アファイン拘束を受ける非ホロノミックハミルトニアンシステムのモデリングと受動性解析*

甲斐 健也[†]

Modeling and Passivity Analysis of Nonholonomic Hamiltonian Systems with Affine Constraints*

Tatsuya KAI[†]

In this paper, we introduce and analyze Hamiltonian systems subject to nonholonomic affine constraints. We first sum up some concepts of Hamiltonian systems defined on both the phase space and the expanded phase space. Next, we derive nonholonomic Hamiltonian systems with affine constraints (NHSAC) by using a transformation and reduction on the expanded phase space. Then, passivity of the NHSAC with the control input term and the output equation is investigated. Finally, a coin on a rotating table is illustrated to confirm the results as a physical example.

1. はじめに

近年, 制御工学やロボット工学の分野において, 非ホロノミックシステムの研究が幅広く行われている [8, 17]. それらの研究のほとんどは, 速度に線形な「線形拘束」を扱っており, 線形拘束を受けるシステムには以下のような特徴が一般的に知られている [1, 2, 8, 17]. (i) 線形近似システムが不可制御, (ii) なめらかな非線形状態フィードバックで安定化不可能. そのため, これらのシステムの制御は難しく, さまざまな制御則が提案されている.

一方, 速度にアファインな「アファイン拘束」も存在し, これは線形拘束を含むより広いクラスの拘束条件である. 初期角運動量を持つ宇宙ロボット・流れる川の上のボート・回転盤上の球またはコインなどは, アファイン拘束を受けるシステムの一例である (Fig. 1). 筆者らはこれまで, アファイン拘束に関する微分幾何学的・制御論的な研究を行ってきた [10–14]. とくに [12, 13] では, アファイン拘束を受ける非ホロノミック運動学/動力学システムを導出し, 非線形制御理論に基づく解析を行った. その結果, (a) 線形近似システムが可制御になる場合がある, (b) なめらかな非線形状態フィードバックで安定化の可能性がある, などの線形拘束の場合では見ら

れなかったような新しい性質を示した. アファイン拘束を受ける動力学システム [13] はラグランジュ力学に基づくアプローチによって導出されたものであるが, 動力学モデリングの別方法として, ハミルトン力学によるアプローチも存在する. ラグランジュ形式・ハミルトン形式のそれぞれのシステムは, ルジャンドル変換によって互いに等価である. しかし, ハミルトン形式は正準座標による正準方程式 (ハミルトニアンシステム) で記述され, 正準座標の対称性・正準変換によるシステムの特徴の不変性などを持ち, さらにシステムのエネルギーに関する受動性を陽に表しているなど, ラグランジュ形式よりも優れている点が多い. van der Schaft らは, 線形拘束を受ける非ホロノミックハミルトニアンシステムを導出した [3]. また, Fujimoto らは線形拘束を受ける非ホロノミックハミルトニアンシステムに対して, 一般化正準変換ならびに受動性や Lyapunov 関数に基づいた制御則を提案し, 有効性を示している [5, 9]. したがって, アファイン拘束を受けるシステムの制御でも, このようなハミルトン形式のアプローチが有効であると考えられる.

そこで本論文では, ハミルトニアンシステムのアファイン拘束を受ける場合への拡張ならびに解析を目的としている. まず 2. では, 本論文を通して扱う非ホロノミックなアファイン拘束について概説する. つぎに 3. では, 相空間ならびに拡大相空間におけるハミルトニアンシステムについて説明を行い, それらに基づいてアファイン拘束を受ける非ホロノミックハミルトニアンシステム (NHSAC) を導出する. さらに制御入力項と出力方程式

* 原稿受付 2008 年 12 月 26 日

[†] 大阪大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University; 2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka 565-0871, JAPAN

Key Words: nonholonomic affine constraints, Hamiltonian systems, passivity, coin on rotating table.

Fig. 1 Examples of systems with affine constraints

を加えたNHSACの受動性についても考察する．そして4.では，本論文の結果を物理例である「回転盤上のコイン」に適用し，これまでの議論の検証を行う．

2. 非ホロノミックアファイン拘束

本章では，本論文で扱うアファイン拘束について説明を行う．システムの配位空間である n 次元配位多様体を Q とし，その一般化座標を n 次元列ベクトル $q = [q_1 \cdots q_n]^T \in \mathbf{R}^n$ のように記述して，配位多様体の局所座標系と同一視して考える．また一般化速度を $\dot{q} = [\dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n]^T \in \mathbf{R}^n$ で表す．本論文では $n-m$ ($m < n$) 個の1階常微分方程式の組で表されるアファイン拘束

