電力系統における振動現象のホップ分岐理論による安定性判別

正員 天野 博 之 (電力中央研究所)

正員 熊野 照 久 (電力中央研究所)

正員 井上 俊 雄 (電力中央研究所)

正員 谷口 治 人 (電力中央研究所)

A Stability Criterion for Nonlinear Oscillations in Power Systems by Hopf Bifurcation Theory

Hiroyuki Amano, Member, Teruhisa Kumano, Member, Toshio Inoue, Member, Haruhito Taniguchi, Member (CRIEPI)

A stability criterion for nonlinear oscillations in power systems is proposed. It consists of calculation of a limit cycle by application of Hopf bifurcation theory and nonlinear transformation of the coordinates using invariant manifolds. The proposed method is verified in a single-machine infinite bus system.

キーワード：ホップ分岐理論，振動発散，持続振動，サブクリティカル，スーパークリティカル，リミットサイクル，中心多様体，非線形座標変換，一機無限大母線系統

1. はじめに

電力系統の効率運用に伴う送電線の重潮流化により，系統現象はより複雑で非線形性の強いものとなる．系統の非線形性に起因する現象として，AVRの高ゲインなどにより生じる非線形振動が挙げられる⁽¹⁾．

このような振動現象に関して，従来より，系を平衡点の近傍で線形化し，その固有値を調べる線形解析が行われている．確かに線形解析により平衡点の安定性については判別が可能である．しかし，制御パラメータや潮流の変化に伴い，平衡点は安定であるにもかかわらず，平衡点の周囲の安定領域が侵食され，その外側では振動が発散するような場合もある⁽²⁾⁽³⁾．このような場合，線形解析では削られた安定領域の広さに関して評価することはできない．

非線形性を考慮した手法として，従来よりエネルギー関数法が提案されているが，これは第一波脱調を対象とするものであり，振動発散に対しては有効ではない．

また，非線形解析法の一つとして振動現象を対象とするホップ分岐理論⁽⁴⁾⁽⁵⁾があり，この理論を用いて平衡点の安定限界を越えた場合に生じる振動が持続振動であるか，振動発散であるかを判別する方法が検討されている⁽¹⁾．しかし，前述のように平衡点の安定限界に至る前でも，擾乱の大きさによっては振動が発散するような場合があるにもかかわらず，その安定領域に関する検討は著者の知る限りほとんど行われておらず，このような場合の振動の安定性に対する有効な判別法はこれまでにない．

そこで，本論文では，まず振動発散に関する安定領域の

構造について考察を行い，その知見に基づき，擾乱の大きさによって減衰したり発散したりする場合がある振動の安定性を，事故除去時の運転状態から判別する方法を提案する．提案手法は，ホップ分岐理論を応用してリミットサイクルを算出し，非線形性を考慮した固有空間上への座標変換を行うことにより，安定判別を行うものである．最後に，一機無限大母線系統において提案手法の有効性について検証した結果について述べる．

2. 電力系統における非線形振動

電力系統において，安定度，電圧安定性のいずれの面においても，多くの場合運転状態が厳しくなると，静的な限界($P-\delta$, $P-V$ カーブの頂点に対応し，サドルノード分岐点⁽⁴⁾⁽⁵⁾と呼ばれる)よりも動的な限界が先に訪れることが知られている⁽¹⁾⁻⁽³⁾⁽⁶⁾．このような現象のうち，特にある一つのモードが不安定化する，すなわち安定平衡点のまわりで線形化した系の固有値のうち，複素共役な1組の固有値の実部が負から正へと変化する現象は，ホップ分岐(付録1参照)と呼ばれる．ホップ分岐では，平衡点の安定性が変化するとともに，リミットサイクルの発生・消滅を伴う⁽⁴⁾⁽⁵⁾．

ホップ分岐には，図1のように，発生するリミットサイクルの安定性の相違により，次の2つのパターンがある⁽⁴⁾⁽⁵⁾．
スーパークリティカルホップ分岐 パラメータを変化させていくと，ある値(ホップ分岐値と呼ぶ)で安定平衡点が不安定平衡点に変化し(この点をホップ分岐点と呼ぶ)，

