限定された需要情報のもとでの多期間生産計画に関する一考察*

川崎 雅也[†]・竹本 康彦[†]・上野 信行[†]・有蘭 育生[‡]

A Study of Multi-period Production Planning under Limited Information about Demand*

Masaya KAWASAKI[†], Yasuhiko TAKEMOTO[†], Nobuyuki UENO[†] and Ikuo ARIZONO[‡]

1. はじめに

サプライ・チェーンに存在する様々な問題を解決する一つのアプローチとして情報共有がある。たとえば、メーカーでの生産計画をサプライヤに提示して、合理的に納品日や納品量を決定し、不良在庫や欠品を減らす取り組みがあげられる。自動車業界において、サプライヤに生産・販売計画を内示したり、共同のコスト削減プログラムを立ち上げたりし、サプライ・チェーン全体の利益向上に成功した事例が報告されている [1]。

自動車部品などの製品において、サプライヤでの製造リードタイムがメーカーの納入リードタイムより長期に及ぶことがある。このとき、サプライヤでは事前に製品を生産し在庫として保有する見込生産方式が採用される。前述のとおり、この状況で効率的に生産活動を営むにあたって、サプライ・チェーン環境にある企業間では数期間先に予定の注文に関する情報が内示として事前に通知される場合がある。ただし、需要には不確実性が存在する。従来の研究では、事前の需要情報に対して、内示を平均、履歴から分散を考慮し、さらに各期での需要分布として正規分布やガンマ分布などを想定し生産計画が立案されていた [2,3]。ただし、数期間における需要分布を精度よく予測することは難しく、また想定した需要分布が適当でなかった場合のリスクの問題がある。

限定された需要情報に基づき生産計画を立案する方法として、需要の平均と分散の情報のみを利用する Distribution Free Approach(DFA)[4] はよく知られた手法である。これまでに、新聞売り子問題や定量発注方

式などの各種在庫システム、また単一期間の生産計画に応用されてきた [5,6]。本研究では、需要に関する平均と分散の情報のみを利用し、多期間に及ぶ生産計画の策定方法について検討する。このとき、需要分布を想定した場合との比較により、限定された情報より策定される計画の有効性について言及する。

2. 記号の定義および仮定

本研究では、内示として需要情報が事前に通知されるサプライ・チェーン環境にある企業を対象とする。ただし、サプライヤでの製造リードタイムはメーカーの納入リードタイムより長く、見込生産方式が採用されているとする。内示は不確実であり、そのため各期の確定注文は内示に対してばらつくとする。このような状況における多期間生産計画モデルを考える。以下に本研究での仮定と記号を定義する。

2.1 仮定

- (i) メーカーからサプライヤへの需要に関して、各期の需要は独立である。メーカーから事前に内示(注文予定数)の提示はあるが、納入指示(確定注文数)は内示より変動する。提案法では需要の分布形は未知とし、想定しない。ただし、与えられている唯一の情報である内示を平均とし、分散は過去の履歴より既知とする。
- (ii) サプライヤの製造リードタイムは、メーカーより要求される納入リードタイムよりも長いと仮定する。サプライヤでは、事前に提示される内示をもとに見込生産方式が採用されるものとする。
- (iii) 内示の情報から n 期間の生産計画を立案する。
- (iv) 未処理需要は、品切れに伴う損失が計上された上でバックオーダーされる。

2.2 記号の定義

i : 期間。ただし、 $i \leq n$ 。
 d_i : i 期での需要量。ただし、各期の需要分布の確率密度関数および分布関数を $f_i(z), F_i(z)$ とする。
 μ_i : i 期での需要に関する内示。ただし、需要分布の平

* 原稿受付 2009年6月12日

[†] 県立広島大学 経営情報学部 Faculty of Management and Information Systems, Prefectural University of Hiroshima; 1-1-71, Ujina-Higashi, Minami-ku, Hiroshima city, Hiroshima 734-8558, JAPAN

[‡] 大阪府立大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University; 1-1 Gakuen-cho, Naka-ku, Sakai city, Osaka 599-8531, JAPAN

Key Words: distribution free approach, min-max discipline, multi-period production planning.

