ヒルベルト空間における摂動を受けた作用素に対する SDG 条件に関する注意*

佐野 英樹†

A Remark on the SDG Condition for Perturbed Operators in Hilbert Space*

Hideki SANO†

1. はじめに

ヒルベルト空間 X 上の非有界線形作用素 A によって記述される動的システムの安定性を議論するときに, A によって生成される C_0 -半群 e^{tA} の growth bound $\omega_0(A)$ と A の spectral bound $\sigma_0(A)$ が重要な役割を果たす. これらは, それぞれ

$$\omega_0(A) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|e^{tA}\|}{t}$$

$$\sigma_0(A) := \sup\{\operatorname{Re}(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\}$$

で与えられる. ここで, $\sigma(A)$ は生成素 A のスペクトルである. これらの間には一般に, $\omega_0(A) \geq \sigma_0(A)$ なる関係が成立する. とくに $\omega_0(A) = \sigma_0(A)$ が成立する場合, $\sigma_0(A) < 0$ は C_0 -半群 e^{tA} の指数安定性を意味する. 条件 $\omega_0(A) = \sigma_0(A)$ は Spectrum Determined Growth 条件 (SDG 条件) とよばれ, 動的システムの安定性解析では SDG 条件が満たされているかどうかを調べることは非常に重要なことである.

SDG 条件が成立するための必要十分条件は, Huang[3] と Prüss[5] によって与えられている. その必要十分条件を用いて, フィードバックループが組み込まれた熱交換プロセス [7] やバイオプロセス [8] に対して指数安定性が示されている. また, 文献 [1] の Theorem 5.1.7 では有限次元空間におけるむだ時間を含む線形システムに対して指数安定性が示されている. 一方, Renardy[6] は SDG 条件について別の視点から議論している. そこでは, 集合

$$S(A) := \{B \in \mathcal{L}(X); \omega_0(A+B) > \sigma_0(A+B)\}$$

が導入され, $S(A)$ が空間 $\mathcal{L}(X)$ において第 1 類集合となることが証明されている. ここで, $\mathcal{L}(X)$ は X 上の有界

線形作用素全体からなる集合に作用素ノルムの位相が導入された空間である.

制御理論の分野では, コントローラ設計との関連で $A + \tilde{B}\tilde{F}$ の形の作用素が現れる. そこで, 本研究速報ではつぎの問題を取り上げる.

問題: SDG 条件を満たす非有界線形作用素 A が与えられたときに, すべての有界線形作用素 B に対して, $A + B$ も同様に SDG 条件を満たすか?

2. 反例 1

本節では, 1. の問題に対する反例を示そう. はじめに, n 次元ヒルベルト空間 H_n と $n \times n$ 行列 A_n を以下のように定義する.

$$H_n := \operatorname{span}\{e_{ni}; i = 1, 2, \dots, n\}, \quad A_n := \lambda_n I_n$$

ここで, e_{ni} ($i = 1, 2, \dots, n$) は

$$e_{ni} := \begin{matrix} (i\text{th}) \\ [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbf{R}^n \end{matrix}$$

であり, λ_n は $\lambda_n := -1/2 + i\omega_n$ ($\omega_n \in \mathbf{R}$, $|\omega_n| \rightarrow \infty$) である. ただし, I_n は $n \times n$ 単位行列を示す.

H_n と A_n を用いて, ヒルベルト空間 H と作用素 A を以下のように定義する.

$$H := \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n, \quad A := \sum_{n=1}^{\infty} \oplus A_n \quad (1)$$

ここで, H の内積は $\langle x_1, x_2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n c_{nm}^1 \overline{c_{nm}^2}$, $x_i = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \sum_{m=1}^n c_{nm}^i e_{nm} \in H$ ($i = 1, 2$) で定義され, A の定義域は $D(A) = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \sum_{m=1}^n c_{nm} e_{nm} \in H; \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n |\lambda_n c_{nm}|^2 < \infty\}$ で定義される. このとき $(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (\lambda - \lambda_n)^{-1} I_n$ が, ある $\lambda \in \rho(A)$ に対してコンパクト作用素になることを確認できる. したがって, 作用素 A のスペクトルは $\sigma(A) = \{\lambda_n; n = 1, 2, \dots\}$ で与えられる. よって, この場合 spectral bound は以下ようになる.

$$\sigma_0(A) = \sup\{\operatorname{Re}(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\} = -\frac{1}{2} \quad (2)$$

* 原稿受付 2008 年 9 月 10 日

† 鹿児島大学 学術情報基盤センター Computing and Communications Center, Kagoshima University; 1-21-35 Korimoto, Kagoshima 890-0065, JAPAN

Key Words: Hilbert space, dynamical system, perturbed operator, C_0 -semigroup, spectrum determined growth condition.