図1 ホップ分岐
Fig. 1. Hopf bifurcation

平衡点のまわりに安定なリミットサイクルが発生する(図1左側)。

サブクリティカルホップ分岐 パラメータを変化させていくと、あるところで安定平衡点が不安定平衡点に変化し、平衡点のまわりにあった不安定なリミットサイクルが消滅する(図1右側)。

これら両者の違いは、図1のように安定領域に大きな違いとなって現れる。局所的に見れば、スーパークリティカルの場合は、平衡点まわりの動作点は、ホップ分岐点に至る前では全て安定平衡点へと収束(減衰振動)し、ホップ分岐点の後では全て安定なリミットサイクルへと収束(持続振動)する。一方、サブクリティカルの場合は、平衡点まわりの動作点は、ホップ分岐点の後では、全て発散(振動発散)してしまい、ホップ分岐点に至る前でも、不安定なリミットサイクルの内部の動作点のみしか安定平衡点には収束(減衰振動)せず、平衡点の近傍では安定であるにもかかわらず、少し平衡点から離れたところでは発散(振動発散)してしまうことになる^{(2)(3)†}。

したがって、電力システムの安定な運用、制御に関して言えば、2つのパターンのホップ分岐のうちでも、安定領域が侵食されるサブクリティカルホップ分岐は、特に注意が必要であると考えられる。

3. 非線形振動の安定判別法

以下では、サブクリティカルホップ分岐点の手前における安定領域について考察を行い、最終的に発散して不安定となるか、減衰して安定となるかを、事故除去時(系統状態が最終的な形態となった時点という意味)における運転状態から判別する方法を提案する。

†リミットがある場合は、ある振幅で振動が抑えられ、持続振動となる場合もある⁽⁷⁾。

〈3・1〉 非線形振動の安定領域 サブクリティカルホップ分岐が起きる場合について、可変パラメータ ν が分岐値 ν_c に至る前、すなわち $\nu < \nu_c$ において、安定な平衡点と不安定なリミットサイクルが存在する場合の安定領域について考えてみる。

サブクリティカルホップ分岐の手前では、注目する固有値の実部は零に近く、それ以外の固有値に関しては十分安定として良い。したがって、位相空間内での動作点の動きは、注目する固有ベクトルが張る2次元の平面に接するある多様体(中心多様体と呼ばれる⁽⁴⁾⁽⁵⁾)上に急速に接近する。中心多様体上には不安定なリミットサイクルがあり、この接近先が不安定なリミットサイクルの内側にあれば、振動は減衰して安定平衡点に収束し、不安定なリミットサイクルの外側にあれば、振動は発散して不安定となる。したがって、安定平衡点の安定領域は、不安定なリミットサイクルに収束する集合(不安定なリミットサイクルの安定多様体という⁽⁴⁾⁽⁵⁾)によって包まれる円筒状の領域となる。

この安定領域の固有空間上への射影は、非線形性を無視すれば、注目する複素固有値以外の固有値に対応する固有ベクトルに平行な軸を持つ円筒となる。しかし、実際には非線形性があるため、安定領域はそれらの固有ベクトルの方向に接する歪んだ円筒となる。

ローレンツ系での例 ここで、上述したことをわかりやすく視覚化するため、基本的な3次元の非線形系であり、サブクリティカルホップ分岐が起こることが知られている⁽⁴⁾ローレンツ系

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = \nu x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_3 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (1)$$

$\sigma = 10, \beta = 8/3$: 固定パラメータ

ν : 可変パラメータ ($\nu_c \approx 24.74$)

における安定領域($\nu = 24.0$)を考える。

相空間 x 上での安定領域は図2(a)のようになり、固有空間 y 上では図2(b)のようになる。

〈3・2〉 提案する安定判別法 以上の考察によれば、まず不安定なリミットサイクルを求めてから、円筒の歪みを取り除くことができるように、安定領域を非線形性を考慮した固有空間 $\tilde{y}$ 上に座標変換できれば、一般的に、動作点が $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ 平面上でリミットサイクルの内外にあるかによって、精度良く安定判別ができると考えられる。

この知見に基づき、以下のような安定判別法を提案する。まず不安定なリミットサイクルを求めるが、これには収束計算が必要であり、収束計算がリミットサイクルに収束するには、リミットサイクルの十分近くに収束計算の初期値を与える必要がある。このため、まず収束計算の初期値をホップ分岐理論を用いて求め、次に収束計算によりリミットサイクルを求解する。最後に、リミットサイクルと動作

