静電ワブルモータの解析

正員 園部 忠* 正員 藤田 博之**

Analysis of an Electrostatic Wobble Motor

Tadashi Sonobe*, Member, Hiroyuki Fujita**, Member

Analysis of an electrostatic wobble motor is first strictly done by conformal mapping, especially by image method. Capacitances and torques calculated theoretically are in very good agreement with those calculated by FEM simulation, ANSYS, whose relative errors are within 1 %. Then, the effectiveness of detection of commutation timing is suggested by some numerical experiment based on this proposed analysis.

キーワード：ワブルモータ，二次元モデル，等角写像，影像法，リーマン球，FEM シミュレーション，転流タイミング

Keywords: Wobble motor, Two-dimensional model, Conformal mapping, Image method, Riemann's sphere, FEM simulation, Commutation timing

1. まえがき

本稿では⁽¹⁾，MEMS でも製作されシンプルでありながら減速機構を有する静電ワブルモータに対し，2次元モデルとして等角写像（影像法）を用い，キャパシタンスおよびトルクの厳密なる解析を行う。次にこの解析と ANSYS での FEM シミュレーションによる結果とを比較する。1%以内で良く一致し，本稿による理論解析の妥当性が確かめられる。これに基づき，ステータ電極励磁方式と関連してトルク特性改善法が示唆される。従来のようなタイミングでステータへの転流を行うとロータのトルクが瞬時零まで落ちてしまうことがある。このようなとき転流タイミングを変えることで，トルクの増大およびトルクリブルの低減が可能となる。このことを本解析による数値実験で定量的に確認する。

2. ワブルモータの解析

MEMS によるワブルモータにおいてトルクの増大を図るといっても，トルク計測・回転数（含む）測定は困難である。きちんとした解析例もあまりなく⁽²⁾，挙動把握がいまひとつ不十分である。発生トルク等を理論的に把握しておかないと，形状・方式の最適設計もおぼつかない。こ

うした背景をもとに，まずはワブルモータのつくるキャパシタンスおよびトルク等を厳密に理論考察し，その挙動把握を行う。なお，ワブルモータ軸方向の構造は均一で，軸方向長さはロータ・ステータのギャップ長に比べ大きく，2次元問題として扱えるとする。

2・1 等角写像によるワブルモータの解析 2次元問題として，複素平面で解析を行う。図1において，2つの電極 C1, C2 間のキャパシタンスを求めることを考える。図中の円は実際は円筒で，その2次元断面をあらわしている。
 C1; center O :0, radius : 1
 C2; center O' : δ , radius : γ , ($0 < \delta < 1$, $0 < \gamma < 1$)
 C3; shaft supposed, concentric with C1, touches C2 at A, S, T; reflected points each other as for C1, C2
 D ; enclosed domain between C1 and C2

2・2 解ける；とはどういうことか 図1で C1, C2

図1 正規化された偏心円筒の形状

Fig. 1. Configuration of normarized eccentric cylinder.

* 並木精密宝石（株）

〒123-8511 東京都足立区新田 3-8-22

Namiki Precision Jewelry Co., Ltd.

3-8-2, Shinden, Adachi-ku, Tokyo 123-8511

** 東京大学生産技術研究所

〒153-8505 東京都目黒区駒場 4-6-1

IIS., University of Tokyo

4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8505

が同心円だったら、電界・キャパシタンスを求めることはたやすい。偏角 (ψ とする) 方向に対し対称で、偏角依存性がないからである。図 1 での電界・キャパシタンスの解法はあり⁽³⁾⁽⁴⁾、平行 2 線式での送電線による電界分布で知られている。しかしながらワブルモータではステータ電極が分割されており、これが次々と励磁されることでロータは偏心し、回転していく。電極が分割されている；というパラメータを前述の解法では組み込めず、解けなくなる。対称性を追求し、その変換をみいだすことで解けるのである。

2.3 映像法による解析 z, w を複素数、他の文字は実数、虚数単位を i とする。方針は、2 つの偏心円を同心円とする写像 $g: z \mapsto w$ を求めることである。図 1 にお

