再帰的アルゴリズムを用いた実時間 DFT 位相検出の誤差対策

正員 舟 木 剛 (大阪大学)

終身会員 松 浦 慶 士 (大阪大学)

正員 田 中 俊 輔 (東京電力(株))

Error Correction for Phase Detection by Recursive Algorithm Real Time DFT

Tsuyoshi Funaki, Member, Kenji Matsuura, Life Member (Osaka University), Shunsuke Tanaka, Member (TEPCO)

Discrete Fourier Transform (DFT) can calculate the phase and amplitude of the AC waveform directly from the sampled data. However, high performance microprocessor is inevitable to implement DFT into real time system, especially when conventional calculation algorithm is applied to high frequency sampling. Applying recursive algorithm to the DFT can drastically reduce the calculation amount. This paper studies about the phase detection error of DFT when recursive algorithm is applied. The proposed error correction method makes it possible to guarantee the correctness of detected phase, which is equivalent to the conventional DFT calculation algorithm. Also, this paper proposes the reset scheme of numerical error accumulation, which is unavoidable for the recursive algorithm applied DFT. The proposed method can guarantee high accuracy with minimum increment of calculation amount. The qualitative correctness estimated from the theoretical equations is confirmed through quantitative study by digital simulation.

キーワード：実時間位相検出, DFT, 検出誤差, 周波数検出, 再帰的アルゴリズム, 数値誤差蓄積

1. はじめに

近年 DSP(Digital Signal Processor) 等の高速信号処理用演算素子の発達により, 実時間 DFT(Discrete Fourier Transform: 離散フーリエ変換) 処理による交流電圧の位相検出が広域同期位相計測 (PMU: Phasor Measuring Unit) ^{(1)~(7)} や自励式交直変換器の動作基準位相 ^{(8)~(10)} として用いられている。これまで, 交流電圧に含まれる高調波の位相検出への影響を抑制するために DFT が示す検出ゲインの周波数特性について議論されているが ^{(5)~(6)}, 交流電圧の周波数が変化した場合の位相検出誤差についての議論はされていなかった。この理由として, これまでの DFT による位相検出の主用途が PMU であり, DFT の検出した絶対位相に誤差が含まれていても, 検討対象である測定ノード間の相対位相の誤差が小さくなることが挙げられる。しかし, 交直変換器の動作の基準位相として用いる場合は, 検出した絶対位相に含まれる誤差が変換器出力の変動を引き起こすため, 変換器制御系のロバスト性向上のためにも検出位相の誤差を抑制する必要がある。特に, 近年直流送電の適用が考えられているような, 風力発電等の自然エネルギー発電のための孤立系統では, 出力の不安定性から基幹系統に比べて周波数変動の幅も大きくなるため, これを考

慮した精度の検証が必要である。また, 一般的に用いられている変換器の瞬時電流制御では, 遅れが少ない制御系が必要であり, 制御性能向上のためにも位相検出動作の高周波化が必要となる。

前報 ⁽¹¹⁾ では, 1 サンプル毎にフーリエ係数算出の積和計算を全て行う通常の DFT 計算アルゴリズムを用いた場合について検出位相の誤差評価式を導出し, 検出周波数を用いた誤差補正方法, 補正精度及び三相交流における正相成分の位相検出への適用方法について報告した。通常の DFT 計算アルゴリズムは単純であるが, 計算量が多く, 実時間検出ではサンプリングを高周波化することが難しい。DFT 計算の主要部であるフーリエ係数の積和計算量を飛躍的に削減する方法として, 再帰的アルゴリズムの適用が提案されており ^{(1)~(12)~(13)}, PMU 等で用いられている。本報では, 通常の DFT とは計算アルゴリズムが異なる再帰的アルゴリズムを適用した DFT について検出位相の誤差評価式を導出し, 誤差の極値は再帰的アルゴリズムの計算基準点における交流電圧の位相に依存しないことを示すと共に, 通常の DFT 計算アルゴリズムと同様の誤差が発生することを示す。次に再帰的アルゴリズムを適用した DFT の検出位相に対する, 周波数をパラメータとした誤差補正

方法を提案し、補正に用いる周波数の検出方法を示すと共に、通常の DFT 計算アルゴリズムと同じ補正精度が得られることを示す。

再帰的アルゴリズム固有の問題として、加減算の繰り返しによる数値誤差蓄積の発生があり、これを適当な間隔でリセットする必要がある。本報では、計算増加量及びリセット時の誤差を小さく抑えると共に、設定した周期毎に蓄積誤差のリセット動作を行う方法を提案し、ATP⁽¹⁴⁾を用いた計算機シミュレーションによりその効果を確認した。

2. 実時間 DFT による位相検出

交流電圧の位相検出方法として電圧零クロス点でリセットを行う積分回路を用いる方法、PLL(Phase Locked Loop)を用いる方法、DFTを用いる方法等がある。電圧零クロス点を用いる方法は簡便ではあるが、周波数変化に対応できない、高調波が重畳した場合において零クロス点が前後することによる検出誤差の問題がある。一方 PLL は、周波数引込・位相引込の過程を経て交流電圧に同期し、上述の問題がない。但し得られる位相情報は、閉ループ・フィードバック系の同期回路から得られる値であり、位相検出系が安定かつ精度が得られるような位相比較器・フィルタ等を設計する必要がある。DFTによる位相検出は、交流電圧の位相及び振幅値を離散フーリエ変換により直接求める開ループの系であり、入力が微少時の数値不安定を除いて安定な出力が得られる。但し、DFTは高次の積和演算及び逆正接算出の除算を要し、実時間処理には高速な演算器が必要である。ここでは、DFTによる実時間位相検出について、通常の DFT 計算アルゴリズムを用いる方法及び、再帰的アルゴリズムを用いる方法について述べる。

