Markov 過程の量子化を用いた確率的 Lyapunov 関数の近似構築*

西村 悠樹[†]・山下 裕[‡]

Construction Method of Approximate Stochastic Lyapunov Functions using Quantization of Markov Process*

Yuki NISHIMURA[†] and Yuh YAMASHITA[‡]

The existence of stochastic Lyapunov functions assures that the systems are stable in probability. However, general scheme of obtaining stochastic Lyapunov functions has not been introduced yet. This paper extends the authors' previous method[21] obtaining Lyapunov functions for deterministic cases to stochastic cases. In the method, difference-approximation scheme[6,10] and quantization of Markov processes[1,14] are used to approximate Lyapunov equations by linear quantum-like equations. We propose a method of obtaining approximate stochastic Lyapunov functions for nonlinear stochastic systems by superimposing the eigenfunctions of the quantum-like equations.

1. はじめに

確定システムにおいて, Lyapunov 関数を用いた安定判別法は有用性の高い手法として広く知られている. それは, 閉ループシステムに対して Lyapunov 関数が存在することとシステムが内部安定であることが同値であるというだけでなく, Lyapunov 関数を用いることでシステムのロバスト性評価やフィードバック制御則の逆最適設計などを行うことができるからである [16].

Lyapunov 関数の構築法についてはこれまで多くの研究がなされてきた. 線形時不変システムにおいては, Lyapunov 代数方程式の解として正定 2 次形式の Lyapunov 関数が求められるという著しい結果が得られている. いっぽうで, 非線形システムにおいては, これまで Krasovskii[8,19,15], Schultz[8,19], Zubov[19,15], Vannelli and Vidyasagar[19] などによる多くの有用な

研究結果があるにもかかわらず, 確実に得られる方法はいまだ提案されていない.

確率システムにおいても, Lyapunov 関数の概念を用いてシステムの安定性を判別する手法が存在する. しかし, 確率システムでは安定性の概念そのものに複数の定義が存在するため, どのような意味での安定性を議論しているのか明確にする必要がある. 代表的なものとしては, 確率安定・ p 乗平均安定・確率 1 での安定 (概安定) などがあるが, これらは確率システムの分散を 0 とした際には確定システムでいう Lyapunov 安定と一致する. このため, 確率システムにおける Lyapunov 関数の存在が導く安定性について検討しなければならない. 確率的 Lyapunov 関数とよばれるこの関数についての定式化は, Bucy[3], Has'minskii[7], Kushner[9], Mao[12] などによってなされている.

本論文では, 参考文献 [21] にて提案された, 確定システムにおける Lyapunov 関数の近似構築法を確率的 Lyapunov 関数の近似構築法として拡張する. 同手法の特徴は, 非線形偏微分方程式として表される Lyapunov 方程式を, 線形方程式である Schrödinger-like 方程式に近似する点にあり, その実現には Kushner による有限差分近似法 [10] と Alcaraz らによる Markov 過程の量子化 [1] が用いられる.

本論文の構成を記す. まず, 2. にて各種記号の定義と確率システムの記述を行ったうえで, 確率的 Lyapunov 関数とその安定定理について述べる. 3. では, Kushner[10]

* 原稿受付 2008 年 6 月 30 日

[†] 山口大学 大学院 理工学研究科 Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University; 2-16-1, Tokiwadai, Ube, Yamaguchi 755-0097, JAPAN

[‡] 北海道大学 大学院 情報科学研究科 Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University; N14W9, Kita-ku, Sapporo, Hokkaido 060-0814, JAPAN

Key Words: nonlinear stochastic system, stochastic Lyapunov function, finite-difference approximation, quantization, Markov process, Schrödinger equation, eigenvalue problem.

による有限差分近似法と, Alcaraz ら [1] による Markov 過程の量子化を用いて, 確率システムにおける時変な Lyapunov 方程式の解を, Schrödinger-like 方程式とよばれる線形方程式の解として近似する. 4. では, Schrödinger-like 方程式の固有値および固有関数を用いて, 時不変な確率的 Lyapunov 関数の近似関数を得る十分条件を示し, 提案手法の検討および議論を行う. 5. で例題について数値計算をし, 6. で本論文を総括する.

2. 準備

2.1 記号

本節では, 本論文全体にわたって用いている定義や用語などを記述する.

任意の $n \times n$ 行列 A の各要素を A_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), トレースを $\text{tr}(A)$ とし, さらに

$$\sum_{j \neq i} A_{ij} := \sum_{j=1}^n A_{ij} - A_{ii}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

とする.

つぎに, ある事象 X が起こる確率を $\mathcal{P}(X)$, 期待値を $E(X)$ と表記する. さらに, 事象 X_0 における X の条件付き確率および条件付き期待値を, それぞれ $\mathcal{P}(X|X_0)$ および $E(X|X_0)$ とする.

最後に各集合について定義する. n 次元 Euclid 空間を $\mathbb{R}^n$, n 次元ユニタリ空間を $\mathbb{C}^n$ とし,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{>0} &:= (0, \infty), \quad \mathbb{N}_{>0} := \{1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{R}_{\geq 0} &:= [0, \infty), \quad \mathbb{N}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

とおく.