いてステータを表す円 $C1: |z| = 1$ に対し互いに映像 (鏡像、つまり反転写像) の位置関係にある 2 点 $S(s, 0)$ と $T(t, 0)$ をとる。円の関する方べきの定理を円 $C1$ に適用し、

$$s \cdot t = 1 \quad t = 1/s \dots \dots \dots (1)$$

ここでこの s, t を、もうひとつのロータを表す円 $C2$ に対しても同時に映像関係を満足するように定めるのである。二つの円 $C1, C2$ に対し、その両方の内部点 S を同心円の中心 (この場合原点) に写像すればよいわけである。

方べきの定理を $C2$ に適用し、式 (2) を得る。ここで s を 0 から $\delta + \gamma$ としたとき $(\delta - s)(\delta - 1/s)$ は $-\infty$ から $-\gamma \{ \delta - 1/(\delta + \gamma) \}$ まで単調に増加する。従って次式を満

図 2 z 平面上でのリーマン球
Fig. 2. Riemann's sphere on z -plane.

図 3 w 平面上でのリーマン球
Fig. 3. Riemann's sphere on w -plane.

足する s がただ一つ存在する。

$$(\delta - s)(\delta - 1/s) = \gamma^2, (0 < s < \delta + \gamma < 1) \cdots (2)$$

この s に対し, s と t は $C1$ と $C2$: $|z - \delta| = \gamma$ で同時に
 影像関係を満足する。円々対応するメービウス変換(一次
 分数変換)を施せば, $C1$ と $C2$ は同心円へと写像される。
 $g(s) = 0, g(t) = \infty$ となる写像 $\{s$ を零点, t を極とすれ
 ばよい。 $\}$ で, ロータはロータ, ステータはステータに, 更
 に同一回転方向に対応し $g(1) = 1, g(-1) = -1$ となるも
 のは

$$w = g(z) = \frac{z - s}{-sz + 1} \cdots \cdots (3)$$

となる(付録参照)

z -平面, w -平面でのリーマン球の様相を図2, 図3に
 示す。ここに

$$\angle S'RO = \alpha = 2 \arctan s \cdots \cdots (4)$$

図2において, 点 S' はリーマン球の北極点 N と複素平
 面上の点 S とのリーマン面上での交点, 点 R はリーマン球
 の中心, 点 S'' は点 R に関する点 S' の対称点である。ロー
 タ $C2$ の回転に伴い軸 $S''RS'$ が, ステータ軸ともいえる軸
 NRO に対し角度 α だけ転倒してすりこぎ運動することが
 わかる。図3ではロータ回転軸はステータ軸と一致する。

複素平面は開平面だが, 無限遠点を添加したリーマン面
 は閉曲面(コンパクト)となる。リーマン球を考えること
 で, リーマン球上での鏡映, 回転という変換が見えてくる。
 これがワブルモータの数学的知見である。

キャパシタンスおよびトルク解析 ステータ $C1$ 上の
 点 $z = e^{i\psi}$ の w -平面上への写像を $w = e^{i\Psi}$ とする。

式(3)から,

$$w = e^{i\Psi} = \frac{e^{i\psi} - s}{-se^{i\psi} + 1} \cdots \cdots (5)$$

オイラーの公式を適用して計算し,

$$\Psi(\psi) = \arctan \frac{(1 - s^2) \sin \psi}{(1 + s^2) \cos \psi - 2s} \cdots \cdots (6)$$

$\partial_\psi \equiv \partial/\partial\psi$ として整理し, 次式を得る。

$$\partial_\psi \Psi(\psi) = \frac{1 - s^2}{1 + s^2 - 2s \cos \psi} \cdots \cdots (7)$$

図4で Δ : ステータ電極片中央位置のなす角, g_s : ステ
 タ電極間ギャップ, l : 軸方向長さ, q : w -平面での等価ロ
 タ半径{式(付8)参照}, ϵ : ギャップ間誘電率, である。

まず ψ でのキャパシタンス $C(\psi)$ を考える。

w -平面で2つの円は同心円となっているから, $C(\psi)$ は
 w -平面での対向電極長(軸断面で考えている。)に比例,
 即ち中心角 $\Psi(\psi + \Delta/2) - \Psi(\psi - \Delta/2)$ に比例する。これ
 が w -平面で考えた理由である。よって

$$C(\psi) = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(1/q)} \frac{\Psi(\psi + \Delta/2) - \Psi(\psi - \Delta/2)}{2\pi}$$