〈2・1〉通常の DFT 計算アルゴリズム DFTの実時間処理により位相検出を行うシステムは、現在及び過去の入力により出力を算出する因果的なシステム(Casual System)である。つまり、あるサンプル点 k において利用可能な交流電圧のデータサンプルは $v(k), v(k-1), \dots$ となる。サンプリング間隔が $T_s(sec)$ 、交流電圧の基本波 1 周期が N サンプルに相当する場合、サンプル点 k において入力電圧を離散フーリエ変換して得られる基本波成分のフーリエ係数 $(a_1(k), b_1(k))$ は (1) 式で表される。

$$a_1(k) + jb_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi n}{N}} v(k-n) \dots\dots\dots (1)$$

(1) 式において、乗数 $e^{j\frac{2\pi n}{N}}$ は図 1(b) に示すように、フーリエ変換を行うサンプル点 k と乗数の相対的な位置関係は時不変となる。このため (1) 式を用いる通常の DFT 計算アルゴリズムでは、サンプル毎に実・虚分合わせて $2N$ 回の積和計算を行う必要があり、サンプリング周波数が z 倍になると、必要な積和計算回数は $2Nz$ となる。この計算を $\frac{1}{z}$ の時間で処理する必要があるため、 z^2 倍の処理能力を持つ演算装置が必要となる。従って、通常の DFT 計算アルゴリズムではハードウェアの制約により、高速サンプリ

図 1 DFT 乗数のアルゴリズムによる違い
Fig. 1. The Difference of Coefficients for DFT between algorithms

図 2 DFT による位相検出例
Fig. 2. Sample results of DFT phase detection

ングが困難である。図 2(a) に示す交流電圧波形から、(1) 式を用いて検出した位相を図 2(b) に示す。入力電圧及びその周波数に同期して、 $-\pi \sim \pi$ の位相が検出される。

〈2・2〉再帰的アルゴリズムを適用した DFT 再帰的アルゴリズムとは、フーリエ変換を行うサンプル点 k に対して乗数を時変させ、積和計算量の削減を図るためのアルゴリズムであり、サンプル点 k における入力電圧の基本波 1 周期に対するフーリエ係数の算出式として (2) 式を用いる。

$$a_1(k) + jb_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k-n)}{N}} v(k-n) \dots\dots (2)$$

サンプルしたデータ $v(k)$ と乗数 $e^{j\frac{2\pi(k-n)}{N}}$ の関係は、図 1(c) に示すようにサンプル時点 k に対しては時変となるが、乗数とデータの絶対的な位置関係はサンプル点に関わらず時不変となることが分かる。換言すると、通常の DFT 計算アルゴリズムが静止座標上でフーリエ変換処理を行っているのに対して、再帰的アルゴリズムでは角速度 $\frac{2\pi}{NT_s}$ で回転する座標上でフーリエ変換処理を行っていることになる。図 2(a) の交流電圧波形に対して、(2) 式の再帰的アルゴリズムを適用した DFT で検出される位相を図 2(c) に示す。通常の DFT 計算アルゴリズムの場合と異なり、検出される位相変化は入力電圧に同期しない。

再帰的アルゴリズムでは、乗数とサンプルデータの絶対的な位置関係が時不変であることを利用し、積和計算量の削減が可能である。つまり、サンプル点 $k-1$ でのフーリエ係数 $a_1(k-1), b_1(k-1)$ を用いてサンプル点 k でのフーリエ係数を表すと (3) 式のように求まる。

$$\begin{aligned} a_1(k) + jb_1(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k-1-n)}{N}} v(k-1-n) \\ &\quad + e^{j\frac{2\pi k}{N}} v(k) - e^{j\frac{2\pi(k-N)}{N}} v(k-N) \\ &= a_1(k-1) + jb_1(k-1) \\ &\quad + e^{j\frac{2\pi k}{N}} v(k) - e^{j\frac{2\pi(k-N)}{N}} v(k-N) \quad (3) \end{aligned}$$

(3) 式は、現時点でのサンプル値 $v(k)$ に対する積 $e^{j\frac{2\pi k}{N}} v(k)$ と N サンプル前のサンプル値 $v(k-N)$ に対する積 $e^{j\frac{2\pi(k-N)}{N}} v(k-N)$ を、各々 1 サンプル前のフーリエ係数 $a_1(k-1), b_1(k-1)$ に対して加減算することで、現時点でのフーリエ係数 $a_1(k), b_1(k)$ を得ることができることを示している。 $e^{j\frac{2\pi(k-N)}{N}} v(k-N)$ の値は、計算機のメモリ上に残しておくことができるため、新たに行う積算は $e^{j\frac{2\pi k}{N}} v(k)$ しか必要とせず、積和計算を $2N$ 回必要とする通常の DFT における計算アルゴリズムに対して必要とする積和演算量は $\frac{1}{N}$ となる。従って、サンプリング周波数を z 倍した場合でも、必要とする計算機の処理能力は z 倍程度にしかならず、高速サンプリング化においてハードウェアに対する制約が軽減される。

図 3 に DFT を用いた実時間位相検出において、サンプリング周波数に対して必要となる計算機の処理能力を通常の計算アルゴリズムと再帰的アルゴリズムについて比較した結果を示す。算出したフーリエ係数から、逆正接を用いて位相を求める処理については両アルゴリズム間に差は無いものとしており、これに必要な計算処理能力は再帰的アルゴリズムによる DFT 計算と同様にサンプリング周波数に比例して増加する。図より特に高速サンプリング化した場合において、再帰的アルゴリズムは必要とする計算機処理能力の増加が小さく、実用的な方式であることが分かる。