均値と一致する．

σ_i : i 期での需要の標準偏差．

x_i : i 期での製品の完成数．

S_0 : 初期在庫量．

S_i : i 期での在庫量． $S_i = S_0 + \sum_{t=1}^i x_t - \sum_{t=1}^i d_t$ ．

y^+ : $\max\{0, y\}$ ． $E[y]^+ = E[y^+]$ ．

y^- : $\max\{0, -y\}$ ． $E[y]^- = E[y^-]$ ．

h_i : i 期での単位製品・単位時間あたりの在庫保管費用．

b_i : i 期での単位製品・単位時間あたりの品切れ損失．

3. モデルの定式化

ここでは、需要分布を想定し生産計画を策定する方法と、需要分布を想定せず需要の内示および分散のみの情報をもとに生産計画を策定する方法を説明する．

3.1 需要分布を想定した場合の定式化と解法

生産計画では、需要分布を想定した場合の期待費用関数を在庫保管費用と品切れ損失により構築し、これを最小化することを考える．具体的に、期待費用関数を

$$C(\hat{x}) = \sum_{i=1}^n (h_i E[S_i]^+ + b_i E[S_i]^-) \quad (1)$$

として定義する．ただし、 $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ である．また、非負制約 $x_i \geq 0$ を満足する必要がある．ここで、 $D_i = \sum_{t=1}^i d_t$ とする．(1) 式における $E[S_i]^+$ は

$$E[S_i]^+ = \int_0^{S_0 + \sum_{t=1}^i x_t} S_i f^{(i)}(D_i) dD_i = \int_0^{S_0 + \sum_{t=1}^i x_t} F^{(i)}(D_i) dD_i \quad (2)$$

として与えられる．ただし、 $f^{(i)}(y)$ は i 期までの需要分布の確率密度関数の畳み込みを意味し、

$$f^{(1)}(y) = f_1(y) \quad (3)$$

$$f^{(i)}(y) = \int_0^y f^{(i-1)}(y-z) f_i(z) dz \quad (4)$$

より定義されるものである．また、 $F^{(i)}(y)$ は $f^{(i)}(y)$ の分布関数である．一方、 $E[S_i]^-$ は定義より

$$E[S_i]^- = E[S_i]^+ - E[S_i] \quad (5)$$

として与えられる．結局、目的関数 (1) と非負制約 $x_i \geq 0$ をもつ確率計画問題として定式化することができ、最適生産計画 $\hat{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ を

$$x_i^* \frac{\partial C}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (6)$$

より得ることができる．(1) 式は凸関数であることから、各 x_i^* は (6) 式を満足する内点解あるいは端点解として与えられ [7]、この組合せにより最適解 $\hat{x}^*$ が求められる．ただし、(2) 式から畳み込みによる需要分布の分布関数が必要となる．正規分布やガンマ分布の場合では、その

再生性より比較的容易に分布関数を考えることができる．一方、一様分布のように再生性を有しない分布を想定する場合には非常に煩雑な計算が必要である [8]．

3.2 需要分布を未知とした場合の定式化と解法

前述では需要情報に分布関数を想定し定式化されている．しかし、数期間における需要分布を精度よく予測することは難しく、想定した需要分布が適当でなかった場合のリスクの問題も存在する．また、需要分布を特定した場合、正規分布のように再生性がある分布に関しては、計算は容易に求めることができる一方、再生性がない分布においては、畳み込み演算を行う必要がある．