図2 ローレンツ系における安定領域 ($\nu = 24.0$)
Fig. 2. Stability region in Lorenz system ($\nu = 24.0$)

点を非線形性を考慮した固有空間へ座標変換することにより安定判別を行う。

〈3・2・1〉ステップ1:リミットサイクルの半径、周期の概算 まず、パラメータを変化させ、注目する固有値の実部が零になるパラメータの値 ν_c (分岐値)を求める。そのパラメータ値 ν_c においてホップ分岐理論を適用することにより、もとのパラメータ値における不安定リミットサイクルの半径、周期を概算する。

一般の N 次元の系に対してホップ分岐定理を適用してリミットサイクルの半径、周期の概算値 ϵ_e , T_e を計算するには、次の2段階の過程を経る必要がある。すなわち、中心多様体理論を用いて、系の流れを注目する2次元の状態空間と1次元のパラメータ空間の3次元の中心多様体[†]へと制限し、さらに、中心多様体上において標準形⁽⁴⁾⁽⁵⁾と呼ばれるより簡単な形に変形しなければならない。しかし、文献[8]において、これらの2つの過程をまとめて処理することにより、一般の N 次元の微分方程式に対して、全ての固有値、固有ベクトル、および、2次、3次の偏微分係数行列を計算することにより、リミットサイクルの各係数(ϵ_e , T_e など)を直接計算する公式が導かれている(付録1参照)ため、ここではこの公式を利用する。

〈3・2・2〉ステップ2:リミットサイクルの精密解を求解 ステップ1で計算したリミットサイクルの半径と周期の概算値 ϵ_e , T_e をもとに、次の N 次元の連立方程式

$$\phi(x_0, T_a) = x_0 \quad (2)$$

を、未知数 $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N, T_a)$ について、収束計算により解く。ここで、 $\phi(x_0, T_a)$ は x_0 を初期値とする時刻 T_a での動作点を表すものであり、(2)式はこの点と初期値 x_0 が一致するための条件である。したがって、(2)式の解 (x_0, T_a) は、リミットサイクル上の一点と周期の精密解となる。収束計算の初期値に用いる x_0 は、平衡点 x_* と注目する実数表現の固有ベクトル a_1, a_2 (付録1参照)から、

$$x_0 = x_* + k_1 a_1 + k_2 a_2 \quad (3)$$

により与えれば良い。ただし、 k_1, k_2 はステップ1により得られた ϵ_e を用いて次式により決定する。

$$k_1^2 + k_2^2 = \epsilon_e^2, \quad k_1 a_{1i} + k_2 a_{2i} = 0 \quad (4)$$

ここで、 a_{1i}, a_{2i} は a_1, a_2 の i 番目の要素。こうすることにより、 x の i 番目の要素 x_i は平衡点での値に固定される。 T_a の初期値は T_e とすれば良い。

〈3・2・3〉ステップ3:非線形性を考慮した固有空間への座標変換 事故除去時の運転状態およびステップ2で算出したリミットサイクルを $y = P^{-1}(x - x_*)$ (ただし、 $P = (a_1, a_2, \dots, a_N)$, a_i は実数表現の固有ベクトル, x_* は平衡点)により固有空間 y 上へ座標変換し、さらに、非線形性を考慮した固有空間 $\bar{y}$ 上へ座標変換する。 $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ 平面上で、動作点がリミットサイクルの内側であれば安定領域内、外側であれば安定領域外と判別する。

ここで、非線形性を考慮した固有空間への座標変換として、流れと接する多様体を用いる以下のような変換法を提案する。

まず、微分方程式を正準系に変形し(付録1参照)、それぞれのモードに対応する線形の固有座標 v_i に対して、 v_i とそれ以外の線形の固有座標 w_i とを用いた次の形に順次書き直す。