図4 ワブルモータの構造

Fig. 4. Configuration of wobble motor.

$$= \frac{\epsilon l}{\ln(1/q)} \{ \Psi(\psi + \Delta/2) - \Psi(\psi - \Delta/2) \} \cdots \cdots (8)$$

次にステータ電極片により生成されるロータに働く発生トル
 ク T を求める。ロータとステータ電極間に印加される電
 圧を V とすると, ギャップの蓄積エネルギー E は

$$E = CV^2/2 \cdots \cdots (9)$$

$$T = -\partial_\psi E = -V^2 \partial_\psi C/2 \cdots \cdots (10)$$

$T = T(\psi)$ を純モータ機構による発生トルク部分とギア機
 構部分とに分け,

τ : 正規化トルク, ν : ギア比(トルク増倍率)として

$$T(\psi) = (\epsilon l V^2/2) \cdot \nu \cdot \tau(\psi) \cdots \cdots (11)$$

$$\nu = \gamma/\delta \cdots \cdots (12)$$

$$\begin{aligned} \tau(\psi) &= \tau(\psi, q, \Delta, s) \\ &= -\frac{1-s^2}{\ln(1/q)} \left\{ \frac{1}{1+s^2-2s \cos(\psi+\Delta/2)} - \frac{1}{1+s^2-2s \cos(\psi-\Delta/2)} \right\} \\ &= \frac{1-s^2}{\ln(1/q)} \frac{4s \sin \psi \sin(\Delta/2)}{\{1+s^2-2s \cos(\psi+\Delta/2)\} \cdot \{1+s^2-2s \cos(\psi-\Delta/2)\}} \end{aligned} \cdots \cdots (13)$$

上式で, $\tau(\psi, q, \Delta, s)$ は注目しているパラメータを明確
 にするために特記している。

ステータ電極数: n , g_s の O への仰角: $\delta\psi = g_s$ とすれ
 ば $\Delta = 2\pi/n - \delta\psi$ である。 n 以外のワブルモータできま
 る構造因子 $q, \Delta, \delta\psi, s$ を陰(implicit)にし, これを τ_{eq} と
 して表現すれば式(14)となる。

$$\tau_{eq}(\psi, n) = \tau(\psi, q, 2\pi/n - \delta\psi, s) \cdots \cdots (14)$$

次にロータの回転を考察する。滑らず転がりながら回転
 すると仮定する。

$(m+1)$ 番目のステータ電極中心位置を $\phi(n, m) =$
 $m \cdot (2\pi/n)$ とする。 α : 対向最近ステータ電極を望む点
 B (図4参照)の初期位置角とすれば, ロータの回転に伴い
 $(m+1)$ 番目のステータ電極の仰角は $\alpha + \phi(n, m) - \psi$ と
 変化する。ロータの回転に伴い, この量は減少する。図4
 で, ロータを固定しステータが相対回転する; と考えると

わかりやすい。これを τ_q とすれば式 (15) を得る。

$$\tau_q(\psi, n, m, \alpha) = \tau(\alpha + \phi(n, m) - \psi, q, 2\pi/n - \delta\psi, s) \dots\dots (15)$$

実際のロータ回転は、 β を始動時でのロータ位置の対向最近ステータ電極との角度差として、始動時にはこの β というの角度分電圧が対向最近ステータ電極に印加され、これから m が切り替えられ (転流し) その後 $2\pi/n$ 毎に次々と m が切り替わっていくことになる。

なお、平均トルク τ_{av} はこのトルクを積分平均すればよい。また 1 周期でのトルクリプル τ_{ripple} は最大トルク τ_{max} 、最小トルク τ_{min} として次式で与えられる。

$$\tau_{ripple} = (\tau_{max} - \tau_{min}) / \tau_{av} \dots\dots\dots (16)$$

キャパシタンスおよびトルク解析例 $\gamma = 500/520$,

図 5 単位長当たりの容量

Fig. 5. Capacitance per unit length $C(\psi, n)$ (pF/μm).