図 3 サンプリング周波数に対する必要な計算機能力のアルゴリズムによる違い

Fig.3. Required CPU Power difference to sampling frequency by algorithms

一方、(3) 式にも現れているように、再帰的アルゴリズムを用いたフーリエ係数の演算は一種の IIR(Infinite Impulse Response) フィルタであり、加減算に伴う数値誤差の蓄積により数値不安定を生じる危険がある。このため、適当な間隔で蓄積した誤差をリセットする必要がある、この方法については後で議論する。一方、通常の DFT におけるフーリエ係数の計算アルゴリズムは FIR (Finite Impulse Response) フィルタであり、サンプリング毎に積和計算をやり直すため数値誤差蓄積は発生しない。

3. 再帰的アルゴリズムによる DFT の位相検出誤差

本章では、再帰的アルゴリズムを適用した DFT での位相検出誤差に及ぼす交流電圧の周波数の影響について、誤差評価式を導出し、解析的に評価を行う。再帰的アルゴリズムを用いた場合、数値誤差蓄積を解消するために適当な間隔で DFT 計算をリセットする必要がある。従来、タイミングの取りやすさから電圧零クロス点でのリセットが提案されていたが、リセット点の最適性について評価されていない。ここでは、検出誤差抑制の点から、これを小さくするための DFT 計算のリセット点についても検討する。前報⁽¹¹⁾の通常の DFT 計算アルゴリズムに対する解析と同様に、サンプリングが細かい離散時間系での積和計算を、積分計算と等価と見なし、解析を行う。

〈3・1〉位相検出誤差評価式の導出 入力交流電圧 $v(t)$ を (4) 式に示す振幅 V 、角速度 ω' の正弦波とする。

$$v(t) = V \sin(\omega' t + \theta) \dots\dots\dots (4)$$

再帰的アルゴリズムを用いた DFT と等価なフーリエ変換から得られる基本波成分の電圧ベクトル $\bar{V}_1(t)$ は、(5) 式のように表される。

$$\bar{V}_1(t) = \int_{\omega t - 2\pi}^{\omega t} e^{j\omega\tau} v(\tau) d\omega\tau \dots\dots\dots (5)$$

(4),(5) 式より $\bar{V}_1(t)$ のフーリエ係数を求めると (6) 式のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{V}_1(t) &= \int_{\omega t - 2\pi}^{\omega t} e^{j\omega\tau} V \sin(\omega'\tau + \theta) d\omega\tau \\ &= l\{YZ - xXW - j[YW + xXZ]\} \dots\dots (6) \end{aligned}$$

但し, $x = \frac{\omega'}{\omega}$, ω :DFT 設計角周波数, $l = \frac{2\sin[\pi(x+1)]}{x^2-1}$, $X = \sin[(\omega t + \pi)x + \theta]$, $Y = \cos[(\omega t + \pi)x + \theta]$, $Z = \sin(\omega t)$, $W = \cos(\omega t)$ とする。

〈3・1・1〉 $\omega' = \omega$ の時 交流電圧周波数が DFT 設計周波数と一致する ($\omega' = \omega$) 時, (6) 式をまとめると (7) 式が得られる。

$$\bar{V}_1(t) = V\pi(\sin\theta + j\cos\theta) \quad \dots\dots\dots (7)$$

(7) 式から $\bar{V}_1$ の位相角を求めると (8) 式となる。つまり, 再帰的アルゴリズムを用いた DFT では, 角速度 ω で回転する座標上で静止した位相角 θ が求まることが分かる。

$$\arctan\left(\frac{\text{Re}[\bar{V}_1]}{\text{Im}[\bar{V}_1]}\right) = \arctan\left(\frac{V\pi\sin\theta}{V\pi\cos\theta}\right) = \theta \quad (8)$$

〈3・1・2〉 $\omega' \neq \omega$ の時 交流電圧周波数が DFT 設計周波数と一致しない ($\omega' \neq \omega$) 時, (6) 式より得られる $\bar{V}_1$ の位相角 θ' は (9) 式となる。

$$\tan\theta' = \frac{\text{Re}[\bar{V}_1]}{\text{Im}[\bar{V}_1]} = \frac{l\{YZ - xXW\}}{l\{-YW - xXZ\}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

DFT 計算を開始する基準点 $t = 0$ での位相を θ とすると, 時間 t における位相角は, 角速度 ω で回転する座標系に対して位相が $(\omega' - \omega)t$ 進む。この角速度差による進角 (遅角) の大きさを用いて, (9) 式で得られる位相の検出誤差を求めると (10) 式となる。

$$\begin{aligned} \theta_{err} &= \theta' - \{\theta + (\omega' - \omega)t\} \\ &= \arctan \frac{\text{Re}[\bar{V}_1] \cos\gamma - \text{Im}[\bar{V}_1] \sin\gamma}{\text{Im}[\bar{V}_1] \cos\gamma + \text{Re}[\bar{V}_1] \sin\gamma} \\ &= \arctan \frac{-(x-1)\sin[2(\omega t x + \theta) + \pi x] - (x+1)\sin(\pi x)}{(x-1)\cos[2(\omega t x + \theta) + \pi x] - (x+1)\cos(\pi x)} \\ &\quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

但し, $\gamma = \theta + \omega t(x-1)$ とする。

$\frac{d}{dt}\theta_{err} = 0$ となる時, つまり $\cos[2(\omega t x + \theta) + \pi x] = \frac{x-1}{x+1}$ を満たす t において, 位相の検出誤差は極値をとる。検出誤差の極値を求めると (11) 式となる。

$$\theta_{err-Max} = \arctan \frac{2\sqrt{x}\sin(\pi x) \pm (x-1)\cos(\pi x)}{2\sqrt{x}\cos(\pi x) \mp (x-1)\sin(\pi x)} \quad (11)$$