ここで、Cauchy-Schwarz の不等式を考慮することで

$$E|S_i| \leq \{E[S_i^2]\}^{1/2} \quad (7)$$

の関係を導く．ただし、 $|y|$ は y の絶対値を意味し、 $E|y| = E[|z|]$ と表記している．さらに、 $E[S_i]^+$ は

$$E[S_i]^+ = \frac{E|S_i| + E[S_i]}{2} \quad (8)$$

である．(5) 式の関係を考慮することで、(1) 式から

$$\begin{aligned} C(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i + b_i}{2} E|S_i| + \frac{h_i - b_i}{2} E[S_i] \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{h_i + b_i}{2} \{E[S_i^2]\}^{1/2} + \sum_{i=1}^n \frac{h_i - b_i}{2} E[S_i] \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{t=1}^i \sigma_t^2 + \left(S_0 + \sum_{t=1}^i x_t - \sum_{t=1}^i \mu_t \right)^2 \right\}^{1/2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{h_i - b_i}{2} \left(S_0 + \sum_{t=1}^i x_t - \sum_{t=1}^i \mu_t \right) \\ &\equiv C_{\text{DFA}}(\hat{x}) \end{aligned} \quad (9)$$

を得ることができる． $C_{\text{DFA}}(\hat{x})$ は $C(\hat{x})$ の上限を与える．ここで、非負制約 $x_i \geq 0$ のもと、 $C_{\text{DFA}}(\hat{x})$ の最小化を図り、代替的な最適解を得ることを考える．具体的に、(9) 式は凸関数であることから、各 x_i^* は

$$x_i^* \frac{\partial C_{\text{DFA}}}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (10)$$

を満足する内点解あるいは端点解として与えられ [7]、この組合せにより最適解 $\hat{x}^*$ が求められる．この方法は、同じ平均・分散を有する分布の中で最悪な状況において最適化を図る Min-Max 規範に基づく最適化を提案するものである．この方法が Distribution Free Approach (DFA) [4] とよばれるものである．

4. 数値検証

(1) 式の $C(\hat{x})$ および (9) 式の $C_{\text{DFA}}(\hat{x})$ より求まる生産計画について検証する． $n = 5$ 期間を対象に、需要分布として正規分布、ガンマ分布、一様分布を想定し、数値実験を行った．ただし、各期の内示および分散を Table 1

に示す．

Table 2 および 3 は，需要分布として正規分布，ガンマ分布，一様分布を想定した場合の (1) 式の期待費用関数 $C(\hat{x})$ を最小化する最適生産計画 $\hat{x}^*$ と DFA に基づく (9) 式の期待費用関数 $C_{DFA}(\hat{x})$ を最小化する代替的最適生産計画 $\hat{x}_{DFA}^*$ を示している．ただし，正規分布，ガンマ分布，一様分布を想定した場合の最適生産計画を区別するために，各分布を想定した場合の最適生産計画 $\hat{x}^*$ を $\hat{x}_N^*$ ， $\hat{x}_G^*$ ， $\hat{x}_U^*$ と表記する．

さらに，最適生産計画での期待費用関数値について検討する．たとえば，パラメータ $h_i = 1$ ， $b_i = 10$ ， $S_0 = 0$ において，需要分布に正規分布を想定した場合に最適生産計画 $\hat{x}_N^*$ を採用したときの期待費用関数値 $C(\hat{x}_N^*)$ は 527.8 である．一方，需要分布に正規分布を想定した場合に代替的最適生産計画 $\hat{x}_{DFA}^*$ を採用したときの期待費用関数値 $C(\hat{x}_{DFA}^*)$ は 529.7 である． $C(\hat{x}_{DFA}^*)$ が $C(\hat{x}_N^*)$ より大きいことは明らかである． $C(\hat{x}_{DFA}^*) - C(\hat{x}_N^*)$ は分布に関する知識を得るために投資できる最大費用に対応する．すなわち，分布の特定にこれ以上費用がかかるようであるなら，限定された情報から最適生産計画を立案するのが経済的であるといえる．Table 4 および 5 において，各種需要分布のもとでの同様の数値結果を与えて

Table 1 期別内示と分散

期	1	2	3	4	5
内示	100	100	100	100	100
分散	35 ²	35 ²	35 ²	35 ²	35 ²

Table 2 最適生産計画の比較 ($h_i = 1$ ， $b_i = 10$ ， $S_0 = 0$)

