x, v) \equiv J(x)v = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

を考えると、次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix} = h(x, v) \quad (16)$$

この式の全微分を考える。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dh_1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial h}{\partial x} dx + J dv \\ &= \begin{bmatrix} h_{x_1} \\ h_{x_2} \end{bmatrix} dx + \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 h_{x_1} 、 h_{x_2} は $\partial h / \partial x$ ($h(x, v)$ の x に関するヤコビアン) を分割したものであり、 $dh_1 \in \mathbb{R}^m$ 、 $h_{x_1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 、 $h_{x_2} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ 、 $dv_1 \in \mathbb{R}^m$ 、 $dv_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ である。(17)式を展開すると

$$dh_1 = h_{x_1} dx + J_{11} dv_1 + J_{12} dv_2 \quad (18)$$

$$0 = h_{x_2} dx + J_{21} dv_1 + J_{22} dv_2 \quad (19)$$

となる。(19)式を dv_2 について解くと、

$$dv_2 = -J_{22}^{-1} h_{x_2} dx - J_{22}^{-1} J_{21} dv_1 \quad (20)$$

となり、(18)式に代入すると

$$dh_1 = (h_{x_1} - J_{12}J_{22}^{-1}h_{x_2})dx + (J_{11} - J_{12}J_{22}^{-1}J_{21})dv_1 \quad (21)$$

が得られる。したがって、(8), (14), (21)式より $m=1$ のとき

$$D \equiv \frac{\partial J_1(x)}{\partial x} = \frac{1}{v_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{1}{v_1} (h_{x_1} - J_{12}J_{22}^{-1}h_{x_2}) \quad (22)$$

となる。ここで注意することは(22)式は $h(x, v)$ (式(15)参照)の x に関する偏微分 h_{x_1} , h_{x_2} (x と v の陽な関数)を用いて表わされる点である。従って、 D は $v_1=1$ として(5)式から決まる $v^T = [v_1^T \ v_2^T]$ の値を用いて以下の手順で計算される。(i)潮流ヤコビアン J を計算する。(ii) v を(5)式より計算する。(iii)(ii)で得られた v を用いて h_{x_1} および h_{x_2} (すなわち $\partial h/\partial x$)を計算する。(iv) J および h_{x_1} , h_{x_2} を(22)式に代入する。

本手法の計算手順を図1にまとめておく。以上の式の導出においては J_{22}^{-1} の表記を用いたが、実際の計算には逆行列は用いず、LU分解を用いる。 J_{22} は潮流ヤコビアンの一部であり、スパース行列であるためLU分解を効率的に行うことが可能である。従って、本手法では各反復の初めに J_{22} のLU分解を行っておき、(5), (10), (22)および(11)においてこの結果を利用することで計算の効率化が可能である。この分解の結果を(11)式に適用する手法は付録に示した。

以上の説明において発電機の無効電力出力限界等の制約は考慮されていない。これらはPoC法と同様に容易に組み込むことが可能であると考えられる。

5. J_{11} の選択法

前節の提案法では計算開始前に(4)式の形で J および v を分割する必要がある。ここで J_{11} (および v_1)の選択法について考察する。まず第一に、選択する要素は電圧安定性すなわちノーズの先端付近の電圧変化に深く関わっているものであることが望ましいであろう。従って、潮流ヤコビアンの零固有値に対する固有ベクトル v の成分の大きさを指標とすることができる。

従来法であるPoC法は、(2)式のように、この v を陽に定式化に含んでいるため、計算の開始時に初期値として v の近似値を必要とする。その際、逆反復法(付録参照)により初期の潮流解において J の最小固有値に対応する右固有ベクトルを求め、近似値として用いる事が一般的に行われている。

これに対して、提案法では v は変数として陽に入っていないため v の近似値は必要ないが、 J_{11} 選択の指標とするために v の初期近似値として(23)式の使用を提案する。ただし、これは J_{11} の選択のためにのみ用いるものであって実際に(9), (10)式をN-R法で解く際には用いるものではない。

$$\bar{v} = J^{-1}y_d \quad (23)$$

$\bar{v}$ は運転点において y_d 方向に負荷が変化したときの電圧変

化方向を示している。ノーズの先端に近いほど $\bar{v}$ は v に漸近していく。すなわち、ここで(1)式の全微分を考えると

$$\begin{aligned} dg &= df - d\lambda y_d \\ &= Jdx - d\lambda y_d \\ &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