(11) 式は, 前報⁽¹¹⁾で導出した通常の DFT 計算アルゴリズムを用いた場合の検出誤差の極値に一致し, 両アルゴリズム間での検出誤差の極値の大きさに差が無いことが明らかになった。つまり, 通常の DFT 計算アルゴリズムでは, 極値をとる位相 θ が周波数の関数として決まるのに対して, 再帰的アルゴリズムを適用した DFT では, θ が変わっても極値をとる時刻が変わるだけとなる。従って, フーリエ係数における数値誤差蓄積のリセットタイミングは電圧零クロス点にこだわる必要は無く, 任意の点で数値誤差蓄積をリセットして, 新たな DFT 計算基準点としても検出誤差に全く影響しない。

〈3・2〉 位相誤差の補正方法 (9) 式に示した, 再帰的アルゴリズムを適用した DFT から算出されるフーリエ係数の実部と虚部を各々(12) 式に示す。

$$\begin{cases} \text{Re}[\bar{V}_1] = l(YZ - xXW) \\ \text{Im}[\bar{V}_1] = l(-YW - xXZ) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここでは, 算出した実・虚部より位相の正しい値を求める方法について議論する。前報⁽¹¹⁾では通常の DFT 計算アルゴリズムにおいて, 入力電圧の周波数を用いて位相の検出誤差の補正が可能であることを示した。本報では, 再帰的アルゴリズムを適用した DFT における検出位相の誤差補正にも入力電圧の周波数を用いることを考える。まず, 位相 θ の正しい値を求めるため, (12) 式を X, Y について解く。

$$\begin{cases} X = \frac{-\text{Re}[\bar{V}_1]W - \text{Im}[\bar{V}_1]Z}{l} \\ Y = \frac{\text{Re}[\bar{V}_1]Z - \text{Im}[\bar{V}_1]W}{l} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (13)$$

X, Y より θ に関する正接が (14) 式のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{X}{Y} &= \frac{\sin[(\omega t + \pi)x + \theta]}{\cos[(\omega t + \pi)x + \theta]} = \tan[(\omega t + \pi)x + \theta] \\ &= \frac{-\text{Re}[\bar{V}_1]W - \text{Im}[\bar{V}_1]Z}{x(\text{Re}[\bar{V}_1]Z - \text{Im}[\bar{V}_1]W)} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

よって, θ は (15) 式より求めることができる。

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan \frac{-\text{Re}[\bar{V}_1]W - \text{Im}[\bar{V}_1]Z}{x(\text{Re}[\bar{V}_1]Z - \text{Im}[\bar{V}_1]W)} - (\omega t + \pi)x \\ &= \arctan \frac{\text{Re}[\bar{V}_1]\cos(\omega t) + \text{Im}[\bar{V}_1]\sin(\omega t)}{-x\{\text{Re}[\bar{V}_1]\sin(\omega t) - \text{Im}[\bar{V}_1]\cos(\omega t)\}} \\ &\quad - \omega t x - \pi(x-1) \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

(15) 式は, 周波数パラメータ x 及び DFT の計算基準点からの時変パラメータ $\omega t, \sin(\omega t), \cos(\omega t)$ を含んでおり, これらの値を用いることで DFT 計算より得られた値から正しい θ を算出可能であることが判る。但し右辺第二項については, 補正に用いる周波数 x の誤差が及ぼす影響が t に比例して増加する問題が残る。

さて, 再帰的アルゴリズムを用いた DFT で求めた位相 θ は, 回転座標系から見た位相である。静止座標系で見た絶対位相 θ_{abs} を求めるには, 回転座標軸の回転角度, つまり時刻 t における基準点からの回転角度 $\omega' t (= \omega t x)$ を加算する必要がある。従って, 補正により得られる絶対位相は (16) 式となり, 絶対位相へ換算した場合には t に比例して増加する誤差は相殺される。

$$\begin{aligned} \theta_{abs} &= \theta + \omega t x \\ &= \arctan \frac{\text{Re}[\bar{V}_1]\cos(\omega t) + \text{Im}[\bar{V}_1]\sin(\omega t)}{-x\{\text{Re}[\bar{V}_1]\sin(\omega t) - \text{Im}[\bar{V}_1]\cos(\omega t)\}} \\ &\quad - \pi(x-1) \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで, 補正用の周波数が検出位相を用いて求めた誤差を含むものとした場合, 補正用周波数と DFT 設計周波数の比を x'' として (16) 式の $\bar{V}_1$ に (6) 式で得られたフーリ

エ係数を代入すると、補正により得られる絶対位相 θ''_{abs} は (17) 式となる。

$$\theta''_{abs} = \arctan \frac{x \sin(\omega t x + \pi(x-1) + \theta)}{x'' \cos(\omega t x + \pi(x-1) + \theta)} - \pi(x''-1) \quad (17)$$

ここで、補正用周波数の誤差が及ぼす絶対位相の補正誤差 $\theta_{abs-err}$ を求めると、(18) 式のようにになる。

$$\begin{aligned} \theta_{abs-err} &= \theta''_{abs} - (\theta + \omega t x) \\ &= \arctan \frac{x_p \sin[\pi x_n] + x_n \sin[2(\omega t x + \theta) + \pi x_p]}{x_p \cos[\pi x_n] + x_n \cos[2(\omega t x + \theta) + \pi x_p]} \quad (18) \end{aligned}$$

但し、 $x_p = x'' + x$, $x_n = x'' - x$ とする。

補正誤差 $\theta_{abs-err}$ が極値をとる時 $\frac{d}{dt} \theta_{abs-err} = 0$ となる。(18) 式より、これが成り立つ条件を求めると次式のようにになる。

$$\cos[\omega t x + \theta + \pi x] = \pm \sqrt{\frac{x}{x'' + x}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

(19) 式は、極値をとる t が位相角 θ によって異なることを示している。(19) 式を (18) 式に代入して補正誤差の極値を求めると (20) 式となる。

$$\theta_{abs-err-Max} = \pi(x'' - x) \pm \arctan \frac{x'' - x}{2\sqrt{x''x}} \quad \dots\dots (20)$$