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= A_i v_i + V_i(v_i, w_i) \\ \dot{w}_i &= B_i w_i + W_i(v_i, w_i) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} V_i(0, 0) &= 0, \quad W_i(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial V_i}{\partial v_i}(0, 0) &= 0, \quad \frac{\partial W_i}{\partial w_i}(0, 0) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 v_i が実固有値に対応する場合は $v_i \in \mathbb{R}$, $w_i \in \mathbb{R}^{N-1}$ で、 A_i はスカラー、 B_i は $(N-1) \times (N-1)$ 行列、 v_i が複素固有値に対応する場合は、 $v_i \in \mathbb{C}^2$, $w_i \in \mathbb{R}^{N-2}$ で、 A_i は 2×2 行列、 B_i は $(N-2) \times (N-2)$ 行列である。

それぞれの v_i に対して、この微分方程式の流れと接する多様体(不変多様体)

$$v_i = h_i(w_i) \quad (7)$$

[†]中心多様体としてパラメータ方向を含めて考えることもできる⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

を次式を解くことにより求める⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

$$Dh_i(w_i)[B_i w_i + W_i(h_i(w_i), w_i)] - A_i h_i(w_i) - V_i(h_i(w_i), w_i) = 0 \quad (8)$$

このようにして求めた各 $v_i = h_i(w_i)$ を用いて、

$$v_i = \tilde{v}_i + h_i(\tilde{w}_i) \dots\dots\dots (9)$$

を連立して解くことにより、非線形性を考慮した固有空間 $\tilde{y}$ 上へ座標変換する ($y, \tilde{y}$ は原点から近いと仮定している)。

ローレンツ系において、この非線形性を考慮した固有空間への座標変換を行った例を図2(c)に示す。なお、ここでは、簡単のため2次の非線形性まで考慮した。具体的な計算法は付録2に示す。

4. 一機無限大母線系統での適用例

一機無限大母線系統(図3、表1)でサブクリティカルホップ分岐が起きる場合に対して、提案手法を適用した例を図4に示す。これは文献[3]の設定3と同じであり、発電機モデルは E'_q モデルである(付録3参照)。

図4(a)は図1の右側に対応するものを実際に描いたものであり、分岐図と呼ばれる。変化させるパラメータは、発電機の機械入力 P_m とした。このときの分岐はサブクリティカルホップ分岐であり、 $P_m \simeq 0.633$ pu で平衡点が不安定化し、分岐点の前においても不安定なリミットサイクルにより安定領域は削られる。

$P_m = 0.62$ pu (平衡点は安定)で、発電機高圧側至近端3LG故障で故障除去時間を変えることにより、安定となるケース(減衰して平衡点に収束する)と、不安定となるケース(振動発散する)についての動揺波形を描いたのが、図4(b)~(d)である。なお、故障除去により、もとの系統に戻るとした。安定なケースは計算を途中で打ち切っているため、平衡点に収束しきっていない。図4(b)は時間領域での波形、図4(c)は (δ, ω) 平面上 (δ は相角、 ω は角速度)での軌道、図4(d)は非線形性を考慮した固有空間 $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ 上での軌道である。非線形性については、ここでは先のローレンツ系の例と同様に2次まで考慮した。

従来行われているように、 (δ, ω) 平面上で安定判別を行った場合、その他の状態量 (E'_q など) を考慮していないため、事故除去直後の中心多様体から離れている部分については、図4(c)に示すように軌道は同心円状にはならない。このため、図4(c)に示したように、事故除去直後に関しては、安定なケースでもリミットサイクルの外に出てしまう(図中A)、あるいは、不安定なケースでもリミットサイクルの内部に入り込んでしまう(図中B)場合があり、十分な安定判別ができない場合がある⁽²⁾⁽³⁾。これは、図2(a)の上方から見て (x_1, x_2) 平面上で安定判別を行うことに対応し、安定領域に対応する円筒はこの平面に対して傾いているためである。

提案手法では $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ 平面上で安定判別を行い、安定領域に対応する円筒は2次の歪みまで含めてこの平面に垂直となる。このため、事故除去直後を含め軌道は同心円状と

なり、リミットサイクルの内外のどちらにあるかで精度良く安定判別ができる(図4(d))。臨界故障除去時間については、事故時の軌道がこのリミットサイクルと交わる点を求めることにより算出すれば良い。

また、図4(e)に、リミットサイクルの半径と周期に関するホップ分岐理論からの概算値と精密解((2)式の解)の比較、および、精密解求解の際の繰り返し計算回数を示す。収束計算にはニュートン法を用いた。図4(e)より数回(ここでは高々5回)の繰り返し計算でリミットサイクルの精密解を求めることができることがわかる。