2.2 確率システムとその安定性

本論文では, 伊藤確率微分方程式システム

$$dx(t) = f(x(t))dt + \sigma(x(t))dw(t) \quad (1)$$

を扱う. ただし, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ を確率過程, $w(t) \in \mathbb{R}^d$ を Wiener 過程, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(x) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ を拡散係数とする. ただし, システム (1) の平衡点は原点 $x(t) = 0$ ただ一つであるとする. また, $a(x) := \sigma(x) \cdot \sigma(x)^T$ とし, $a(x)$ の各要素 $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ について

$$a_{ii}(x) - \sum_{j \neq i} |a_{ij}(x)| \geq 0 \quad (2)$$

が満たされているものとする.

システム (1) の安定性を考察する手段として, 確率的 Lyapunov 関数を定義し, Kushner ([9], p.39) により得られている安定定理を導く.

【定義 1】(微分生成作用素) 時刻 t における $x(t)$ の値を $x_t \in \mathbb{R}^n$ とし, $v(x(t)) \in \mathbb{R}$ を任意の関数, $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする. このとき,

$$\mathcal{L}v(x(t)) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E[v(x(t+h)) | x(t) = x_t] - v(x(t))}{h} \quad (3)$$

で定義される作用素 $\mathcal{L}$ を, 確率過程 (1) 式に対する微分生成作用素という.

【補題 1】(3) 式で定義される作用素 $\mathcal{L}$ について

$$\mathcal{L}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ a(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \right)^T \right\} \quad (4)$$

が成り立つ.

(証明) 略. 参考文献 [17], 定理 7.3.3 などを参照されたい.

【定義 2】(確率的 Lyapunov 関数) 確率システム (1) において, スカラ関数 $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が非負かつ連続となる空間が存在し, その部分空間を $Q_m = \{x | W(x) < m, m \in \mathbb{R}_{>0}\}$ とする. $W(x)$ が

$$\mathcal{L}W(x) \leq 0, \quad x \in Q_m \quad (5)$$

を満たすとき, $W(x)$ を確率的 Lyapunov 関数という.

確率的 Lyapunov 関数については, つぎの安定定理が存在する.

【定理 1】(Kushner [9], Chapter 2, Theorem 2) システム (1) において, 確率的 Lyapunov 関数 $W(x)$ が存在し, Q_m 上で $\mathcal{L}W(x) = 0$ を満たす部分空間を P_m とする. 初期状態を $x_0 \in Q_m$ とするとき, $x(t)$ は少なくとも確率 $1 - W(x_0)/m$ で P_m に収束する.

確率的 Lyapunov 関数の定義は確定システムの場合とほぼ同じである. しかし, 確率システムにおいては安定性の定義が複数存在するため, 議論はいくぶん複雑になる. 定理 1 は確率漸近安定性とよばれる性質についての定理であり, システム (1) において $\sigma(x) \equiv 0$ とすれば確定システムにおける漸近安定性に関する Lyapunov の定理と同値となる. しかし, 定理 1 は, m が有限である場合には, 過程 $x(t)$ が確率 1 で (すなわち確率測度が 0 となる部分空間を除いた確率空間において) P_m に収束することを保証しているわけではない. 換言すれば, 確率的 Lyapunov 関数が存在する場合においても P_m に到達しない見本過程が存在する可能性がある. したがって, 定理 1 は, 確定システムにおける Lyapunov の安定定理ほど強い安定性を保証しているわけではない.

しかしながら, 初期状態が $x_0 \in P_m$ であるならば, 見本過程は確率 1 で P_m に留まる. さらに, 確率的 Lyapunov 関数の存在は, システム (1) の原点が確率 1 で漸近安定となる必要条件である¹. したがって, 確率的 Lyapunov 関数の探索は安定性判別に大きく寄与する. また, 定理から明らかなように, 大域的な確率的 Lyapunov 関数が存在する場合, すなわち $Q_m = \mathbb{R}^n$ となる場合において

¹ システム (1) は確率 1 で安定ならば確率安定である [20].

は, $m \rightarrow \infty$ となるため, P_m は確率 1 で漸近安定となる.

確率システムの安定性については大住 [18] や砂原 [20] などを参照されたい. 確率的 Lyapunov 関数についての議論は Kushner [9] のほか Has'minskii [7] や Mao [12] などによりなされている. 制御系における大域的な確率的 Lyapunov 関数については Bardi ら [2] に詳しく述べられている. Deng ら [5] は確率システムにおける Sontag 型の安定化制御則や ISS などについて研究しており, Cesaroni [4] は確率制御系における逆 Lyapunov 定理についての定式化を行っている.

3. 確率的 Lyapunov 方程式の近似

本論文の目的は, 参考文献 [21] で提案された確定システムにおける Lyapunov 関数の近似的構築法を, 確率的 Lyapunov 関数の近似的構築問題に拡張することにある. 本章および次章の結果は確定システムの場合とほぼ同じであるが, 参考文献 [21] では最終的に拡散係数を $\sigma \rightarrow 0$ とした極限について議論しているため, 確定システムに対する Lyapunov 関数の構築手法の提案に留まっている. 本論文では, この手法を確率システムに適用した際に, 確率的 Lyapunov 関数の構築手法となりうることを示す.

まず, 確率システム (1) において, スカラ関数 $V, L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) + \mathcal{L}V(x(t), t) = -L(x(t), t) \quad (6)$$

を満たす関数として定義する. もし, $V(x(t), t)$ および $L(x(t), t)$ がともに時不変な非負関数となるならば, $V(x(t), t)$ は確率的 Lyapunov 関数となる. そこで, 本論文では (6) 式から議論を始めることとする.