図 6 単位長当たりのトルク

Fig. 6. Torque per unit length τ_{eq} (pN·m/μm).

$\delta = 10/520$, $g_s = 10/520$ { ステータ半径 $520(\mu m)$ で規格化 } ; $\epsilon = 8.854 \cdot 10^{-6}(\text{pF}/\mu m)$ とし、式 (8) での $C(\psi) = C(\psi, n)$ および式 (14) を、解析ソフト Mathcad で計算した。その結果をそれぞれ図 5、図 6 に示す。

3. FEMシミュレーションとの比較

$l=100(\mu m)$ としロータとステータ電極間に $V=100(V)$ を印加する。ワブルモータ構造因子は前述通りとする。式 (11) で

$$T = \kappa \cdot \tau_{eq}, \text{ここに } \kappa = (\epsilon l V^2 / 2) \cdot \nu \dots\dots\dots (17)$$

さらに

$$\eta = \kappa / (l \cdot \nu) = \epsilon l V^2 / 2 \dots\dots\dots (18)$$

とおく。 $\eta = 0.04427$, $\nu = 50$, よって $\kappa = l \cdot \nu \cdot \eta = 5 \times 10^3 \eta$ となり, $T = 5 \times 10^3 \eta \tau_{eq}$ を得る。図 4 の位置でステータ電極 C12 ($\psi = 2\pi/5$) に 100V を印加したとき、ロータに働くマックスウェル応力の ANSYS による FEM シミュレーション例を図 7 に示す。表 1, 2 に理論値と FEM シミュレーション値との比較を示す。分割数 (e:element 数, n; node 数) 等 FEM パラメータを表脚注に記した。FEM シミュレーション値は 1% 以内での良い一致をみている。

4. トルクおよび転流タイミングの考察

これまでのパラメータでの、式 (15) によるトルク特性を図 8 に示す。 $n=5$ で、左図は印加電圧が $2\pi/5$ 毎にスイッチされ、右図は $\tau_q(\psi, n, 1, \alpha_0) = \tau_q(\psi, n, 2, \alpha_0)$ を満足する $\alpha_0 = 0.86983 (\approx 49.8^\circ)$ を検出し、その後 $2\pi/5$ 毎にスイッチした場合である。ロータ位置検出にはエンコーダ型ロータ形状とすることが考えられる⁽¹⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。このとき、平均トルクは約 1.18 倍、トルクリプルは約 1.352 から 0.398 に改善され、この場合転流タイミングを早めることの有効性が確認できる。

図 7 マックスウェル応力の FEM 図例

Fig. 7. A FEM diagram of Maxwell's force worked on rotor when 100V is applied to one electrode

表 1 トルクの、理論値と FEM シミュレーション値の比較: {} 内は相対誤差 (%)

Table 1. Torque values $\eta\tau_{eq}$ (pN·m/ μ m) {error in % , (FEM - theoretical value)/theoretical value}

case#	parameters			theoretical value (Mathcad)			FEM (ANSYS)		
	γ	δ	g_s	0	$2\pi/5$	$4\pi/5$	0	$2\pi/5$	$4\pi/5$
1	500/520	0	10/520	0	0	0	[8.9E-8]	-4.8E-10	-7.76E-8
2							-9.85E-7	-4.12E-7	-1.17E-7
3							0.91689	0.21930	
4							{-0.153}	{-0.905}	
							-3.01E-5	0.91783	0.21936
							{-0.050}	{-0.877}	

表 2 トルクの比較 {(注意)case# で 1 と 2; 3 と 4 は、構造パラメータは同じだが FEM パラメータが違う}

Table 2. Torque values $T=\kappa\tau_{eq}(\times 10^3 \text{ pN} \cdot \text{m})$ (pN·m $\approx 10^{-8}$ gf·cm)