つぎに、作用素 A が H 上で C_0 -半群を生成することを示そう。はじめに、 $R(A-I) = H$ が成立していることに注意する。また、 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \sum_{m=1}^n c_{nm} e_{nm} \in D(A)$ に対して次式が成り立つ。

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n |c_{nm}|^2 = -\frac{1}{2} \|x\|^2 \leq 0$$

したがって、Lümer-Phillips の定理 (文献 [2] Chapter II) より、 A は C_0 -半群 e^{tA} を生成することがわかる。

ここで、 C_0 -半群 e^{tA} の growth bound を求めよう。作用素 $T(t)$ を $T(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \oplus e^{tA_n}$ と定義すると、それは H 上の C_0 -半群になる。とくに $T(t)x = e^{tA}x$, $x \in \sum_{n=1}^m \oplus H_n$ となること、ならびに $\sum_{n=1}^m \oplus H_n$ が H で稠密であることに注意すると、 $T(t) = e^{tA}$ が成立することがわかる。いま、 P_n を H から H_n の上への直交射影作用素とする。そのとき、 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus P_n x$, $x \in H$ となるから

$$e^{tA}x = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus P_n e^{tA}x = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus e^{tA}P_n x, \quad x \in H$$

が従う。この表現から

$$\begin{aligned} \|e^{tA}x\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{tA}P_n x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{tA_n}P_n x\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{\lambda_n t}P_n x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t} \|P_n x\|^2 \\ &= e^{-t} \|x\|^2, \quad x \in H \end{aligned}$$

が得られるが、これは $\|e^{tA}\| = e^{-t/2}$ を意味する。よって、次式が成り立つ。

$$\omega_0(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|e^{tA}\|}{t} = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

このようにして、(2), (3) 式より、作用素 A が SDG 条件を満たすことがわかる。

それでは、(1) 式で定義される作用素 A に摂動を加えた作用素 $A+B$ を考えよう。ここで

$$B := \sum_{n=1}^{\infty} \oplus B_n, \quad B_n := N_n \quad (4)$$

であり、 N_n は次式によって定義される $n \times n$ 行列である。

$$N_n := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで、すべての $x = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus P_n x \in H$ に対して

$$Bx = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus B_n P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus N_n P_n x$$

となることに注意し、 Bx のノルムを評価すると

$$\|Bx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|N_n P_n x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|N_n\|^2 \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$$

を得る。この計算で、 $\|N_n\| = 1$ ($n \geq 2$), $\|N_1\| = 0$ を用いている。このようにして、(4) 式で定義される作用素 $B: H \rightarrow H$ は有界であり、その作用素ノルムは $\|B\| \leq 1$ と評価できる。しかしながら、Huang の例題 [3] は作用素

$$A+B = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (A_n + B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (\lambda_n I_n + N_n)$$

は SDG 条件を満たさないことを示している。このことは、 A が SDG 条件を満たす生成素であっても、有界な摂動を受けた作用素 $A+B$ が SDG 条件を満たさない例となっていることを示している。

(注意 1) Huang の例題については文献 [4,9] も参照されたい。文献 [4] の中では、 $\sum_{n=1}^{\infty} \oplus (\lambda_n I_n + \delta N_n)$ ($\delta > 0$) も SDG 条件を満たさないことが述べられている。