5. おわりに

本論文では、擾乱の大きさによって振動の安定性が異なるような場合に対して、ホップ分岐理論を応用したリミットサイクルの算出、非線形性を考慮した固有空間上への座標変換を行うことにより、事故除去時の運転状態から振動の安定性を判別する方法を提案した。

一機無限大母線系統において振動発散が起こる場合に対して提案手法を適用した結果、事故除去時での運転点から振動の安定性を判別できることを明らかにし、提案手法の有効性を検証した。

多機系統への適用に関しては以下のように考える。提案手法のステップ1のリミットサイクルの半径および周期の概算と、ステップ3の非線形性を考慮した固有空間への座標変換は、安定平衡点における固有値と3次までの偏微分係数を用いて行うことができる。ここで、いずれにしても微分方程式の状態変数の次元数による制約はない。提案手法のステップ2のリミットサイクルの精密解の求解に関しても、 N 次元の連立方程式を数値的に解くものであり、ここでも次元数の制約はない。したがって、提案手法は手法的には次元数の制約はなく、多機系統にも適用可能と考えられる。

(平成12年8月14日受付、同12年12月8日再受付)

文 献

- (1) E. H. Abed and P. P. Varaiya, "Nonlinear oscillations in power systems", *Int. J. Elect. Power Energy Syst.*, vol. 6 (1984).
- (2) C. D. Vournas, M. A. Pai, P. W. Sauer, "The effect of Automatic Voltage Regulation on the bifurcation evolution in power systems", *IEEE Trans. on Power Syst.*, vol. 11, no. 4 (1996).
- (3) 川崎, 苗, 今村, 三谷, 辻, 「非線形動的システム理論に基づく発電機動揺の動特性解析」, 電学論B, 120 (平12-3)
- (4) J. Guckenheimer, and P. Holmes, "Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields", *Springer-Verlag, New York* (1983).
- (5) S. Wiggins, "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos", *Springer-Verlag, New York* (1990).
- (6) C. Rajagopalan, B. Lesieutre, P. W. Sauer and M. A. Pai, "Dynamic Aspects of Voltage/Power Characteristics", *IEEE Trans. on Power Syst.*, vol. 7, no. 3 (1992).
- (7) W. Ji and V. Venkatasubramanian, "Hard-limit induced chaos in a fundamental power system model", *Int. J. Elect. Power Energy Syst.*, vol. 18 (1996).
- (8) B. Hassard and Y. H. Wan, "Bifurcation Formulae Derived from Center Manifold Theory", *J. Math. Anal. Appl.* 63 (1978).

図3 一機無限大母線系統モデル
Fig. 3. Single-machine infinite bus system model

表1 系統定数

Table 1. System parameters

M [sec]	X_d [pu]	X'_d [pu]	X_q [pu]	T'_{do} [sec]	D [pu]	G_1 [pu]	G_2 [pu]	T_1 [sec]	T_2 [sec]	T_3 [sec]
7.527	1.79	0.355	1.66	7.9	2.0	220	1.0	0.03	0.3	0.5

(a) 分岐図

(b) 時間領域波形

(c) (δ, ω) 平面上での軌道

(d) 非線形性を考慮した固有空間上での軌道

(e) ホップ分岐理論による概算と精密解の比較および計算回数

図4 一機無限大母線系統での適用例

Fig. 4. An example of application in the single-machine infinite bus system

付 録

1. ホップ分岐理論⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁸⁾

次のような N 次元の系を考える。

$$\dot{x} = f(x; \nu), \quad x \in \mathbb{R}^N, \nu \in \mathbb{R} \quad \text{付1)}$$

ここで、 ν はパラメータとし、平衡点の安定性が変化するパラメータの値を $\nu = \nu_c$ とし、 ν_c の近くでは $x = x_*(\nu)$ という平衡点が存在するとする。

また、 $\lambda_i(\nu)$, $i = 1, \dots, N$ を次のヤコビアン行列の固有値とする。

$$J(\nu) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_*(\nu); \nu), i, j = 1, \dots, N \right) \quad \text{付2)}$$