(20) 式から、極値をとる t が θ によって変化しても、補正誤差の極値は変化しないことがわかる。また、極値をとる点は異なるものの、補正誤差の極値は通常の DFT 計算アルゴリズムでの位相の補正誤差と等しい値となる。従って、絶対位相の補正後の誤差は、入力電圧の周波数に関わらず補正用周波数の誤差にほぼ比例する。次章では、再帰的アルゴリズムを適用した DFT での周波数検出法および、その誤差について検討する。

4. 周波数検出及び誤差特性

再帰的アルゴリズムを適用した DFT で求まる位相は、角速度 ω で回転する座標上での位相である。従って、入力電圧の周波数が設計周波数と一致する場合 ($\omega' = \omega$)、算出された位相角は一定であり回転座標上で静止するが、 $\omega' \neq \omega$ の場合、位相は $\omega' - \omega$ の角速度で回転座標上を回転する。この角速度差を検出し、設計周波数に加算することで入力電圧の周波数を求めることを考える。

〈4・1〉 検出位相を用いた周波数の検出法 周波数を位相角の時間変化量である角速度で考えた場合、時間間隔 mT_s ($m = 1, 2, \dots$) の二点で再帰的アルゴリズムによる DFT から求まる位相角 $\theta(t), \theta(t - mT_s)$ と、入力電圧の角速度の設計値からの差 $\omega' - \omega$ の間には (21) 式の関係がある。

$$\theta(t) - \theta(t_m) = (\omega' - \omega)mT_s \quad \dots\dots\dots (21)$$

但し、 $t_m = t - mT_s$ 、位相角の差分をとる時間間隔 mT_s において、周波数は一定とする。

従って、周波数 f' は (22) 式に従って検出できる。

$$f' = f + \Delta f = f + \frac{\omega' - \omega}{2\pi} = f + \frac{\theta(t) - \theta(t_m)}{2\pi m T_s} \quad \dots\dots\dots (22)$$

一方、前章で議論したように入力電圧の周波数が設計周波数と異なる場合は DFT で算出される位相角 θ' には誤差が含まれる。ここでは、検出位相の誤差に伴う周波数の検出誤差について検討する。(9), (21) 式より検出周波数の誤差 Δf_{err} を求めると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \Delta f_{err} &= \frac{1}{2\pi m T_s} [\theta'(t) - \theta'(t_m) - (\omega' - \omega)mT_s] \\ &= \frac{1}{2\pi m T_s} \left[\arctan \frac{l\{Y(t)Z(t) - xX(t)W(t)\}}{l\{-Y(t)W(t) - xX(t)Z(t)\}} \right. \\ &\quad \left. - \arctan \frac{l\{Y(t_m)Z(t_m) - xX(t_m)W(t_m)\}}{l\{-Y(t_m)W(t_m) - xX(t_m)Z(t_m)\}} \right] - \frac{\omega}{2\pi} (x-1) \\ &= \frac{fN}{2\pi m} \arctan \frac{-(x-1)^2 \sin 2M + 2(x^2-1) \sin M \cos(\sigma-M)}{(x+1)^2 + (x-1)^2 \cos 2M - 2(x^2-1) \cos M \cos(\sigma-M)} \quad (23) \end{aligned}$$

但し、 $M = 2\pi x \frac{m}{N}$, $\sigma = 2[(\omega t + \pi)x + \theta]$ とする。

ここで、検出周波数の誤差の極値を求める。(23) 式が極値をとる時、 $\frac{d}{dt} \Delta f_{err} = 0$ となる。これは、(24) 式に示す t に対して成り立つ。

$$t = \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{x} \left\{ \frac{n\pi}{2} + \frac{m}{N} \pi x - \theta \right\} - \pi \right] \quad \dots\dots\dots (24)$$

但し、 $n = 1, 2, \dots$ 。

これより周波数検出誤差の極値は (25) 式となる。

$$\begin{aligned} f_{err-Max} &= \frac{1}{2\pi m T_s} \arctan \frac{2(x-1) \sin(2\pi x \frac{m}{N}) \{1-x\} \cos(2\pi x \frac{m}{N}) \pm (x+1)}{(x-1)^2 \cos(4\pi x \frac{m}{N}) \mp 2(x^2-1) \cos(2\pi x \frac{m}{N}) + (x+1)^2} \quad (25) \end{aligned}$$

(24) 式より、極値をとる t の値は基準点における位相 θ の値によって変化するが、(25) 式で得られる極値は通常の DFT 計算アルゴリズムの場合と等しいことが分かる。つまり、再帰的アルゴリズムを適用した DFT で検出した位相から入力電圧の周波数を求めた場合、通常の DFT 計算アルゴリズムに対して誤差の発生タイミングは異なるが、同じ精度で周波数検出が可能である。

(25) 式に示した周波数の検出誤差は、 $\sin(2\pi x \frac{m}{N}) = 0$ 又は $\cos(2\pi x \frac{m}{N}) = \pm \frac{x+1}{x-1}$ を満たす m で最小となる。解の存在条件より $\sin(2\pi x \frac{m}{N}) = 0$ の時、つまり (26) 式に示す m に対して周波数の検出誤差は最小となる。

$$m = h \frac{N}{2x} \quad \dots\dots\dots (26)$$

但し、 $h = 1, 2, 3, \dots$ 。

ここで m は整数であり、(26) 式の解が整数となる時、周波数の検出誤差は 0 になるが、現実的には周波数によって x が変化するため解が整数とならない。前報⁽¹¹⁾ では $T_s = 100\mu\text{sec}$, $N = 167$ の通常の計算アルゴリズムによる DFT において、 $60 \pm 5\text{Hz}$ の入力電圧に対して、周波数の