3. 反例 2

2. では 1. の問題に対する反例を挙げたが、そこでは SDG 条件を満たさない Huang の例題 [3] を $A+B$ と表現して、 A が SDG 条件を満たすこと、および B が有界であることを示したに過ぎない。1. で説明したように集合 $S(A)$ が空間 $\mathcal{L}(X)$ において第 1 類集合となることから、一般に反例を見いだすことは容易ではないが、本節では Huang の例題を基にして別の反例が構成できることを示す。(4) 式で定義される B の代わりに、つぎの有界線形作用素を考えよう。

$$B := \sum_{n=1}^{\infty} \oplus B_n, \quad B_n := N_n^2 \quad (5)$$

ここで、 N_n は 2. で用いたのと同じ行列である。このとき、Huang の例題 [3] の証明と同様な手法で、作用素

$$A+B = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (A_n + B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (\lambda_n I_n + N_n^2)$$

(ただし、 A は (1) 式で定義されている作用素) が SDG 条件を満たさないことを示せる。実際、 $\sigma_0(A+B) = -1/2$ を容易に示すことができる。また、 $\omega_0(A+B) \leq 1/2$ を示すことも難しくない。一方、これとは逆の $\omega_0(A+B) \geq 1/2$ の証明には注意を要する。 $y_n \in \mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$) を $y_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n e_{ni}$ としたときは、 $\|y_n\| = 1$ であり

$$\begin{aligned} &\|e^{t(A+B)}\|^2 \\ &\geq \|e^{t(A+B)}y_n\|^2 = \|e^{t(A_n+B_n)}y_n\|^2 \\ &= \left\| e^{\lambda_n t} e^{tN_n^2} (n^{-1/2} \sum_{i=1}^n e_{ni}) \right\|^2 \\ &= n^{-1} e^{-t} \left\| \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \left(\frac{t^m N_n^{2m}}{m!} \right) \sum_{i=1}^n e_{ni} \right\|^2 \end{aligned}$$

$$= n^{-1} e^{-t} \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{m=0}^{[(i-1)/2]} \left(\frac{t^m}{m!} \right) e_{n(i-2m)} \right\|^2 = (*)$$

が成り立つ。ここで $[\cdot]$ はガウス記号を表す。いま $k = i - 2m$ とおくと、 k が動く範囲は $i - 2[(i-1)/2] \leq k \leq i$ 、すなわち、 i が奇数のとき $1 \leq k \leq i$ 、 i が偶数のとき $2 \leq k \leq i$ となる。ここで、1 から n までの整数の中で奇数全体を $\mathbf{N}_{\text{odd}}^n$ とし、偶数全体を $\mathbf{N}_{\text{even}}^n$ とすると $\{1, 2, \dots, n\} = \mathbf{N}_{\text{odd}}^n \cup \mathbf{N}_{\text{even}}^n$ と表せる。したがって

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{m=0}^{[(i-1)/2]} \left(\frac{t^m}{m!} \right) e_{n(i-2m)} \\ &= \sum_{i \in \mathbf{N}_{\text{odd}}^n} \sum_{k=1}^i \left(\frac{t^m}{m!} \right) e_{nk} + \sum_{i \in \mathbf{N}_{\text{even}}^n} \sum_{k=2}^i \left(\frac{t^m}{m!} \right) e_{nk} \\ &= \sum_{k=2}^n \sum_{i=k}^n \left(\frac{t^m}{m!} \right) e_{nk} + \sum_{i \in \mathbf{N}_{\text{odd}}^n} \left(\frac{t^m}{m!} \right) e_{n1} \\ &= \sum_{k=2}^n \sum_{m=0}^{[(n-k)/2]} \left(\frac{t^m}{m!} \right) e_{nk} + \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \left(\frac{t^m}{m!} \right) e_{n1} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^{[(n-k)/2]} \left(\frac{t^m}{m!} \right) e_{nk} \end{aligned}$$

に注意すると

$$\begin{aligned} (*) &= n^{-1} e^{-t} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=0}^{[(n-k)/2]} \frac{t^m}{m!} \right)^2 \\ &\geq n^{-1} e^{-t} \sum_{k=1}^{[n/2]} \left(\sum_{m=0}^{[(n-k)/2]} \frac{t^m}{m!} \right)^2 \\ &\geq n^{-1} e^{-t} \sum_{k=1}^{[n/2]} \left(\sum_{m=0}^{[[n/2]/2]} \frac{t^m}{m!} \right)^2 \\ &\geq n^{-1} e^{-t} \left[\frac{n}{2} \right] \left(\sum_{m=0}^{[[n/2]/2]} \frac{t^m}{m!} \right)^2 \geq \frac{1}{4} e^{-t} \left(\sum_{m=0}^{[[n/2]/2]} \frac{t^m}{m!} \right)^2 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $n \rightarrow \infty$ とすると $\|e^{t(A+B)}\|^2 \geq e^t/4$ が従うが、これは $\omega_0(A+B) \geq 1/2$ を意味する。よって、 $\omega_0(A+B) = 1/2$ となるので $\omega_0(A+B) \neq \sigma_0(A+B)$ がいえ、 $A+B$ は SDG 条件を満たさない。