【定義 3】(確率的 Lyapunov 方程式) 関数 $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は連続であるとする. このとき,

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) = -q(x(t))V(x(t), t) - \mathcal{L}V(x(t), t) \quad (7)$$

を, 確率的 Lyapunov 方程式という.

(注意 1) 確率的 Lyapunov 方程式 (7) は, (6) 式において

$$L(x(t), t) = q(x(t))V(x(t), t) \quad (8)$$

とおいた式である.

関数 $L(x(t), t)$ の (8) 式による限定は, 参考文献 [21] で提案された手法に依拠したものである. 確定システムの場合においては, (8) 式による限定が扱えるクラスの範囲を狭めないことが示されているが ([21], 定理 1), 確率システムの場合においては証明されていない. しかし, 確定システムは確率システムの極限として考えられるので, 外乱項の影響がそれほど大きくならない場合には適用可能であると期待して以下の議論を進める.

3.1 確率的差分 Lyapunov 方程式

確率的 Lyapunov 方程式 (7) の近似手法として, Kushner による差分近似 [6, 9] を用いる. Kushner の手法は確率最適制御問題についての近似手法であるが, 本論文では閉ループシステムを考え, さらに (8) 式を仮定して議論を進める.

まず, $i, j = 1, 2, \dots, n$ を用いて $f(x(t))$ および $a(x(t))$ の各要素を $f_i(x(t))$, $a_{ij}(x(t))$ と表現し, 符号を複号同順として

$$f_i^\pm(x(t)) := \max(\pm f_i(x(t)), 0) \quad (9)$$

$$a_{ij}^\pm(x(t)) := \max(\pm a_{ij}(x(t)), 0) \quad (10)$$

とする. つぎに, n 次元空間 $M_d \subset \mathbb{R}^n$ を

$$M_d := \left\{ \sum_{i=1}^n \delta_i \gamma_i e_i, \forall \gamma_i \in \mathbb{Z} \right\} \quad (11)$$

と定義し, $x_d, x_d' \in M_d$ とする. ただし, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n > 0$ は実定数, $e_1, e_2, \dots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の各次元における正規直交基底とする. そして, 任意の関数 $v: M_d \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ の x_d での 1 階差分商を

$$\mathcal{D}_i^+ v(x_d, t) := \frac{v(x_d + \delta_i e_i, t) - v(x_d, t)}{\delta_i} \quad (12)$$

$$\mathcal{D}_i^- v(x_d, t) := \frac{v(x_d, t) - v(x_d - \delta_i e_i, t)}{\delta_i} \quad (13)$$

とし, 2 階差分商を

$$\mathcal{D}_{ii} v(x_d, t) := \frac{1}{\delta_i} (\mathcal{D}_i^+ v(x_d, t) - \mathcal{D}_i^- v(x_d, t)) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ij}^+ v(x_d, t) &:= \frac{1}{2\delta_j} \{ -\mathcal{D}_i^+ v(x_d, t) + \mathcal{D}_i^- v(x_d, t) \\ &\quad + \mathcal{D}_i^+ v(x_d + \delta_j e_j, t) - \mathcal{D}_i^- v(x_d - \delta_j e_j, t) \} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ij}^- v(x_d, t) &:= \frac{1}{2\delta_j} \{ \mathcal{D}_i^+ v(x_d, t) - \mathcal{D}_i^- v(x_d, t) \\ &\quad - \mathcal{D}_i^+ v(x_d - \delta_j e_j, t) + \mathcal{D}_i^- v(x_d + \delta_j e_j, t) \} \end{aligned} \quad (16)$$

と定義する. ただし, (15) 式, (16) 式では $i \neq j$ とする.

【定義 4】(差分生成作用素) 作用素

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d(\cdot) &:= \sum_{i=1}^n \{ f_i^+(x_d) \mathcal{D}_i^+(\cdot) - f_i^-(x_d) \mathcal{D}_i^-(\cdot) \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[a_{ii}(x_d) \mathcal{D}_{ii}(\cdot) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j} \{ a_{ij}^+(x_d) \mathcal{D}_{ij}^+(\cdot) - a_{ij}^-(x_d) \mathcal{D}_{ij}^-(\cdot) \} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

を, システム (1) の差分生成作用素という.

【定義 5】(確率的差分 Lyapunov 方程式) 関数 $V_d: M_d \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$\frac{\partial V_d}{\partial t}(x_d, t) = -q(x_d)V_d(x_d, t) - \mathcal{L}_d V_d(x_d, t) \quad (18)$$

を満たしているとする. (18) 式を確率的差分 Lyapunov

方程式という．

(注意 2) 確率的差分 Lyapunov 方程式 (18) は, 確率的 Lyapunov 方程式 (7) において, 微分生成作用素 $\mathcal{L}$ を差分生成作用素 $\mathcal{L}_d$ で置き換えた式である．これは, (18) 式が, $V(x, t)$ の x による 1 階および 2 階偏微分を以下のように差分近似した式であることを意味している．

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x, t) \approx \begin{cases} \mathcal{D}_{ij}^+ V_d(x_d, t) & \text{if } f_i(x) \geq 0 \\ \mathcal{D}_{ij}^- V_d(x_d, t) & \text{if } f_i(x) < 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}(x, t) \approx \mathcal{D}_{ii} V_d(x_d, t) \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) \approx \begin{cases} \mathcal{D}_{ij}^+ V_d(x_d, t) & \text{if } a_{ij}(x) \geq 0 \\ \mathcal{D}_{ij}^- V_d(x_d, t) & \text{if } a_{ij}(x) < 0 \end{cases} \quad (21)$$