期	1	2	3	4	5
$\hat{x}_N^*$	146.7	119.4	114.9	112.5	111.0
$\hat{x}_G^*$	149.1	119.6	115.0	112.6	111.1
$\hat{x}_U^*$	149.6	120.0	113.3	112.2	110.9
$\hat{x}_{DFA}^*$	149.8	120.6	115.8	113.4	111.8

Table 3 最適生産計画の比較 ($h_i = 1$ ， $b_i = 15$ ， $S_0 = 0$)

期	1	2	3	4	5
$\hat{x}_N^*$	153.7	122.2	117.1	114.4	112.7
$\hat{x}_G^*$	158.3	122.5	117.2	114.5	112.7
$\hat{x}_U^*$	153.0	125.3	116.1	113.9	112.6
$\hat{x}_{DFA}^*$	163.3	126.2	120.1	117.0	114.9

Table 4 期待費用関数値の比較 ($h_i = 1$ ， $b_i = 10$ ， $S_0 = 0$)

需要分布	$C(\hat{x}^*)$	$C(\hat{x}_{DFA}^*)$	差
正規分布	527.8	529.7	1.9
ガンマ分布	574.6	575.1	0.5
一様分布	513.7	514.5	0.8

Table 5 期待費用関数値の比較 ($h_i = 1$ ， $b_i = 15$ ， $S_0 = 0$)

需要分布	$C(\hat{x}^*)$	$C(\hat{x}_{DFA}^*)$	差
正規分布	576.9	595.7	18.8
ガンマ分布	636.7	644.6	7.9
一様分布	552.7	574.4	21.7

おく．Table 4 および 5 から，品切れに対する損失が厳格である場合，需要分布の特定に尽力するのが得策であることが推察できる．

5. おわりに

本研究では，サプライヤでの製造リードタイムがメーカーの納入リードタイムより長い場合に，メーカーよりサプライヤに需要に関する内示が与えられているときの多期間生産計画問題について考察した．従来の研究では，内示を平均，履歴から分散を考慮し，さらに各期での需要分布として正規分布やガンマ分布などを想定し生産計画が立案されていた．ただし，数期間における需要分布を精度よく予測することは難しく，また想定した需要分布が適当でなかった場合のリスクの問題がある．本研究では，需要に関する平均と分散の情報のみを利用し，多期間に及ぶ生産計画の策定方法について考察した．さらに，需要分布を想定した場合との比較により，限定された情報より策定される計画の有効性について，数値例を通じて検証した．一方，多期間に及ぶ需要を考慮する場合，需要間の相関の存在が懸念される．これを考慮したモデルは今後の課題として検討していきたい．

謝辞 本研究の一部は平成 20-22 年度科学研究補助金基盤研究 (C) (No.20510138) の補助を受けたことを記してここに謝意を表します．

参考文献

- [1] 曹，中島，竹田，田中：サプライチェーンマネジメント入門，朝倉書店 (2008)
- [2] 上野，古田，奥原，渋谷，倉本：マスカスタマイゼーション対応の生産管理システムの提案；システム制御情報学会論文誌，Vol.17, No.6, pp.221-229 (2004)
- [3] 上野，佐野：需要がガンマ分布の場合におけるマスカスタマイゼーション対応の生産計画法 (MCPS-Ga)；第 51 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集，pp.85-86 (2007)
- [4] I. Moon and G. Gallego: Distribution free procedures for some inventory models; *J. Opl. Res. Soc.*, Vol.46, No.6, pp.651-658 (1994)
- [5] E. A. Silver and I. Moon: The multi-item single period problem with an initial stock of convertible units; *Eur. J. Opl. Res.*, Vol.132, pp.466-477 (2001)
- [6] H. K. Alfares and H. H. Elmorra: The distribution-free newsboy problem: extensions to the shortage penalty case; *Int. J. Prod. Econ.*, Vol.93-94, pp.465-477 (2005)
- [7] 岡田：経済学・経営学のための数学，東洋経済新聞社 (2001)
- [8] F. Killmann and E. Collani: A note on the convolution of the uniform and related distributions and their use in quality control; *Econ. Qual. Ctrl.*, Vol.16, pp.17-41 (2001)