つまり、

$$Jdx = d\lambda y_d \quad (25)$$

である。この式は線形化した潮流方程式の条件である。最大負荷点に近づくにつれて dx は v に近づき、最大負荷点においては $d\lambda=0$ であるので

$$Jdx = 0 \quad (26)$$

となり dx は v のスカラー倍となる。従って、運転点が重負荷になるほど(23)式の $\bar{v}$ は v に近づいていく。(23)式の利点として、この近似が零に近づいていく固有値に対する固有ベクトル、すなわち目標となる固有ベクトルの近似を与えるということが挙げられる。目標となる固有値は必ずしも絶対値最小のものとは限らず、負荷の変化方向 y_d にも依存する。そのため初期運転点において逆反復法で求めた固有ベクトルと最大負荷点での v が大きく異なることがある。(23)式の近似は負荷の変化方向 y_d を考慮しているため、上述の失敗が起こりにくい。我々が検討を行った結果、従来のPoC法においても(23)式は逆反復法よりも良好な結果を与えることが確認された。

したがって、(23)式の $\bar{v}$ を最大負荷点における v の推定値として用いることにより、 x のうちで電圧安定性に最も深く関わっているものを推測することが可能となる。すなわち、 $\bar{v}$ の絶対値最大の要素が電圧安定性に深く関わっていると考えられ、これに相当する列から J_{11} を選ぶことにより確実に収束を得ることが期待できる。

6. 数値例

Ward & Hale 6, IEEE14, IEEE118母線系統で検討を行った。検討の際、電圧は直角座標表現を用いた。計算の初期値には各系統の標準状態の値($\lambda=0$)を用いた。要素の並べ替えにより潮流ヤコビアンのすべての要素が J_{11} として選択可能であるが、我々是对角要素のみを用いて検討を行った。また、発電機の無効電力出力限界は考慮されていない。 y_d は負荷および揚水を除く発電が初期の配分で増加するように初期の母線指定値を設定した。運用点は $\lambda=0$ に相当し、 $\lambda=1$ ならば運用点の二倍の大きさの負荷に相当する。N-R法の終了判定としては、(11)式の左辺のすべての要素の大きさが 10^{-6} 未満ならば収束とした。

表1にWard & Hale 6母線系統における J_{11} と収束状況の関係を示す。同表より明らかなようにとして Q_3, Q_4, Q_6 に対応する対角要素を選んだ場合以外は、全ケースについて解に収束している。 Q_3, Q_4, Q_6 に対応する要素を選んだ場合にも解の近傍の初期値から計算を開始すれば収束することは確認している。

図2 選択指標と反復回数の関係
Fig. 2. Effect of the index.

図3 提案法の収束特性
Fig. 3. Convergence characteristics of the proposed method.

表1 Ward & Hale 6母線系統における結果
Table 1. Results on Ward & Hale 6 bus system.

ケース	J_{11} のタイプ	反復回数	λ	$\bar{v}$	J_{11}
P	$\partial P_2 / \partial e_2$	8	0.666	0.009	1.69
P	$\partial P_3 / \partial e_3$	5	0.666	0.267	1.74
P	$\partial P_4 / \partial e_4$	6	0.666	0.204	3.24
P	$\partial P_5 / \partial e_5$	5	0.666	0.284	1.15
P	$\partial P_6 / \partial e_6$	5	0.666	0.251	1.85
V	$\partial V_2^2 / \partial f_2$	17	0.666	0.160	-0.13
Q	$\partial Q_3 / \partial f_3$	20	-	0.235	-2.75
Q	$\partial Q_4 / \partial f_4$	20	-	0.168	-3.24
Q	$\partial Q_5 / \partial f_5$	11	0.666	0.224	-1.71
Q	$\partial Q_6 / \partial f_6$	20	-	0.221	-2.89

表2 結果の概要
Table 2. Summary of the results.