ただし, (21) 式においては $i \neq j$ である．

3.2 マスター方程式

Kushner は前節の差分近似に加え, $\partial V / \partial t$ についても後進差分近似を施すことで, 時間変数を離散値をとるものとして扱った．そして, 時間 1 ステップに対する遷移確率を定義した．

本論文では, 時間変数を連続のまま取り扱う．したがって, システム (1) に対しては遷移確率ではなく遷移率を定義する．そのうえで, 確率的差分 Lyapunov 方程式 (18) をマスター方程式の形に式変形することを考える．

【定義 6】(遷移率 [22]) システム (1) についての遷移率 p^b をつぎのように定義する．

$$p_{x_d, x_d \pm \delta e_i}^b = \frac{1}{\delta} f_i^\pm(x_d) + \frac{1}{2\delta^2} \left\{ a_{ii}(x_d) - \sum_{j \neq i} |a_{ij}(x_d)| \right\} \quad (22)$$

$$p_{x_d, x_d + \delta e_i + \delta e_j}^b = p_{x_d, x_d - \delta e_i - \delta e_j}^b = \frac{a_{ij}^+(x_d)}{2\delta^2} \quad (23)$$

$$p_{x_d, x_d - \delta e_i + \delta e_j}^b = p_{x_d, x_d + \delta e_i - \delta e_j}^b = \frac{a_{ij}^-(x_d)}{2\delta^2} \quad (24)$$

$$p_{x_d, x_d}^b = - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{|f_i(x_d)|}{\delta} + \frac{a_{ii}(x_d)}{\delta^2} - \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}(x_d)|}{2\delta^2} \right\} \quad (25)$$

$$p_{x_d, x_d'}^b = 0 \quad (26)$$

ただし, 符号はすべて複号同順であり, (26) 式において $x_d' \neq x_d$, $x_d \pm \delta e_i$, $x_d + \delta e_i \pm \delta e_j$, $x_d - \delta e_i \pm \delta e_j$ である．

また, $p^\#$ を

$$p_{x_d, x_d'}^\# := p_{x_d', x_d}^b, \quad x_d' \neq x_d \quad (27)$$

$$p_{x_d, x_d}^\# := q(x_d) - \sum_{x_d' \neq x_d} p_{x_d, x_d'}^\# \quad (28)$$

と定義する．

【補題 2】(マスター方程式) 遷移率 (22), (26) 式および (27), (28) 式を用いると, 確率的差分 Lyapunov 方程式 (18) はマスター方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_d}{\partial t}(x, t) = & - \sum_{x_d' \in M_d} \{ p_{x_d, x_d'}^b V_d(x_d', t) \\ & + p_{x_d', x_d}^\# V_d(x_d, t) \} \end{aligned} \quad (29)$$

と一致する．

(証明) (12)-(16) 式および遷移率 (22)-(25) 式を用いて $\mathcal{L}_d V(x_d, t)$ を整理すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d V(x_d, t) = & p_{x_d, x_d}^b V_d(x_d, t) \\ & + \sum_{i=1}^n \left[p_{x_d, x_d + \delta e_i}^b (V_d(x_d + \delta e_i, t) \right. \\ & + p_{x_d, x_d - \delta e_i}^b V_d(x_d - \delta e_i, t) \\ & + \sum_{j \neq i} \{ p_{x_d, x_d + \delta e_i + \delta e_j}^b V_d(x_d + \delta e_i + \delta e_j, t) \\ & + p_{x_d, x_d - \delta e_i - \delta e_j}^b V_d(x_d - \delta e_i - \delta e_j, t) \\ & + p_{x_d, x_d + \delta e_i - \delta e_j}^b V_d(x_d + \delta e_i - \delta e_j, t) \\ & \left. + p_{x_d, x_d - \delta e_i + \delta e_j}^b V_d(x_d - \delta e_i + \delta e_j, t) \} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

となる．ここで, (26) 式を (30) 式に代入すると

$$\mathcal{L}_d V_d(x_d, t) = \sum_{x_d' \in M_d} p_{x_d, x_d'} V_d(x_d', t) \quad (31)$$

が得られる．また, (27), (28) 式より,

$$\sum_{x_d' \in M_d} p_{x_d', x_d}^\# V_d(x_d, t) = q(x_d) V_d(x_d, t) \quad (32)$$

となる．(31) 式, (32) 式を確率的差分 Lyapunov 方程式 (18) に代入することにより, マスター方程式 (29) が導かれる．

参考文献 [21] では確定システムを対象としていたのですが, 本論文では確率システムを対象としているので, $a(x(t))$ が 0 でない場合も考慮に入れている．

3.3 Markov 過程の量子化

(29) 式を量子力学的形式を用いて表現するために, 以下を定義する．

【定義 7】(ブラ・ケット記法) 状態空間 M_d における各要素を正規直交基底として持つ可分な複素 Hilbert 空間 $\mathbb{H}$ を考える．空間 $\mathbb{H}$ 上のベクトルをケットベクトルといい, $|\dots\rangle$ で表す．また, $\mathbb{H}$ と双対な空間 $\mathbb{H}^*$ 上のベクトルをブラベクトルといい, $\langle \dots|$ で表す．さらに, ブラベクトルとケットベクトルの内積を $\langle \dots | \dots \rangle$ と表記する．