検出精度を誤差 $\pm 0.25\text{Hz}$ 以内に抑えるには、位相の差分間隔が半周期に相当する $m = 83 (h = 1)$ で可能であることを示した。これよりさらに高精度の周波数検出が必要な場合は、 m の値を大きくして (26) 式右辺との差が小さくなるような適当な m, h の組み合わせを選ぶか、(25) 式における逆正接の乗数を小さくする必要がある。前者の方式では h の値が大きくなると、(26) 式の x に対する感度が高くなるため、最適な m の値が周波数変化に対して大きく変化する。従って、大きな m の値を使用する場合は、後者の乗数が小さくなる効果を利用することになる。図 4 に (25) 式で得られる周波数の検出誤差の最大値を、周波数検出に用いる位相の差分間隔に対して求めたものを示す。入力電圧の周波数として 60, 59, 61Hz を選んだ。なお横軸は、差分間隔を交流の基本波に対する周期数で表しているため、 m に換算する場合は $N (=167)$ 倍する必要がある。整数 m と、(26) 式右辺との差が小さくなる場合は、周波数の検出誤差が小さくなるため、図 4(a)(b)(c) 共に整数 h に応じて、差分間隔が半周期毎に誤差の極小となる。また、差分間隔が大きくなるに従い乗数が小さくなるため、検出周波数誤差の最大値が小さくなっている。DFT の設計周波数である $59.88 \dots \text{Hz}$ に近い 60Hz に対しては、差分間隔が 20 周期で誤差の最大値は 10^{-3}Hz 程度にまで抑制されている。59Hz, 61Hz に対しては、同じ差分間隔 20 周期で 10^{-2}Hz 程度の精度が保証できることが分かる。

PLL では、位相・周波数の検出精度を得るために、位相比較器と VCO (Voltage Controlled Oscillator, 発振周波数が入力電圧により制御される。) との間に LPF (Low Pass Filter, 低域通過フィルタ, ループ・フィルタと呼ぶこともある。位相比較器で発生する高周波成分を除去する。) を用いるが、LPF の設計が PLL の安定性に大きく影響する。DFT の場合も、(23) 式に示した入力電圧の 2 倍周波数で変動する周波数の検出誤差に対して、 $m = 83$ では -25dB 、 $m = 3340$ では -10dB の減衰が得られる LPF を使用することで、PLL と同等の mHz オーダにまで周波数の検出精度を上げることが可能である。また、DFT の検出自体は開ループ構成であるため、LPF の設計において検出系の安定性の問題は生じない。

ここで、DFT より得られる位相は逆正接を使って求めるため、 $\pm \pi$ の範囲で値をとる。同様に、周波数偏差を算出する (21) 式も算出できる位相差は $\pm \pi$ の範囲であり、取得可能な位相差の範囲から決まる検出可能な周波数偏差 Δf は (27) 式となる。

$$|\Delta f| \leq \frac{1}{2mT_s} \approx \frac{30N}{m} \dots\dots\dots (27)$$

図 5 に差分間隔に対する検出可能な周波数の上・下限を示す。つまり、 $m = 83$ では $60 \pm 60\text{Hz}$ の周波数が検出可能であるが、(25) 式の誤差を小さくするために m を大きくした場合は、検出可能な周波数の範囲が小さくなる。差分間隔が 20 サイクル ($m = 3340$) では、 $60 \pm 1.5\text{Hz}$ 、60 サ

図 4 周波数の検出精度

Fig. 4. Sample results of DFT phase detection

図 5 検出可能な周波数の範囲

Fig. 5. Detectable frequency range

イクルでは $60 \pm 0.5\text{Hz}$ が検出可能な周波数の範囲となる。従って、検出対象とする周波数の範囲に適した m の値を選ぶ必要がある。

5. 数値誤差蓄積のリセット方法

ここで、交流電圧基本波 i 周期に対して DFT による位相検出を行うことを考える。再帰的アルゴリズムを適用した DFT では、前サンプル時点のフーリエ係数に対して、新たにサンプルしたデータと乗数との積と、 iN サンプル前に求めた積算結果を各々加減算することにより、現サンプルに対するフーリエ係数の値を得る。加減算を繰り返すことで数値誤差が蓄積するため、適当な間隔でこれをリセットする必要がある。特に固定小数点や仮数部のビット数の少ない浮動小数点のプロセッサを使用する場合、入力信号に重畳されたノイズが大きい場合及び、DFT 計算を行う交流電圧基本波の周期数 i が大きい場合には不可欠となる。ここでは、この数値誤差蓄積のリセット方法について検討する。

3 章において、再帰的アルゴリズムを適用した DFT による位相検出に対し、DFT 計算の基準点での交流電圧の位相は、検出誤差の発生に対して時間軸上では影響するが、誤差の極値に対しては影響しないことを示した。また、周波

図6 数値誤差蓄積リセット機能を付加した再帰的アルゴリズムによるDFT処理手順

Fig. 6. Flow chart of recursive algorithm DFT with reset logic for numerical error accumulation

数を用いた検出位相の誤差補正及び、検出位相を用いた周波数の検出に対しても影響を及ぼさない。従って、検出誤差への影響無しにDFT計算の基準点として任意の時点を用いることが出来るため、本報ではDFTの動作を基準とした数値誤差蓄積のリセットアルゴリズムを提案する。但し、リセット時には新たなフーリエ係数を用意する必要があるが、これを容易にするためDFTの処理サイクルに同期したリセット周期を設定することを考えた。