$$A(q) + B(q)\dot{q} = 0 \quad (1)$$

を考える．ここで $A(q) \in \mathbf{R}^m$ はアファイン項とよばれ，また $B(q) \in \mathbf{R}^{(n-m) \times n}$ である．アファイン拘束(1)に関して，独立性の十分条件

$$\text{rank} B(q) = n - m, \forall q \in Q \quad (2)$$

を仮定する．

つぎに，アファイン拘束の完全非ホロノミック性についてまとめる．アファイン拘束(1)は，幾何学的に二つの組 (D, X) で表すことができる[8,10]．ここで， D は(1)式の $B(q)$ に対する m 個の独立な零化ベクトル $Y_1, \dots, Y_m$ の張る Q 上の m 次元分布，つまり $D := \text{span}\{Y_1, \dots, Y_m\}$ である．また X は成分に関して $A(q) + B(q)X(q) = 0$ を満たす Q 上のベクトル場であり，アファインベクトル場とよばれる．これらのベクトル場 $X, Y_1, \dots, Y_m$ の決め方は一意ではないところに注意する．そして， C_0 をベクトル場 $Y_1, \dots, Y_m$ から成るすべてのLie括弧を含み， $\forall Z \in C_0$ について $[X, Z] \in C_0$ となるような最小のインボリュティブな分布とする．アファイン拘束が完全非ホロノミックであるための必要十分条件は以下のように与えられ[10]，本論文ではこの完全非ホロノミック性を仮定する．

【定理1】 n 次元配位多様体 Q 上のアファイン拘束(1)に対して以下の条件(a), (b)は等価であり，これらが成り立つとき，アファイン拘束は完全非ホロノミックまたは完全非可積分であるとよばれる．

- (a) 第1積分が存在しない．
- (b) 分布 C_0 に関して，

$$\dim C_0(q) = n, \forall q \in Q \quad (3)$$

が成り立つ．

最後に，アファイン変数・非アファイン変数を導入する．一般化座標 q を適当な並べ替えを行うことにより， $q = [q_a^T q_b^T]^T$ のように二つに分ける．ここで， $q_a \in \mathbf{R}^r$ をアファイン変数， $q_b \in \mathbf{R}^{n-r}$ を非アファイン変数とよび，アファイン拘束(1)を以下のように書き換える．

$$A(q) + B_a(q)\dot{q}_a + B_b(q)\dot{q}_b = 0 \quad (4)$$

ここで(4)式に対して，以下の仮定を課すことにする．

(仮定1) アファイン拘束(4)において，以下の(i)–(iv)が成り立つ．

(i) アファイン拘束の数 $n-m$ とアファイン変数の次元 r について，以下が成り立つ．

$$r \leq n - m \quad (5)$$

(ii) アファイン項 A は，非アファイン変数 q_b のみの関数である．

(iii) (4)式において，非アファイン変数の速度を零，つまり $\dot{q}_b = 0$ とした式

$$A(q_b) + B_a(q)\dot{q}_a = 0 \quad (6)$$

が物理的に成り立つ．

(iv) $B_a \in \mathbf{R}^{(n-m) \times r}$ は列フルランク，つまり

$$\text{rank} B_a(q) = r, \forall q \in Q \quad (7)$$

となる．

仮定1 (iii) は，一般化座標のうち，外部から入力を加えなくても，アファイン項の影響によって変化が生じる変数がアファイン変数，ということの意味し，システムの物理的考察と上記の条件によって，一般化座標をアファイン変数と非アファイン変数に一意的に分けることができる．その結果，アファインベクトル場はアファイン拘束の影響を表し，アファイン変数へのみ変化を与えなければならないので， $X = [X_a^T X_b^T]^T \in \mathbf{R}^n$, $X_a \in \mathbf{R}^r$, $X_b \in \mathbf{R}^{n-r}$ とすると， $A + B_a X_a = 0$, $X_b = 0_{n-r}$ を満たさなければならない，一般的にアファインベクトル場が

$$X = \begin{bmatrix} -B_a(q)^\dagger A(q_b) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

のように一意に定まる．ここで $B_a^\dagger := (B_a^T B_a)^{-1} B_a^T$ とおいた．具体例は4.を参照されたい．

3. アファイン拘束を受ける非ホロノミックハミルトニアンシステム

3.1 相空間上のハミルトニアンシステム

まず本節では、システムの設定ならびに相空間におけるハミルトニアンシステムの概説を行う。シンプレクティック多様体・ポアソン多様体・ハミルトン力学の詳細は [15, 16] などを参照されたい。\$Q\$ を \$n\$ 次元配位多様体とし、その局所座標系である一般化座標を \$q = [q^1 \cdots q^n]^T \in \mathbb{R}^n\$ で表す。そして、\$T^*Q\$ を \$Q\$ の余接バンドルとし、一般化運動量を \$p = [p_1 \cdots p_n]^T \in \mathbb{R}^n\$ とする。この一般化運動量 \$p\$ は基底 \$dq^k\$ (\$k = 1, \dots, n\$) を用いて正準 1 形式