以上を具体的に表現すると, 以下のようになる．

任意の複素関数 $\psi_1, \psi_2 : M_d \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi_1(x_d)$ の複素共役 $\psi_1^*(x_d)$, および任意の演算子 $\mathcal{O}$ について

$$\langle \psi_1 | \mathcal{O} | \psi_2 \rangle = \sum_{x_d' \in M_d} \psi_1^*(x_d') (\mathcal{O} \psi_2)(x_d') \quad (33)$$

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \sum_{x_d' \in M_d} \psi_1^*(x_d') \psi_2(x_d') \quad (34)$$

$$\langle x_d | \psi_1 \rangle = \psi_1(x_d) \quad (35)$$

$$\langle x_d | x_d' \rangle = \delta_{x_d, x_d'} \quad (36)$$

となる。
つぎに、

$$|\bar{V}(t)\rangle := \sum_{x_d \in M_d} V_d(x_d, t) |x_d\rangle \quad (37)$$

を定義すると、次式が得られる。

$$V_d(x_d, t) = \langle x_d | \bar{V}(t) \rangle \quad (38)$$

【定義 8】(Hamiltonian 演算子) 線形演算子 $\mathcal{H}$ を、

$$\langle x_d | \mathcal{H} = \sum_{x_d' \in M_d} \{p_{x_d', x_d}^b \langle x_d' | + p_{x_d, x_d'}^\sharp \langle x_d | \} \quad (39)$$

を満たす演算子として定義する。ただし、 p^b は (22)-(26) 式、 $p^\sharp$ は (27), (28) 式を満たす。このとき、 $\mathcal{H}$ を Hamiltonian 演算子という。

【定義 9】(Schrödinger-like 方程式) 偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} |\bar{V}(t)\rangle = -\mathcal{H} |\bar{V}(t)\rangle \quad (40)$$

を、Schrödinger-like 方程式という。

以上を用いて、つぎの補題が導かれる。

【補題 3】(Markov 過程の量子化 [1, 14]) マスター方程式 (29) は、Schrödinger-like 方程式 (40) と一致する。

(証明) マスター方程式 (29) に (38) 式を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \langle x_d | \frac{\partial}{\partial t} |\bar{V}(t)\rangle &= \sum_{x_d' \in M_d} \left\{ p_{x_d', x_d}^b \langle x_d' | + p_{x_d, x_d'}^\sharp \langle x_d | \right\} |\bar{V}(t)\rangle \end{aligned} \quad (41)$$

となるので、右辺に (39) 式を代入することで、

$$\langle x_d | \frac{\partial}{\partial t} |\bar{V}(t)\rangle = \langle x_d | \mathcal{H} |\bar{V}(t)\rangle \quad (42)$$

が得られる。この式はすべての $x_d \in M_d$ について成り立つので、Schrödinger-like 方程式 (40) が成り立つ。

3.4 確率的差分 Lyapunov 方程式の解

虚数単位を $\mathbf{i}$ とし、 $j \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ 、 $E_{jR}, E_{jI} \in \mathbb{R}$ 、 $\phi_{jR}, \phi_{jI} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ とする。Hamiltonian 演算子 $\mathcal{H}$ の固有値を

$$E_j := E_{jR} + \mathbf{i}E_{jI}, \quad E_j^* := E_{jR} - \mathbf{i}E_{jI} \quad (43)$$

とする。ただし、 $|E_0| \leq |E_1| \leq |E_2| \cdots$ とし、 E_j, E_j^* にそれぞれ対応した固有関数 $\phi_j(x)$ 、 $\phi_j^*(x)$ を

$$\phi_j(x) := \phi_{jR}(x) + \mathbf{i}\phi_{jI}(x), \quad \phi_j^*(x) := \phi_{jR}(x) - \mathbf{i}\phi_{jI}(x) \quad (44)$$

とする。このとき、つぎの命題が成り立つ。

【命題 1】遷移率 (22)-(26) 式、(27), (28) 式、および (39) 式で定義される Hamiltonian 演算子 $\mathcal{H}$ を用いると、確率的差分 Lyapunov 方程式 (18) の一般解は

$$V^\natural(x_d, t) = \sum_{j \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \{C_j e^{-E_j t} \phi_j(x_d) + C_j^* e^{-E_j^* t} \phi_j^*(x_d)\} \quad (45)$$

となる。ただし、 $C_j \in \mathbb{C}$ は任意定数であり、 C_j^* は C_j の複素共役である。

(証明) Schrödinger-like 方程式 (40) は線形偏微分方程式なので、その一般解 $V^\natural(x_d, t)$ は、Hamiltonian 演算子 $\mathcal{H}$ の固有値 (43) 式および固有関数 (44) 式を用いて

$$V^\natural(x_d, t) = \sum_{j \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \{C_j e^{-E_j t} \phi_j(x_d) + D_j e^{-E_j^* t} \phi_j^*(x_d)\} \quad (46)$$

と表すことができる。ただし、 $C_j, D_j \in \mathbb{C}$ は任意定数である。いっぽう、補題 2, 3 より、確率的差分 Lyapunov 方程式 (18) と Schrödinger-like 方程式 (40) は一致する。そして、(18) 式の解は $\mathbb{R}$ を値域としてもつので、 $D_j = C_j^*$ とならなければならない。したがって、(45) 式は、(18) 式の一般解である。