ここで、次の仮定をする。

[仮定] $\nu = \nu_c$ での安定性の変化は、複素共役な固有値の組 $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ によるものとする。ただし、

$$\operatorname{Re} \lambda_1(\nu_c) = 0, \operatorname{Im} \lambda_1(\nu_c) > 0, \quad \text{付3)}$$

$$\frac{d}{d\nu}(\operatorname{Re} \lambda_1(\nu))|_{\nu=\nu_c} \neq 0 \quad \text{付4)}$$

であり、 ν_c の近くの ν に対しては、

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\nu) < 0, i = 3, \dots, N \quad \text{付5)}$$

とする[†]。

この仮定が成り立つとき、 $f(x; \nu)$ が十分滑らかであれば、ホップ分岐定理により、以下のことが成り立つ。

[ホップ分岐定理] $\nu = \nu_c$ の近くでは、 $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ 内に、 $(x_*(\nu_c), \nu_c)$ を通り、 λ_1, λ_2 の固有空間に接する、中心多様体と呼ばれる 3 次元の多様体（注目する 2 次元の状態空間とパラメータ ν の積空間）上に、一連のリミットサイクルが存在する。

このとき、 ν_c の十分近傍では、リミットサイクルの半径を ϵ とすると、パラメータ ν は、文献 [8] に示されているとおり ϵ の偶数次の項のみを用いて、

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_c + \mu(\epsilon) \\ \mu(\epsilon) &= \mu_2 \epsilon^2 + \mu_4 \epsilon^4 + \dots \end{aligned} \quad \text{..... (付 6)}$$

と表すことができる。すなわち、 ν_c の近くでは、 μ_2 の符号により、 ν_c のどちら側にリミットサイクルが存在するかが決まり、以下ようになる。

- $\mu_2 < 0$ のとき $\nu < \nu_c$ で存在
- $\mu_2 > 0$ のとき $\nu > \nu_c$ で存在

また、リミットサイクルの中心多様体上での安定性を表す係数 β は、 ϵ を用いて、

$$\beta(\epsilon) = \beta_2 \epsilon^2 + \beta_4 \epsilon^4 + \dots \quad \text{..... (付 7)}$$

と表すことができる。ここで、 $\beta > 0$ で安定、 $\beta < 0$ で不安定である。したがって、 β_2 の符号により、リミットサイクルの安定性が決まり、以下ようになる。

- $\beta_2 < 0$ であれば安定：スーパークリティカルホップ分岐
- $\beta_2 > 0$ であれば不安定：サブクリティカルホップ分岐

なお、仮定 (付 5) より、中心多様体以外の方向に関しては、リミットサイクルは安定である。

リミットサイクルの周期 T については、

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega_0} (1 + \tau(\epsilon)) \\ \tau(\epsilon) &= \tau_2 \epsilon^2 + \tau_4 \epsilon^4 + \dots \end{aligned} \quad \text{..... (付 8)}$$

と表すことができる。

このように、リミットサイクルの発生、消滅に伴い、平衡点の安定性が変化するような分岐は、ホップ分岐と呼ばれ、 $(x_*(\nu_c), \nu_c)$ はホップ分岐点、 ν_c は分岐値と呼ばれる。

[ホップ分岐公式] まず、 P として、

$$\begin{aligned} P &= (a_1, a_2, \dots, a_N) \\ a_i &\text{は実数表現の固有ベクトル} \end{aligned} \quad \text{..... (付 9)}$$

を用いて、(付 1) 式を次のような実数表現での正準形に座標変換する。

$$\dot{y} = F(y; \mu) \quad \text{..... (付 10)}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \nu - \nu_c, \quad y = P^{-1}(x - x_*), \\ F(y; \mu) &= P^{-1}f(Py + x_*, \nu_c + \mu) \end{aligned} \quad \text{.. (付 11)}$$

ここで、 x_* は平衡点であり、

$$\begin{aligned} \lambda_1(\nu_c + \mu) &= \alpha(\mu) + j\omega(\mu) \\ \lambda_2(\nu_c + \mu) &= \bar{\lambda}_1 = \alpha(\mu) - j\omega(\mu) \quad \text{(付 12)} \\ \alpha(0) &= 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} \neq 0 \end{aligned}$$