$$\Theta := \sum_{k=1}^n p_k dq^k \quad (9)$$

で表されているところに注意する。すると、\$T^*Q\$ は相空間とよばれる \$2n\$ 次元多様体であり、一般化座標と一般化運動量の組 \$(q, p)\$ で記述される。そして、正準 2 形式

$$\Omega := -d\Theta = \sum_{k=1}^n dq^k \wedge dp_k \quad (10)$$

を定義すると、これは閉じており (\$d\$ を外微分演算子とすると \$d\Omega = 0\$)、非退化で交代 2 形式であるので、組 \$(T^*Q, \Omega)\$ はシンプレクティック多様体である。ゆえに、\$T^*Q\$ はポアソン多様体でもあるので、\$T^*Q\$ 上の任意の関数 \$f, g: T^*Q \to \mathbb{R}\$ に対して、ポアソン括弧

$$\{f, g\} := \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q^k} \right) \quad (11)$$

が備わっている。関数 \$f, g, h: T^*Q \to \mathbb{R}\$、実定数 \$a, b \in \mathbb{R}\$ に対し、ポアソン括弧は (i) 歪対称性: \$\{f, g\} = -\{g, f\}\$、(ii) 双線形性: \$\{f, ag + bh\} = a\{f, g\} + b\{f, h\}\$、(iii) ヤコビの恒等式: \$\{\{f, g\}, h\} = \{g, h\}, f\} + \{f, h\}, g\}\$、(iv) ライブニッツの規則: \$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}\$ を満たす。なお、ポアソン括弧 (11) は関数 \$f, g\$ のハミルトニアンベクトル場をそれぞれ \$X_f, X_g\$ として、\$\{f, g\} := \Omega(X_f, X_g)\$ のようにも定義することができる。

システムのハミルトニアンを時間変数 \$t\$ にも依存する関数として \$H(t, q, p)\$ で表す。すると \$T^*Q\$ 上でハミルトニアンシステム

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{bmatrix}}_J \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (12)$$

が定義される。ここで、(12) 式の係数行列 \$J\$ はポアソン構造行列とよばれ、これはポアソン括弧を用いて \$(q, p)\$ が正準座標であるという性質から、

$$J = \begin{bmatrix} (\{q^i, q^j\})_{ij} & (\{q^i, p_j\})_{ij} \\ (\{p_i, q^j\})_{ij} & (\{p_i, p_j\})_{ij} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (13)$$

より導出されるところに注意する。

3.2 拡大相空間上のハミルトニアンシステム

アファイン拘束 (1) は、微分 1 形式として、

$$A(q)dt + B(q)dq = 0 \quad (14)$$

とも書くことができ、時間変数 \$t\$ が陽に表れる。したがって、アファイン拘束を受けるシステムを余接バンドルで導出する場合には、時間変数 \$t\$ の空間 \$\mathbb{R}\$ をも含めた空間 \$\mathbb{R} \times Q\$ まで拡大して考えなければならないことがわかる。そこで本節では、時間変数も含めた拡大相空間を考え、その上で拡大されたハミルトニアンシステムを考える。

まず時間変数 \$t \in \mathbb{R}\$ を \$q^0 := t\$ とおき、時間も新しい変数の一つと考える (Fig. 2 (a))。さらに新しい時間変数を \$s \in \mathbb{R}\$ と記述し、これは実際は \$t\$ と一致している。時間変数を含めた配位多様体を拡大配位多様体とよび、\$\bar{Q} := \mathbb{R} \times Q\$ と書く。\$q^0\$ に対応する運動量はハミルトニアン \$H\$ を用いて、\$p_0 := -H\$ で与えられることがわかっている [4, 6, 7, 16]。つまり、\$2n+2\$ 次元拡大相空間 \$T^*\bar{Q}\$ の正準座標は \$\bar{q} := [q^0, q^1, \dots, q^n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}\$ と \$\bar{p} := [p_0, p_1, \dots, p_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}\$ の組 \$(\bar{q}, \bar{p})\$ で与えられる (Fig. 2 (b))。この \$\bar{p}\$ は基底 \$d\bar{q}^k\$ (\$k = 0, 1, \dots, n\$) を用いて拡大正準 1 形式

$$\bar{\Theta} := \sum_{k=0}^n p_k d\bar{q}^k = p_0 dq^0 + \Theta \quad (15)$$

で表される。そして、(10) 式と同様に拡大正準 2 形式

$$\bar{\Omega} := -d\bar{\Theta} = \sum_{k=0}^n d\bar{q}^k \wedge dp_k = dq^0 \wedge dp_0 + \Omega \quad (16)$$