以上の議論により、確率的差分 Lyapunov 方程式 (18) の解が Schrödinger-like 方程式 (40) の実数解となることを示した。

4. 確率的 Lyapunov 関数の構築法

本章では、Markov 過程の量子化を用いた確率的 Lyapunov 関数の近似的構築法を提案する。具体的には、Hamiltonian 演算子の固有値および固有関数を用いた関数

$$W^\natural(x_d) := \sum_{j \in \mathbb{N}_{\geq 0}} (C_j \phi_j(x_d) + C_j^* \phi_j^*(x_d)) \quad (47)$$

が、つぎで定義する確率的離散 Lyapunov 関数となる十分条件を示し、まとめる。

【定義 10】(確率的離散 Lyapunov 関数) 確率システム (1) において、スカラ関数 $W_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が非負となる空間が存在し、その部分空間を $Q_m^\natural = \{x | W_d(x) < m, m \in \mathbb{R}_{>0}\}$ とする。 $W_d(x)$ が

$$\mathcal{L}_d W_d(x) \leq 0, \quad x \in Q_m^\natural \quad (48)$$

を満たすとき、 $W_d(x)$ を確率的離散 Lyapunov 関数という。

確率的離散 Lyapunov 関数の成立条件 (48) 式は、確率的 Lyapunov 関数の成立条件 (5) 式において、微分生成演算子 $\mathcal{L}$ を差分生成演算子 $\mathcal{L}_d$ で置き換えたものである。したがって、 $W_d(x)$ は $W(x)$ の近似関数として意味を持つと思われるが、明確にはなっていない。このことは、以下のようにまとめられる。

(注意 3) 定義 10 において、 $\delta \rightarrow 0$ としたとき、 $\mathcal{L}_d \rightarrow \mathcal{L}$ となる。また、このとき、離散関数 $W_d(x_d)$ の極限 $W(x)$ が存在し、さらに連続空間 $Q_m \supset Q_m^\natural$ 上で連続な非負関数となるならば、 $W(x)$ は確率的 Lyapunov 関数となる。

しかし、本提案手法で得られた離散関数 $W^b(x_d)$ は、可分複素 Hilbert 空間 $\mathbb{H}$ およびその双対空間 $\mathbb{H}^*$ 上のベクトル $|\phi_j(x_d)\rangle$ および $|\phi_j^*(x_d)\rangle$ から構成された関数 $\phi_j(x_d)$ および $\phi_j^*(x_d)$ から成る。これらの関数が連続となる場合とは、すなわち Schrödinger-like 方程式 (40) における Hamiltonian 演算子 $\mathcal{H}$ が連続固有値 (連続スペクトル) をとる場合である。このとき、対応する固有ケット $|\phi_j(x_d)\rangle$ および $|\phi_j^*(x_d)\rangle$ の張る空間は、空間 $\mathbb{H}$ および $\mathbb{H}^*$ に属さないことが知られている¹。したがって、関数 $W^b(x_d)$ が非負となる空間が存在する場合、 $\delta \rightarrow 0$ における $W_d(x_d)$ の極限が存在して確率的 Lyapunov 関数となるかについては高度な議論を要する。この問題については今後の課題とする。

4.1 十分条件

(47) 式で定義された関数 $W^b(x_d)$ が、原点を含む空でない領域において確率的離散 Lyapunov 関数となる条件について議論する。

まず、以下の関数を定義する。

$$W_j^b(x_d) := C_j \phi_j(x_d) + C_j^* \phi_j^*(x_d) \quad (49)$$

$$W_j^\sharp(x_d) := -i(C_j \phi_j(x_d) - C_j^* \phi_j^*(x_d)) \quad (50)$$

ただし、 $j \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ とする。

(仮定 1) 時不変関数 $W^b(x_d)$ について、つぎの条件をすべて満たすような任意定数の組 $(C_0, C_1, \dots)$ が存在する。

- (1) 関数 $W^b(x_d)$ が原点を含む空でない領域 $M_d^b \subset M_d$ において、正定関数となる。
- (2) 任意の $x_d \in M_d$ について、

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_{\geq 0}} (|W_j^\sharp(x_d)| + |W_j^b(x_d)|) \leq K W^b(x_d) \quad (51)$$

を満たす実定数 K が存在する。

【定理 2】 仮定 1 が満たされているものとし、

$$N^b := \{j | C_j \neq 0, j \in \mathbb{N}_{\geq 0}\} \quad (52)$$

とする。このとき、

$$K \max_{j \in N^b} (|E_{jR}|, |E_{jI}|) \leq q(x_d), \forall x_d \in M_d^b \quad (53)$$

が成り立てば、関数 $W^b(x_d)$ は M_d^b において確率的離散 Lyapunov 関数となる。

(証明) (43) 式, (44) 式および

$$C_j := k_j(\cos \mu_j + i \sin \mu_j), \quad k_j, \mu_j \in \mathbb{R} \quad (54)$$

を用いると、

$$V^b(x_d, t) = \sum_{j \in N^b} e^{-E_{jR}t} k_j \{ \phi_{jR}(x_d) \cos(\mu_j - E_{jI}t) - \phi_{jI}(x_d) \sin(\mu_j - E_{jI}t) \} \quad (55)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^b}{\partial t}(x_d, t) = & -2 \sum_{j \in N^b} e^{-E_{jR}t} k_j \{ (E_{jR} \phi_{jR}(x_d) \\ & - E_{jI} \phi_{jI}(x_d)) \cos(\mu_j - E_{jI}t) - (E_{jI} \phi_{jR}(x_d) \\ & + E_{jR} \phi_{jI}(x_d)) \sin(\mu_j - E_{jI}t) \} \end{aligned} \quad (56)$$