ケース	Ward & Hale 6 ($\lambda=0.666$)	IEEE 14 ($\lambda=3.017$)	IEEE 118 ($\lambda=2.177$)
total	7/10	19/26	58/234
P	5/5	12/13	45/117
Q	1/4	5/9	10/64
V	1/1	2/4	3/53

表2は全テスト系統についての結果を要約している。系統名の下の括弧内は最大負荷点における λ の値を示している。 $\lambda=0$ に相当する運用状態を初期値にしていることを考慮すれば、14母線系統では4倍程度の重負荷な最大負荷点にも収束している。表の下側4行は J_{11} の選択に対する収束状況を示している。例えば、この表のケースのP欄で5/5とはP指定の潮流ヤコビアン J の行が5つあり、その各対角要素を J_{11} として選んだとき収束したケースが5つあったことを示している。このときN-R法で20回以上を要するものは収束しないものと判断した。また、表2では現実的に意味のない解に収束したものがあったが、これは収束しなかったものとして扱った。Ward & Hale 6 およびIEEE14母線系統に対しては J_{11} としてPに関する潮流ヤコビアンの要素を選択することによりほぼ全てのケースに対して解が得られている。IEEE118系統に対しては、 J_{11} をランダムに選ぶと収束する割合は25%程度である。最も良く収束が得られるのは選択する要素がPに関するものであるときであり38.5%の収束率である。このうち、PQ指定母線に関する要素の時は28/64(43.8%)の収束率であり、PV指定母線に関する要素の時は18/53(34.0%)の収束率であった。つまり、 J_{11} は潮流ヤコビアンのPQ指定母線（すなわち負荷母線）のPに関する行から選ぶことによりよい収束が得られていることがわかる。

次に前で考察した J_{11} の選択法を検証する。図2は選択した J_{11} に相当する $\hat{v}$ （式(23)）の要素の絶対値とN-R法の反復回数との関係を示している。この図はPQ指定母線のPに関する要素についてのみプロットしている。また、絶対値が0.04未満のものはプロットしていない。この図より、潮流ヤコビアンの要素のなかで相当する $\hat{v}$ の要素の絶対値が大きいものを J_{11} として用いることで確実に解を得られることがわかる。すなわち、 $\hat{v}$ が J_{11} の選択指標として利用できる。ただし $|\hat{v}_i|$ の大きさと収束の成否は完全に対応しているわけではない。例えば、図2からわかるように $|\hat{v}_i|=0.05$ 未満のもので収束するケースがかなり存在している。このように $|\hat{v}_i|$ を指標にすることは必ずしも最適な方法ではないが、簡単に得られる指標であり必要な計算は(23)式により $\hat{v}$ を得ることだけである。 J_{11} の選択は提案法の実用性に関する重要な項目であるのでより良い指標の検討を今後も進めていくが、相当する $|\hat{v}_i|$ の大きい J_{11} を選択することにより現在のところ特に問題なく解を得ることができる。

図3は典型的な収束特性を示している。この図はWard & Hale 6母線系統に対するものであるが、他の系統でも収束する場合には同様な収束特性を示した。この収束特性は従来のPoC法と極めて類似したものであり、収束に要する反復回数もPoC法とほぼ同程度であることを確認している。

提案法の計算効率であるが、提案法の検証はMATLAB Ver.4.2を用いて行った。スパース行列の処理はMATLAB組み込みの機能を利用している。演算回数の測定機能を用

いて潮流計算と提案法の比較を行った結果、提案法は潮流計算の2-4倍程度の計算時間を要すると推測される。これに対してPoC法は潮流計算の3-6倍と推測された。ただし、実際にはPoC法には効率的なプログラムの作成上以下のような留意すべき点があるため、提案法とPoC法の計算効率の差はもう少し開くと考えられる。