図6に提案するリセットアルゴリズムを組み込んだ、 i 周期の交流電圧に対する再帰的アルゴリズムによるDFT処理のフローチャートを示す。図中の k は、サンプル点を示すサンプリング毎に1増えるカウンタであり、値は $0 \sim iN-1$ をとる。 $k = iN-1$ となった時、 i 周期に一回のリセット動作を行う。リセット動作のために、各サンプリング毎にリセット用の位相情報のためのデータ X_{res} に、サンプルデータ v と乗数 $e^{j2\pi k/N}$ の積 X_{now} を加算しており、リセット時にその時点までのDFT算出結果 X_1 と入れ替え、 X_{res} の方は0クリアする構成となっている。リセット動作のために各サンプルに対して新たに必要となる処理は、 $X_{res} = X_{res} + X_{now}$ の部分だけであり、処理の増加量は非常に少ない。なお、 $k = iN-1$ の条件判断と $k = iN$ の条件判断を一方にまとめることは可能であるが、処理の流れを分かりやすくするため両者を分離して表示している。

上記の方法を用いることにより、電圧零クロス点検出等を用いなくても容易に数値誤差蓄積のリセットが可能となる。図3に、提案した数値誤差蓄積リセットアルゴリズムを組み込んだ場合に必要となる計算機の処理能力をあわせて示す。高速サンプリング化した場合でも、リセット動作に関わる計算増加量は小さく抑えられることが分かる。一

図7 誤差補正結果及び検出周波数

Fig. 7. Error corrected phase and detected frequency

方、零クロス点等のタイミングを用いてリセットを行う場合、リセット間隔が一定になる保証が無いため提案手法が使用できない。従って、リセット時には、 iN 回の積和計算を行い、その時点の正確な位相を求めなおす必要があるために、ピークの計算機処理能力は通常のDFT計算アルゴリズムと同等になり、再帰的アルゴリズムを適用する利点が小さくなる。換言すれば、提案リセット方式は、リセットに要する演算を各サンプリング時に均等に配分させる方式であり、再帰的アルゴリズムによるDFTに適した方式であるといえる。

6. 位相検出誤差の数値解析

本章では、再帰的アルゴリズムを適用したDFTによる位相検出に対して、第5章で示した数値誤差蓄積のリセット、検出位相を用いた周波数検出、周波数を用いた検出位相の誤

図 8 DFT の誤差評価ブロック
Fig. 8. DFT error estimation block

差補正を適用し、検出を行う。DFT は $T_s = 100\mu\text{sec}$, $N = 167$ (設計周波数 59.88...Hz) の基本波 1 サイクル ($i = 1$) に対する DFT 計算を行う設計とした。図 7(a) に、位相検出を行う対象である入力として用いた 60, 61, 59Hz の交流電圧波形を示す。図 7(b) は、再帰的アルゴリズムによる DFT の算出結果として得られた位相であり、入力電圧とは非同期で変化する。入力電圧の周波数が設計周波数より高い場合は、時間の経過と共に位相が進み、逆に低い場合は遅れる。

図 7(c) は、数値誤差リセット時点を基準にして ($t = 0$), $\theta + \omega t$ により絶対位相を求めたものである。なお実時間位相検出した場合は、算出結果が反映されるのは次のサンプル時点となる。このため、算出結果は 1 サンプル角度を進める補償を行っている。図 7(d) は、求めた絶対位相について図 8 の誤差評価ブロックで誤差を求めた結果である。交流電圧の周波数が設計値から離れるに従い、検出位相の誤差は (10) 式に従って増大することが分かる。図 7(e)(g) は、DFT の検出位相の時間差分により入力電圧の周波数を求めたものであり、差分間隔は各々 $m = 83, 3340$ (20 サイクル) となっている。前章でも述べたように、検出位相を用いて周波数を算出した場合、DFT の設計値からの周波数偏差が大きくなるに従い、検出周波数の誤差も大きくなる。この誤差も、59Hz に対し $m = 83$ では $\pm 0.02\text{Hz}$ 程度であるが、 $m = 3340$ (20 サイクル) とすることで $\pm 0.006\text{Hz}$ と約 3 倍の精度向上となる。 m が 40 倍になったのに対し、精度が 3 倍程度しか向上していないのは、 $m = 83$ は (24) 式に対して誤差の大きさが小さくなるような周波数の検出誤差の節の部分に近かったものが、 $m = 3340$ では腹の部分となる最大誤差に近くなっているためである。これは、図 4(b) で、差分間隔が 20 サイクル付近での周波数の最大検出誤差が $\pm 0.008\text{Hz}$ 程度であることから分かる。

これらの検出周波数を用いて、検出位相を補正し、補正した位相について図 8 の誤差評価ブロックを用いて誤差評価を行った結果が図 7(f)(h) である。但し、 $\theta_{err} = \theta' - \theta$ として直接計算した場合、算出値は $\theta_{err} \pm 2n\pi$ ($n = 0, 1$) となるため、三角関数演算により $2n\pi$ を消去している。

図 7(f) では、61Hz に比べ 59Hz の方が検出誤差が大きくなっている。これは $N = 167$ に対して、 $m = 83$ としたため 61Hz の方が周波数の検出誤差が小さくなるだけでなく、周波数の誤差の発生位相と、位相の補正誤差の発生位相が誤差を相殺するような逆相の関係に近くなっているた

めである。逆に図 7(h) では、59Hz の方が周波数の誤差は大きいにも関わらず、位相の検出誤差は小さくなっている。これは、 $m = 3340$ に対して 61Hz での周波数の誤差の発生位相と、補正誤差の発生位相が同相の関係に近くなり重畳し、結果として検出誤差が小さくならないためである。

以上に示したように、再帰的アルゴリズムを適用した DFT の計算結果より高精度の周波数検出が行え、これを用いて検出位相を絶対位相に変換した際の誤差補正が可能であることが数値解析でも確認された。本数値解析は、倍精度浮動小数点演算で行ったが、現時点において 64bit 倍精度演算が行える DSP (TI 製, C64x, 600MHz, 4800MIPS) が利用可能であるため、十分実現可能な結果である。