および

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d V^b(x_d, t) = & 2 \sum_{j \in N^b} e^{-E_{jR}t} k_j \\ & \times \{ \mathcal{L}_d \phi_{jR}(x_d, t) \cos(\mu_j - E_{jI}t) \\ & - \mathcal{L}_d \phi_{jI}(x_d, t) \sin(\mu_j - E_{jI}t) \} \end{aligned} \quad (57)$$

が得られる。定理 1 より、 $V^b(x, t)$ は確率的差分 Lyapunov 方程式 (18) の解なので、(55)-(57) 式を (18) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d \phi_{jR}(x_d, t) = & E_{jR} \phi_{jR}(x_d) \\ & - E_{jI} \phi_{jI}(x_d) - q(x_d) \phi_{jR}(x_d) \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d \phi_{jI}(x_d, t) = & E_{jI} \phi_{jR}(x_d) \\ & + E_{jR} \phi_{jI}(x_d) - q(x_d) \phi_{jI}(x_d) \end{aligned} \quad (59)$$

を得る。いっぽう、関数 $W(x_d)$ については

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d W^b(x_d) = & 2 \sum_{j \in N^b} k_j \\ & \times (\cos \mu_j \mathcal{L}_d \phi_{jR}(x_d) - \sin \mu_j \mathcal{L}_d \phi_{jI}(x_d)) \end{aligned} \quad (60)$$

を得る。(58) 式, (59) 式を (60) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d W^b(x_d) = & -q(x) W(x_d) \\ & + \sum_{j \in N^b} \{ E_{jR} W^b(x_d) - E_{jI} W^\sharp(x_d) \} \end{aligned} \quad (61)$$

が導かれる。ここで、(51) 式を満たす K を用いると

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in N^b} \{ E_{jR} W^b(x_d) - E_{jI} W^\sharp(x_d) \} \\ & \leq \sum_{j \in N^b} \{ |E_{jR}| |W^b(x_d)| + |E_{jI}| |W^\sharp(x_d)| \} \\ & \leq K \max_{j \in N^b} \sum_{j \in N^b} (|W^b(x_d)| + |W^\sharp(x_d)|) \\ & \leq K \max_{j \in N^b} (|E_{jR}|, |E_{jI}|) \end{aligned} \quad (62)$$

が得られるので、これを (61) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_d W^b(x_d) \\ & \leq \left\{ -q(x_d) + K \max_{j \in N^b} (|E_{jR}|, |E_{jI}|) \right\} W^b(x_d) \end{aligned} \quad (63)$$

となる。したがって、定理が成り立つ。

よって、仮定 1 および (53) 式を満たすような未定定数

¹Dirac のデルタ関数が $\mathbb{H}$ 上で定義できないため。この問題に対しては、たとえば rigged Hilbert space を用いた議論があるが [11]、本論文での問題に適用できるかは検討が必要である。

の組 $(C_0, C_1, \dots)$ を見つけることができれば、確率的離散 Lyapunov 関数を得ることができる。

4.2 確率的離散 Lyapunov 関数の構築法

本章の結果を用いて、確率的離散 Lyapunov 関数の構築法を提案する。

- (1) 計算領域および状態の刻み幅 δ を定める。
- (2) 関数 $q(x)$ を設定する。
- (3) Hamiltonian 演算子 $\mathcal{H}$ の固有値問題を解く。
- (4) 仮定 1 および (53) 式を満たす定数 $C_0, C_1, \dots$ を求める。

これまでの議論における状態空間 M_d は非有界であるため、Hamiltonian 演算子 $\mathcal{H}$ の固有値問題を実際に解くことは困難である。しかし、計算する状態空間を有界な部分空間に限定したうえで Schrödinger-like 方程式 (40) と同値な行列方程式を求めれば、有限行列として導出される Hamiltonian 演算子が (26) 式より疎行列となり、比較的容易に解ける問題となる。詳しくは参考文献 [21]，5.4 節を参照されたい。

本論文では、確率的離散 Lyapunov 関数 $W_d(x_d)$ が確率的 Lyapunov 関数 $W(x)$ の近似関数となるとして議論を行っているが、この正当性については注意 3 で言及した検討課題を解決する必要がある。また、本提案手法により得られた近似解がどの程度の近似誤差を含んでいるかについては現在検討中である。

5. 数値例

本提案手法が有用であることを、単純なモデルを用いて示す。2 次の確率システム

$$\begin{aligned} dx_1 &= a_1 x_2 dt \\ dx_2 &= -(a_2 \sin x_1 + a_3 x_2) dt + a_4 x_2 dw \end{aligned} \quad (64)$$

についての確率的離散 Lyapunov 関数を求める。ここで、各定数を $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1/5$ ，計算範囲を $-1 \leq x_1 \leq 1$, $-1 \leq x_2 \leq 1$ ，格子点数を 21×21 ，正定関数 $q(x) = 1$ とする。