すなわち従来のPoC法では第一にヤコビアン（すなわち(1)-(3)式のヤコビアン）の中に解近傍で特異となる潮流ヤコビアン（(2)の J ）が二箇所現われ、このためピボットの選定等の特別な配慮が必要であることである。第二に、従来の定式化においては潮流ヤコビアンの固有ベクトル v が陽に変数として使用されており、このため初期状態あるいは発電機の状態変更時（PV→PQ）において逆反復法等で v を推定する必要があることが挙げられる。

これに対して、提案法では第一の問題はほとんどない。また第二の問題に関しては、従来法、提案法、両者に対して提案した(23)式の推定法により解決できる。提案法においても(11)式の係数 D の推定および指標計算のために v を計算する必要があるが、基本的には提案した定式化は(9)、(10)式に示したように v を含んでいない。このことは特に係数 D の推定に対して更なる手法を考案すれば大幅な効率化が図れる可能性を意味している。このように、本論文で提案した最大負荷点の新しい定式化およびその解法に関する基本的なアルゴリズムについての知見は、将来の更なる効率的な手法の開発に向けて十分寄与し得るものと考えられる。

7. あとがき

本稿では最大負荷点の新しい定式化とN-R法による解法を提案した。提案法の次元はPoint of Collapse法（PoC法）の $2n+1$ に対して $n+1$ 次元である。これは標準的な $n+1$ 次元の潮流ヤコビアンの特異性条件を1次元の条件式に縮約することにより実現された。この縮約のために潮流ヤコビアンの対角要素の一つを選択しなければならないが、この選択に対する指標も同時に考察した。提案した定式化はスパース行列技法に基づいて効率的にN-R法で解くことができ、高速に最大負荷点を求めることが可能である。

提案法の有効性は6, 14, 118母線系統における数値的検討により確認された。提案法の数値的な性能（収束特性、反復回数等）は従来のPoC法とほぼ同等であった。一方、一回の反復あたりに解くべき方程式の次元は約半分になっているため提案法はかなり効率的である。今回の検討においては発電機の無効電力出力限界の制約は考慮しなかった。これらの制約は従来のPoC法と同様に比較的容易に組み込むことが可能と考えられる。

（平成7年11月24日受付，平成8年10月2日再受付）

参考文献

- [1] 電力系統安定運用技術専門委員会：「電力系統安定運用技術」電気協同研究，47巻，1号，平成3年
- [2] 鈴木・岸田：「電圧安定性オンライン監視システム」電学論B，111巻，3号，pp.247-249，平成3年
- [3] F. L. Alvarado, T. H. Jung, "Direct Detection of Voltage Collapse Conditions," *Proc. Bulk Power System Voltage Phenomena - Voltage Stability and Security*, EPRI EL-6183, pp. 5.23-5.38, 1989.
- [4] C. A. Cañizares, F. L. Alvarado, C. L. DeMarco, Ian Dobson, W. F. Long, "Point of Collapse Methods Applied to AC/DC Power Systems," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 7, No. 2, pp. 673-683, 1992.
- [5] C. A. Cañizares, F. L. Alvarado, "Point of Collapse and Continuation Methods for Large AC/DC Systems," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-8, 1993.
- [6] H. D. Chiang, W. Ma, R. J. Thomas, J. S. Thorp, "A Tool for Analyzing Voltage Collapse in Electric Power Systems," *Proc. of the 10th Power System Computation Conference*, pp. 1210-1217, 1990.
- [7] K. Iba, H. Suzuki, M. Egawa, T. Watanabe, "Calculation of Critical Loading Condition with Nose Curve Using Homotopy Continuation Method," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 6, No. 2, pp. 584-593, 1991.
- [8] V. Ajjarapu, C. Christy, "The Continuation Power Flow: A Tool for Steady Stage Voltage Stability Analysis," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 7, No. 1, pp. 416-423, 1992.
- [9] J. Lu, C. W. Liu, J. S. Thorp, "New Methods for Computing a Saddle-Node Bifurcation Point for Voltage Stability Analysis," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 10, No. 2, pp. 978-989, 1995.
- [10] T. Van Cutsem, "A Method to compute Reactive Power Margins with respect to Voltage Collapse," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 6, No. 1, pp. 145-156, 1991.
- [11] 片岡：「系統の最大負荷点の高速求解法」電学論B，113巻，1号，pp.58-67，平成5年
- [12] H. D. Chiang, R. J. Jumeau, "A More Efficient Formulation for Computation of the Maximum Loading Points in Electric Power Systems," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 10, No. 2, pp. 635-646, 1995.
- [13] 鈴木・柵木：「電力系統の電圧安定限界の直接解法」電学論B，110巻，11号，pp.895-902，平成2年
- [14] 豊田・方・斎藤：「直接計算法における電圧安定限界の分岐について」電学論B，115巻，6号，pp.576-581，平成7年
- [15] I. Dobson, L. Liu, "New method for computing a closest saddle node bifurcation and worst case load power margin for voltage collapse," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 8, No. 3, pp. 905-913, 1993.
- [16] F. Alvarado, I. Dobson, Y. Hu, "Computation of closest bifurcations in Power Systems," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 9, No. 2, pp. 918-928, 1994.
- [17] 餘利野・原田：「潮流多根に基づく最近接潮流限界点の近似手法」電学論B，115巻，10号，pp.1249-1255，平成7年
- [18] N. Yorino, S. Harada, H. Cheng, "A Method to Approximate a Closest Loadability Limit using Multiple Load Flow Solutions," *IEEE 96 PES Winter Meeting*, No. 96WM309-5, to appear in *IEEE Trans. on Power Systems*.
- [19] 餘利野・原田：「最近接潮流限界点の直接計算法に関する考察」平成7年度電気学会電力技術研究会，PE-95-138