である。この系では平衡点は原点となり、分岐点のパラメータは $\mu = 0$ となる。また、ヤコビアン行列は、次のようになる。

$$P^{-1}J(\nu)P = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad \text{.. (付 13)}$$

このとき、 μ_2, β_2, τ_2 は、 $\mu = 0$ ($\nu = \nu_c$) における全ての固有値、固有ベクトル、および、2 次、3 次の偏微分係数行列を用いて計算することができる（具体的な公式については文献 [8] 参照）[†]。ここで、正準形 (付 10) 式の 3 次までの偏微分係数は、もとの式 (付 1) 式の 3 次までの偏微分係数、および、固有ベクトル $a_1, \dots, a_N$ からなる行列 $P = [a_1, \dots, a_N]$ を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_i} &= P^{-1} \frac{\partial f}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f_j}{\partial y_i} &= \sum_p^N a_{ip} \frac{\partial f_j}{\partial x_p} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j} &= P^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} \\ \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_j} &= \sum_{p,q}^N a_{ip} a_{jq} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_p \partial x_q} \\ \frac{\partial^3 F}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} &= P^{-1} \frac{\partial^3 f}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} \\ \frac{\partial^3 f_l}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} &= \sum_{p,q,r}^N a_{ip} a_{jq} a_{kr} \frac{\partial^3 f_l}{\partial x_p \partial x_q \partial x_r} \end{aligned} \quad \text{(付 14)}$$

により求めることができる。ただし、 a_{ip} は固有ベクトル a_i の p 番目の要素。

したがって、4 次以上の項を無視すれば、(付 6)、(付 8) 式を用いることにより、パラメータ値 μ でのリミットサイクルの半径、周期を概算することができる。

なお、このときの半径は、行列 P によって座標変換した系 (付 10) での半径であるので、もとの系 (付 1) では、 $\epsilon a_1, \epsilon a_2$ を軸とする楕円を描くことになる。

2. ローレンツ系における非線形性を考慮した固有空間への座標変換

ローレンツ系 ($\nu = 24$) では、一組の複素固有値 $\alpha + j\omega$ に対応するモード（モード 1 とする）と一つの実数固有値 λ に対するモード（モード 2 とする）がある。

まず、モード 1 に注目すると、(5) 式においては、

$$v_1 = (y_1, y_2)^T, \quad w_1 = y_3, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{bmatrix}, \quad B_1 = \lambda \quad \text{(付 15)}$$

となり、 $v_1 = h_1(w_1)$ に関しては、

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = h_1(y_3) = \begin{bmatrix} h_{11}(y_3) \\ h_{12}(y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{133} y_3^2 \\ c_{233} y_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{(付 16)}$$

[†]ホップ分岐定理は、他の固有値の実部が零でなければ、適用できる。

[†]この公式では、微分不可能な非線形要素については考慮できないため、リミットについては考慮できない。

とおける ((6), (8) 式より $h_1(y_3)$ には 1 次の項は含まれない). (8) 式を 2 次の項までに関して解くことによって 2 次の項の係数 c_{133}, c_{233} を求める. すなわち, y_3^2 の項に関して係数比較をすると, 最終的には次式を解くことになる.

$$\begin{bmatrix} 2\lambda - \alpha & \omega \\ -\omega & 2\lambda - \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{133} \\ c_{233} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{11}}{\partial y_3^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial y_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_3^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_3^2} \end{bmatrix} \quad (\text{付 17})$$

同様に, モード 2 に注目すると, (5) 式においては,

$$v_2 = y_3, w_2 = (y_1, y_2)^T, A_2 = \lambda, B_2 = \begin{bmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{付 18})$$

となり, $v_2 = h_2(w_2)$ に関しては,

$$y_3 = h_2(y_1, y_2) = c_{311}y_1^2 + c_{312}y_1y_2 + c_{322}y_2^2 \quad (\text{付 19})$$

とおける. (8) 式を 2 次の項 (y_1^2, y_1y_2, y_2^2) までに関して解くことによって $c_{311}, c_{312}, c_{322}$ を求める. すなわち, $c_{311}, c_{312}, c_{322}$ は次式を解くことにより与えられる.