3	500/520	10/520	10/520	0	4.59145	1.10650		4.58443	1.09649
4							-1.47E-4	4.58912	1.09679

case1;half model,FEM parameters(mshape,1;size,3.2;7055e,15132n), case2;full model,FEM parameters(mshape,1;size,5;6840e,14894n)
case3;half model,FEM parameters(mshape,1;size,3.2;6875e,14772n), case4;full model,FEM parameters(mshape,1;size,5;6856e,15646n)
half model(1/2-symmetrical 2D-model without proturbance) mshape,1;triangles

$$\alpha 0 := 0.86983 \quad \tau d(\psi, n, \alpha, \beta, \alpha 0) := \begin{cases} \tau q(\psi, n, 0, \alpha) & \text{if } 0 \leq \psi < \beta \\ \tau q(\psi, n, 1, \alpha) & \text{if } \beta \leq \psi < \alpha 0 \\ \tau q(\psi, n, 2, \alpha) & \text{if } \alpha 0 \leq \psi < \alpha 0 + \phi(n, 1) \\ \tau q(\psi, n, 3, \alpha) & \text{if } \alpha 0 + \phi(n, 1) \leq \psi < \alpha 0 + \phi(n, 2) \\ \tau q(\psi, n, 4, \alpha) & \text{if } \alpha 0 + \phi(n, 2) \leq \psi < \alpha 0 + \phi(n, 3) \\ \tau q(\psi, n, 0, \alpha) & \text{if } \alpha 0 + \phi(n, 3) \leq \psi < \alpha 0 + \phi(n, 4) \\ \tau q(\psi, n, 1, \alpha) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$n := 5 \quad \alpha := 0 \quad \beta := 0 \quad 0.35732 \cdot \frac{180}{\pi} = 20.47293 \quad 0.86983 \cdot \frac{180}{\pi} = 49.83759$$

$$\tau av(n, \alpha, \beta) = 20.37555$$

図 8 ロータ位置が検出されたときのトルク特性の改善

Fig. 8. Improvement of torque characteristics in case rotor position sensed.

5. 結論と今後の課題

静電ワブルモータに対し, 2 次元モデルで等角写像 (映像法) でのキャパシタンス・トルクの厳密なる解析を行い, FEM シミュレーションと比較し 1%以内での良い一致をみ

た。ステータ電極励磁方式と関連してひとつのトルク特性改善法を示唆した。従来のようなタイミングでステータへの転流を行うとロータのトルクが瞬時零まで落ちてしまうことがある。このようなとき転流のタイミングを変えることで, トルクの増大及びトルクリブルの低減を図ることが

可能となる。この有効性を数値実験で、定量的に確認した。
今後の課題として、今回発生トルクを対象としたが

- 散逸項としての摩擦の配慮
- トルク実測の困難さの克服

実際の物作りとしては

- エンコーダ位置検出と関連し、ドライバの開発
- シャフトからのトルク軸出力

等が挙げられる。

(平成15年1月22日受付,平成15年4月14日再受付)

文 献

- (1) T. Sonobe, M. Mita, and H. Fujita: "Analysis and Fabrication by Deep RIE of Electrostatic Wobble Motor", Materials for study of IEEJ, MSS-00-9(2000-9)
園部 忠・三田 信・藤田博之「静電ワブルモータの解析とディープ RIE による製作」, 電気学会, マイクロマシン・センサシステム 研資 MSS-00-9 (2000-9)
- (2) e.g. Rob Legtenberg, et al.: "An Electrostatic Lower Stator Axial-Gap Polysilicon Wobble Motor Part I: Design and Modeling", Vol.7, No.1, pp.79-86 (1998-3)
- (3) K. Funabashi "Electromagnetics", Tokyo Denki University Press, pp92-94 (1974) (in Japanese)
船橋憲治:「電磁気学」, 東京電機大学出版局, pp.92-94 (1974)
- (4) IEEJ: "Electrical Engineering Handbook(Ver.3)", p75 (1967)
電気学会「電気工学ハンドブック(第3版)」, p75 (1967)
- (5) T. Sonobe and H. Fujita: "Electrostatic Wobble Motor and Its Rotor Control Unit", Japanese patent; 2001-012400 (applied date:2001.1.19)
- (6) T. Sonobe and H. Fujita: "Electrostatic Wobble Motor and Its Fabricating Method", Japanese patent; 2001-012401 (applied date:2001.1.19)