付 録

1. (11)式の解法

(11)式は変数の並べ替えにより次式のように表される。この式で未知数は s_1, s_2 である。

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad (\text{付1})$$

ここで， $r_1 \in R^{2 \times 1}$ ， $r_2 \in R^{(n-1) \times 1}$ ， $A_{11} \in R^{2 \times 2}$ ， $A_{12} \in R^{2 \times (n-1)}$ ， $A_{21} \in R^{(n-1) \times 2}$ ， $J_{22} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$ ， $s_1 \in R^{2 \times 1}$ ， $s_2 \in R^{(n-1) \times 1}$ である。

提案法においては $\det(J_{22}) \neq 0$ であるので，

$$s_2 = J_{22}^{-1}(r_2 - A_{21}s_1) \quad (\text{付2})$$

が成立し，(付1)式は

$$r_1 - A_{12}J_{22}^{-1}r_2 = (A_{11} - A_{12}J_{22}^{-1}A_{21})s_1 \quad (\text{付3})$$

という2変数の連立一次方程式に帰着する。すなわち， J_{22} のLU分解の結果が分かれば2変数の連立一次方程式(付3)を解き，その結果を(付2)に代入することにより(11)式の解を効率的に得ることができる。

2. 逆反復法

逆反復法とは行列Aの絶対値最小の固有値を求める技法である。この方法は，ある初期ベクトル $u^{(0)}$ から，

$$Au^{(k)} = u^{(k-1)} \quad (\text{付4})$$

を繰り返し解いていく。ただし，各反復において(付4)式の解を適当に正規化する。ここで括弧内の数字は反復回数である。反復が進むに連れて，ベクトルは絶対値最小の固有値に相当する固有ベクトルへ近づいていく。

餘利野 直 人 (正員) 昭和33年1月24日生。58年3月早稲田大学大学院修士課程修了。同年4月富士電機製造(株)入社。59年4月早稲田大学大学院理工学研究科博士課程進学。60年4月同大学理工学部助手。62年4月広島大学工学部助手，平成2年6月同助教授。工学博士。電力系統安定度および電力系統の経済運用に関する研究に従事。1985年 George Montefiore 受賞。IEEE 会員。

原 田 繁 実 (正員) 昭和46年11月15日生。平成8年3月広島大学大学院工学研究科博士課程前期修了。同年4月同大学大学院工学研究科博士課程後期(システム工学専攻)に進学。