$$\begin{bmatrix} 2\alpha - \lambda & \omega & 0 \\ -2\omega & 2\alpha - \lambda & 2\omega \\ 0 & -\omega & 2\alpha - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{311} \\ c_{312} \\ c_{322} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial y_1^2} \\ \frac{\partial^2 V_2}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial y_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_3}{\partial y_1^2} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_3}{\partial y_2^2} \end{bmatrix} \quad (\text{付 20})$$

以上より, 求まった $h_{11}(y_3), h_{12}(y_3), h_2(y_1, y_2)$ を用いて,

$$\begin{aligned} y_1 &= \tilde{y}_1 + h_{11}(\tilde{y}_3) = \tilde{y}_1 + c_{133}\tilde{y}_3^2 \\ y_2 &= \tilde{y}_2 + h_{12}(\tilde{y}_3) = \tilde{y}_2 + c_{233}\tilde{y}_3^2 \\ y_3 &= \tilde{y}_3 + h_2(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \\ &= \tilde{y}_3 + c_{311}\tilde{y}_1^2 + c_{312}\tilde{y}_1\tilde{y}_2 + c_{322}\tilde{y}_2^2 \end{aligned} \quad \dots (\text{付 21})$$

を解くことにより, (y_1, y_2, y_3) から $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3)$ へと座標変換する.

3. 一機無限大母線系統の対象方程式

一機無限大母線系統の例では, 対象とする方程式は,

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega \\ M\dot{\omega} &= \omega_B (P_m - P_e - D\omega/\omega_B) \\ T'_{do}\dot{e}'_q &= E_{fd} - e'_q - (X_d - X'_d)i_d \quad (\text{付 22}) \\ T_1\dot{x} &= G_1(V_{ref} - V_t) - x \\ T_3\dot{y} &= G_2[x + T_2/T_1\{G_1(V_{ref} - V_t) - x\}] - y \\ i_d &= \frac{e'_q - V_0 \cos \delta}{X'_d + X_e}, \quad i_q = \frac{V_0 \sin \delta}{X_q + X_e} \\ e_d &= X_q i_q, \quad e_q = e'_q - X'_d i_d \quad \dots \dots (\text{付 23}) \\ P_e &= e_d i_d + e_q i_q, \quad V_t = \sqrt{e_d^2 + e_q^2} \\ E_{fd} &= E_{fd0} + y \end{aligned}$$

となる. ここで, x, y は AVR の内部状態, V_0 は無限大母線電圧, X_e は線路リアクタンス (その他については, 図 3, 表 1 参照).

天野 博之 (正員) 1973 年 6 月 8 日生. 96 年 3 月 京都大学工学部電気工学科卒業. 98 年 3 月 京都大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了. 同年 4 月 (財) 電力中央研究所入所. 主に, 電力系統における非線形現象, 超電導発電機に関する研究に従事.

熊野 照久 (正員) 1963 年 2 月 4 日生. 90 年 3 月 東京大学大学院工学系研究科電気工学専攻修士課程修了. 工学博士. 同年 (財) 電力中央研究所入所. 94 年 7 月より 95 年 8 月 テキサス大学アーリントン校客員研究員. 98 年 7 月より 2000 年 3 月 超電導発電関連機器・材料技術研究組合出向. 主として電力系統の過渡状態解析および同期機解析に関する研究に従事. IEEE 会員.

井上 俊雄 (正員) 1958 年 2 月 15 日生. 82 年 3 月 早稲田大学工学研究科電気工学専攻修士課程修了. 同年 4 月 (財) 電力中央研究所入所. 現在, 狛江研究所電力システム部上席研究員. 主として, 発電プラントのモデリング・応動解析, 緊急時系統周波数変動解析に関する研究に従事. 平成 8 年電気学会論文賞受賞. 88 年~89 年, 米国テキサス州立大学アーリントン校客員研究員. IEEE 会員.

谷口 治人 (正員) 1950 年 8 月 23 日生. 75 年 京都大学大学院工学研究科電気工学修士課程修了. 同年 (財) 電力中央研究所入所. 80 年~81 年 米国テキサス大学アーリントン校客員研究員. 90 年 系統制御研究室長. 96 年より電力システム部長. 電力系統の計画・運用・制御, 新技術開発に関する研究に従事. CIGRE 会員. 工学博士.