付 録

1. 式(3)の導出

$$w = g(z) = k \frac{z-s}{z-t} \dots\dots\dots (付1)$$

この $g(z)$ で $C1, C2(z_{\infty}$ 平面上) の影像 $C1', C2'$ (w_{∞} 平面上) は同心となる。 k を適当に選び $C1'$ の半径を 1 とする。 $C1$ 上の z に対し k を次式を満たすようにきめる。

$$|w| = |k| \left| \frac{z-s}{z-t} \right| = 1 \dots\dots\dots (付2)$$

式(付2)はアポロニウス円である。点 Q, R をそれぞれ $1:|k|$ の内分点, 外分点とすれば, $Q(\frac{ks+t}{k+1}, 0), R(\frac{ks-t}{k-1}, 0)$ となる。円(付2)の中心は QR の中点で, これが原点だから $\frac{1}{2}(\frac{ks+t}{k+1} + \frac{ks-t}{k-1}) = \frac{k^2s-t}{k^2-1} = 0$

$$k^2s - 1/s = 0, \quad \text{従って } k = 1/(\pm s)$$

$g(1) = 1, g(-1) = -1$ と同一回転方向に対応させるため

$$k = 1/(-s) \dots\dots\dots (付3)$$

と選び, 式(3)を得る。

なお式(2)は式(1)より式(付4)を満足する。

$$\delta s^2 - (1 + \delta^2 - \gamma^2)s + \delta = 0 \dots\dots\dots (付4)$$

ここで恒等的な関係式である

$$(1 + \delta^2 - \gamma^2)^2 - 4\delta^2 = (1 + \gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2 \dots\dots\dots (付5)$$

を使い, 式(付4)より s, t はそれぞれ

$$s = \frac{1 + \delta^2 - \gamma^2 - \sqrt{(1 + \gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2}}{2\delta} \dots\dots\dots (付6)$$

$$t = \frac{1 + \delta^2 - \gamma^2 + \sqrt{(1 + \gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2}}{2\delta} \dots\dots\dots (付7)$$

となる。

$C2'$ の半径 q は式(付8)で与えられる。

$$q = \frac{1}{s} \frac{\gamma(t-s)}{(\delta-t)^2 - \gamma^2} = \frac{\gamma}{1 - \delta s} \dots\dots\dots (付8)$$

園部 忠 (正員) 1949 年生。1972 年 3 月 横浜国立大学工学部電気工学科卒業。1974 年 3 月 東京大学大学院電気工学専門課程修士課程修了。1977 年 3 月 東京大学大学院電気工学専門課程博士課程修了。工学博士。同年 4 月から 1983 年 3 月まで東京電機大学電気通信工学科専任講師。この間、主にパワーエレクトロニクス、系統制御、信号処理、マイクロ波平面回路、静電気応用等の分野に関する研究に従事。1983 年 4 月から 住友重機械工業(株)にて、主に電気集塵機パルス荷電装置での電子制御装置の開発(社長賞受賞)、モーションコントロールでのドライバの研究・開発に従事。1999 年 4 月より並木精密宝石(株)にて、主にマイクロマシニングのアクチュエータ、光関係への応用の研究・開発に従事。

藤田 博之 (正員) 1952 年生。1975 年 3 月 東京大学工学部電気工学科卒業。1977 年 3 月 同大学院電気工学専門課程修士課程修了。1980 年 3 月 同大学院電気工学専門課程博士課程修了。工学博士。同年 4 月東京大学生産技術研究所講師。1981 年 5 月東京大学生産技術研究所助教授。1993 年 8 月東京大学生産技術研究所教授となり、現在に至る。この間、1983 年 7 月から 1985 年 6 月まで MIT

国立マグネット研究所客員。2000 年 4 月より東京大学生産技術研究所マイクロメカトロニクス国際研究センター長。主として半導体マイクロマシニングの研究に従事。M.Hetenyi Award for Experimental Mechanics 受賞(1986)。技術・科学図書文化賞優秀賞受賞(平成4年)、市村学術賞功労賞(平成9年)、服部報公賞(平成12年)、Cebalier de l'Ordre des Academiques-フランス共和国政府教育・学術功労賞シュバリエ-受賞(平成13年)。