4. 波動方程式の安定化問題との関連

A を (1) 式で $A_n := i\omega_n I_n$ ($\omega_n \in \mathbf{R}$, $|\omega_n| \rightarrow \infty$) とおいた H 上の作用素とし、 $\tilde{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^N, H)$ とする。このとき、システム $\dot{x} = Ax + \tilde{B}u$, $x(0) = x_0 \in H$ はエネルギー減衰のない典型的な波動方程式と本質的に同じになる。このシステムは、ある条件のもとで状態フィードバック制御 $u = \tilde{F}x$, $\tilde{F} \in \mathcal{L}(H, \mathbf{C}^N)$ によって安定化できる。実際、 $\tilde{F} = -\tilde{B}^*$ と選べば閉ループ系は $\dot{x} = (A - \tilde{B}\tilde{B}^*)x$ となるが、作用素 $A - \tilde{B}\tilde{B}^*$ が生成する C_0 -半群 $e^{t(A - \tilde{B}\tilde{B}^*)}$ が強安定 (すなわち $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{t(A - \tilde{B}\tilde{B}^*)} x_0\| = 0, \forall x_0 \in H$)

になるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\mu - A^*) \cap \text{Ker} \tilde{B}^* &= \{0\}, \\ \forall \mu \in i\mathbf{R} \cap \sigma_p(A^*) &= \sigma(A^*) \end{aligned} \quad (6)$$

であり、条件 (6) は $(A, \tilde{B})$ が近似可制御のときに満たされることが知られている (たとえば、文献 [2] Chapter VI)。

一方、 $\tilde{B}\tilde{F} \in \mathcal{L}(H)$ が (4) 式または (5) 式で定義される作用素 B に等しくなる場合には、閉ループ作用素が生成する C_0 -半群の growth bound が正になるので、状態フィードバック制御はシステムの不安定化を引き起こすことになる。

5. おわりに

本研究速報では、 A が SDG 条件を満たす C_0 -半群の生成素であるときに、有界な摂動 B を受けた作用素 $A+B$ も常に SDG 条件を満たすかという問題を取り上げた。この問題に対する答えが否定的であることが、Huang の例題を通して示された。さらに、その例題を基にして別の反例も示された。そして、それらの反例と波動方程式の安定化問題との関連性について述べた。

最後に、有益なコメントをいただきました査読者の方々に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] R. F. Curtain and H. J. Zwart: An introduction to infinite-dimensional linear systems theory; *Texts in Applied Mathematics*, Vol. 21, Springer-Verlag (1995)
- [2] K. J. Engel and R. Nagel: One-parameter semigroups for linear evolution equations; *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 194, Springer-Verlag (2000)
- [3] F. L. Huang: Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces; *Ann. Diff. Equations*, Vol. 1, No. 1, pp. 43–56 (1985)
- [4] Z. H. Luo, B. Z. Guo and O. Morgul: *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*, Springer-Verlag (1999)
- [5] J. Prüss: On the spectrum of C_0 -semigroups; *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 284, No. 2, pp. 847–857 (1984)
- [6] M. Renardy: Spectrally determined growth is generic; *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 124, No. 8, pp. 2451–2453 (1996)
- [7] 佐野, 国松: 境界フィードバックを伴う並流型熱交換方程式の指数安定性について; システム制御情報学会論文誌, Vol. 18, No. 6, pp. 222–228 (2005)
- [8] H. Sano and N. Kunimatsu: On the stability of a linear bioprocess model with recycle loop; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 50, No. 8, pp. 1200–1205 (2005)
- [9] J. Zabczyk: A note on C_0 -semigroups; *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, Vol. 23, No. 8, pp. 895–898 (1975)