7. む す び

再帰的アルゴリズムにより、DFT 計算に要する計算量は激減する。一方、得られた位相は通常の DFT 計算アルゴリズムで得られる絶対位相ではなく、DFT の設計周波数で回転する座標系に対する位相となるため、絶対位相を得るには変換を要する。本報では、再帰的アルゴリズムの DFT から得られる位相の検出誤差について、交流電圧の周波数との関係を明らかにすると共に誤差評価式を導出した。また検出位相を絶対位相に変換する際に、交流電圧の周波数を変数とした補正演算を提案式を用いて行うことにより、位相の誤差補正が可能となった。再帰的アルゴリズムの DFT で検出される位相は、交流電圧周波数と DFT 設計周波数の差の周波数で回転する。この性質を利用し、交流電圧周波数と DFT 設計周波数の差を DFT 検出位相の時間差分により算出し、設計周波数に加算することで入力電圧の周波数を求め、位相の誤差補正に用いる。補正に用いる周波数に誤差が含まれていなければ、補正した位相にも誤差は含まれない。しかし、検出位相には誤差が含まれているため、得られる周波数も誤差を含んでいる。そこで、検出周波数の誤差を定量的に評価可能な誤差評価式を導出した。導出した式によると差分間隔を大きくすることで、周波数の検出誤差を小さくすることができるが、一方で検出可能な周波数の範囲も狭くなるため、対象とする周波数と精度に応じて適当な差分間隔を選定する必要がある。

再帰的アルゴリズム固有の問題として、フーリエ係数への数値誤差蓄積があり、適当な間隔でこれをリセットする必要があるが、誤差評価の結果より、任意の点でリセットを行っても検出誤差及び補正誤差の極値に対して影響しないことを明らかにした。この結果に基づき、精度を損なわず DFT の計算量増加を最小限に抑えるリセット方式を提案し、デジタルシミュレーションにより誤差補正と協調して動作可能であることを示した。

提案方式により、高速サンプリングで動作する DFT による高精度位相検出の実現が可能である。

(平成 12 年 11 月 10 日受付, 同 13 年 3 月 28 日再受付)

文 献

- (1) A.G.Phadke et.al.: "A New Measurement Technique for Tracking Voltage Phasors, Local System Frequency, and Rate of Change of Frequency", IEEE Trans. on. PAS, Vol.102, No.5, pp.1025-1038(1983)
- (2) R.O.Burnett Jr, et.al.: "Synchronized phasor measurements of a power system event", IEEE Trans. on. PS, Vol.9, No.3, pp.1643-1650(1994)
- (3) S.E.Stanton, et.al.: "Application of phasor measurements and partial energy analysis in stabilizing large disturbances", IEEE Trans. on. PS, Vol.10, No.1, pp.297-306(1995)
- (4) D.N.Kosterev, et.al.: "Feasibility study of using synchronized phasor measurements for generator dropping controls in the colstrip system", IEEE Trans. on. PS, Vol.13, No.3, pp.755-761(1998)
- (5) Jose A. de la O, et.al.: "A new digital filter for phasor computation part I:theory", IEEE Trans. on. PS, Vol.13, No.3, pp.1026-1031(1998)
- (6) Jose A. de la O, et.al.: "A new digital filter for phasor computation part II:Evaluation", IEEE Trans. on. PS, Vol.13, No.3, pp.1032-1037(1998)
- (7) 大田他: "DSP と GPS を用いた多地点同期フェーズ計測システムの開発", 電技研資, PE99-41, (1999)
- (8) 杉浦他: "フーリエ変換を用いた変換器制御方式", 平 9 電学全大, No.822, (1997)
- (9) 小川他: "系統連系用電力変換器の位相検出方式", 平 10 電学 B 大, 論文 II-231, (1998)
- (10) 田中他: "自動式直流送電システムの低圧系統適用時の運転制御方式と特性の検討", 系技研資, PSE00-1, (2000)
- (11) 舟木他: "DFT 実時間位相検出の誤差評価と補正法", 電学論 B, Vol.120, No.12, pp.1682-1690 (2000)
- (12) 宅野他: "連続 DFT アルゴリズムを用いた高調波スペクトルのリアルタイム解析", 電技研資, PE97-43, (1997)
- (13) 宅野他: "DFT の再帰的アルゴリズムによる電力高調波のアクティブフィルタリング", 平 10 電学全大, No.820, (1998)
- (14) 雨谷編: "電力システムのパソコンシミュレーション", OHM9 月別冊 (1998)

田 中 俊 輔 (正員) 1963 年 9 月 2 日生。1986 年 3 月東京大学工学部電気工学科卒業。同年 4 月東京電力(株)入社。現在、同社電力技術研究所にて、主として直流送電システム・交直変換器を含む電力システムの解析および交流系統への影響評価に関する研究に従事。

舟 木 剛 (正員) 昭和 44 年 2 月 12 日生。平成 5 年 3 月大阪大学大学院工学研究科博士前期課程修了。平成 5 年 4 月同大学院博士後期課程入学。平成 6 年大阪大学工学部電気工学科助手、平成 13 年同講師。博士(工学)。主に直流送電とパワーエレクトロニクス応用に関する研究に従事。IEEE, 電子情報通信学会, 日本大気電気学会, パワーエレクトロニクス研究会会員。

松 浦 虔 士 (終身会員) 昭和 13 年 1 月 1 日生。昭和 37 年 3 月大阪大学大学院工学研究科博士前期課程修了。同年 4 月住友電気工業(株)入社。昭和 52 年 1 月大阪大学工学部電気工学科助教授。昭和 63 年 3 月同教授。平成 13 年 4 月大阪大学名誉教授。工学博士。電気エネルギーの発生・伝送・変換・制御に関する研究・教育に従事。エネルギー・資源学会会員。