4.2 節にしたがって数値計算を行った結果、関数 W_d は Fig. 1 となった。また、 $\mathcal{L}W_d$ は双線形近似¹を用いて計算すると、Fig. 2 となった。領域 Ω (図中網掛部分) の原点以外において $W_d > 0$ および $\mathcal{L}W_d < 0$ となっており、かつ原点では $W_d = 0$ および $\mathcal{L}W_d = 0$ となっているので、 W_d は確率的離散 Lyapunov 関数である。なお、Fig. 2 中 $(x_1, x_2) = (-0.5, 1.0), (-0.6, 1.0)$ において $\mathcal{L}W(x_d)$ の値が大きくなっているが、負値を保っている。

6. おわりに

本論文では、Markov 過程の量子化を用いた Lyapunov 関数の近似的構築法 [21] を伊藤型確率微分方程式系に適

Fig. 1 Approximate stochastic Lyapunov function

Fig. 2 Approximate $\mathcal{L}W(x_d)$

用することで、確率的 Lyapunov 関数の近似的構築法へと拡張した。

提案手法の大きな特徴の一つは、確率的 Lyapunov 関数の構築問題が Schrödinger-like 方程式における固有関数の重ね合わせの問題に置き換わることである。いま一つは、有限領域での近似計算における境界値に対する条件（たとえば Neumann 条件）を課さずに済むことにある。これらの性質により、本手法は、値の発散を引き起こさずに安定な部分領域を計算できるという利点をもつ。

閉ループ制御系に対して本手法を適用すると、Sontag 型の制御則 [16] を構築することができる。したがって、本手法は逆最適制御問題を解くツールとなりえる。確率システムにおける Sontag 型制御則については Deng ら [5] を参照されたい。

謝 辞

最後に、Markov 過程の量子化についての参考文献 [14] をご紹介頂いた東京大学の西成活裕准教授、本論文について多くの貴重なご意見を頂いた奈良先端科学技術大学院大学の中村文一助教および同大学の中村奈美研究員に深く感謝致します。

なお、本研究の一部は、平成 19 年度～21 年度日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (C)19560435 の助成を受けて行われた。

¹ 格子点の値を、隣接する四つの格子点の内分点と考えて求めた近似値。

参 考 文 献

- [1] F. C. Alcaraz, M. Droz, M. Henkel and V. Rittenberg: Reaction-diffusion processes, critical dynamics and quantum chains; *Annals of Physics*, Vol. 230, No. 2, pp. 250–302 (1994)
- [2] M. Bardi and A. Cesaroni: Almost sure stabilizability of controlled degenerate diffusions; *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 44, No. 1, pp. 75–98 (2005)
- [3] R. S. Bucy: Stability and positive supermartingales; *Journal of Differential Equations*, Vol. 1, No. 2, pp. 151–155 (1965)
- [4] A. Cesaroni: *A converse Lyapunov theorem for almost sure stabilizability*, preprint (2004)
- [5] H. Deng, M. Krstić and R. J. Williams: Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, No. 6, pp. 1237–1253 (2001)
- [6] W. H. Fleming and H. M. Soner: *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag (1993)
- [7] R. Z. Has'minskiĭ: *Stochastic Stability of Differential Equations*, Sijthoff & Noordhoff (1980)
- [8] H. K. Khalil: *Nonlinear Systems, Second Edition*, Prentice Hall (1996)
- [9] H. J. Kushner: *Stochastic Stability and Control*, Academic Press (1967)
- [10] H. J. Kushner: *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*, Academic Press (1977)
- [11] R. de la Madrid: The role of the rigged Hilbert space in quantum mechanics; *European Journal of Physics*, Vol. 26, pp. 287–312 (2005)
- [12] X. Mao: *Stability of Stochastic Differential Equations with Respect to Semimartingales*, Longman Scientific & Technical (1991)
- [13] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery: *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing Second Edition*, Cambridge University Press (1993)
- [14] N. Rajewsky, L. Santen, A. Schadschneider and M. Schreckenberg: The asymmetric exclusion process: comparison of update procedures; *Journal of Statistical Physics*, Vol. 92, pp. 151–194 (1998)
- [15] S. Sastry: *Nonlinear Systems : Analysis, Stability, and Control*, Springer (1999)
- [16] E. D. Sontag: *Mathematical Control Theory*, Springer (1998)
- [17] エクセンドール: 確率微分方程式-入門から応用まで, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1999)
- [18] 大住: 確率システム入門, 朝倉書店 (2002)
- [19] 国松, 浜田: 集中・分布システムの安定論, 実教出版 (1988)
- [20] 砂原: 確率システム理論, 電子通信学会 (1979)
- [21] 西村, 山下: Markov 過程の量子化を用いた Lyapunov 関数の構築; 計測自動制御学会論文集, Vol. 44, No. 1, pp. 26–35 (2008)
- [22] 深尾: 分散システム論 - 熱力学的システム論 -, 昭晃堂 (1987)

著 者 略 歴

にし むら ゆう き
西 村 悠 樹 (正会員)

2009 年北海道大学大学院情報科学研究科システム情報科学専攻博士後期課程修了。同年山口大学大学院理工学研究科助教, 現在に至る。非線形制御理論の研究に従事。博士(情報科学)。計測自動制御学会および電気学会の会員。

やま し た ゆう 裕
山 下 裕 (正会員)

1986 年北海道大学大学院工学研究科修士課程修了, 1988 年同博士課程退学。同年北海道大学工学部助手, 1996 年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授, 2004 年北海道大学大学院情報科学研究科教授, 現在に至る。非線形制御理論などの研究に従事。博士(工学)。電子情報通信学会, 化学工学会などの会員。