を定義すると、これもまた閉じた非退化で交代 2 形式であるので、組 \$(T^*\bar{Q}, \bar{\Omega})\$ もシンプレクティック多様体である。したがって、\$T^*\bar{Q}\$ もまたポアソン多様体であるので、\$T^*\bar{Q}\$ 上の任意の関数 \$\bar{f}, \bar{g}: T^*\bar{Q} \to \mathbb{R}\$ に対して、拡大ポアソン括弧

$$\{\bar{f}, \bar{g}\} := \sum_{k=0}^n \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}^k} \frac{\partial \bar{g}}{\partial p_k} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial p_k} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{q}^k} \right) \quad (17)$$

を用いることができる (簡略化のため \$T^*Q\$ 上のポアソン括弧 (11) と同じ記号を用いる)。拡大ポアソン括弧も \$T^*Q\$ 上のポアソン括弧 (11) の性質 (i)-(iv) を同様に満たすことが確認できる。

さらに \$T^*\bar{Q}\$ 上において拡大ハミルトニアン \$\bar{H}\$ を

$$\bar{H}(q^0, q, p_0, p) := H(q^0, q, p) + p_0 \quad (18)$$

のように定義すると、\$T^*\bar{Q}\$ 上で拡大ハミルトニアンシステム

Fig. 2 Diagram for derivation of NHSAC

$$\begin{bmatrix} q^{0'} \\ q' \\ p'_0 \\ p' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0_n & 1 & 0_n \\ 0_n & \bar{O}_n & 0_n & \bar{I}_n \\ -1 & 0_n & 0 & 0_n \\ 0_n & -I_n & 0_n & \bar{O}_n \end{bmatrix}}_{\bar{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{H}}{\partial q^0} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial q} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_0} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (19)$$

を定義することができる [4,6,7,16]．ここでダッシュ'は時間変数 s による微分を表している．(19) 式における拡大ポアソン構造行列 $\bar{J}$ は拡大ポアソン括弧を用いて、

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \{q^0, q^0\} & \{q^0, q^j\}_{i,j} & \{q^0, p_0\} & \{q^0, p_j\}_{i,j} \\ \{q^i, q^0\}_{i,j} & \{q^i, q^j\}_{i,j} & \{q^i, p_0\}_{i,j} & \{q^i, p_j\}_{i,j} \\ \{p_0, q^0\} & \{p_0, q^j\}_{i,j} & \{p_0, p_0\} & \{p_0, p_j\}_{i,j} \\ \{p_i, q^0\}_{i,j} & \{p_i, q^j\}_{i,j} & \{p_i, p_0\}_{i,j} & \{p_i, p_j\}_{i,j} \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (20)$$

より導出される．(20) 式の形からもわかるように、(19) 式は T^*Q における通常のハミルトニアンシステム (12) の $T^*\bar{Q}$ への自然な拡張になっている．(19) 式は $2n+2$ 次元拡大相空間 $T^*\bar{Q}$ で記述されているが、定義より

$$p_0 = -H(q^0, q, p) \quad (21)$$

という $2n+1$ 次元の超曲面にシステムの運動が制限されていることがわかる．つまり、システムの空間は $\mathbf{R} \times T^*Q$ で表され、 (q^0, q, p) で記述される．したがって、もしハミルトニアン H が時間に依存しなければ H は常に定数であり、 p_0 が定数の $2n+1$ 次元超平面上を動くことになる．拡大ハミルトニアン (18) はその超面上では $p_0 = -H$ であるので、常に $\bar{H} = 0$ となっていることにも注意する．

3.3 NHSAC の導出

前節までの議論に基づいて、本節ではアファイン拘束を受ける非ホロノミックハミルトニアンシステム (NHSAC) を導出する．簡単のために、ハミルトニアンは時不変である $H(q, p)$ を考える．まず、システムがアファイン拘束 (1) を受けるとすると、 $\lambda \in \mathbf{R}^{n-m}$ をラグランジュ乗数として (19) 式に拘束力の項を加えて、

$$\begin{bmatrix} q^{0'} \\ q' \\ p'_0 \\ p' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0_n & 1 & 0_n \\ 0_n & \bar{O}_n & 0_n & \bar{I}_n \\ -1 & 0_n & 0 & 0_n \\ 0_n & -I_n & 0_n & \bar{O}_n \end{bmatrix}}_{\bar{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{H}}{\partial q^0} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial q} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_0} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0_n \\ A^\top \\ B^\top \end{bmatrix} \lambda \quad (22)$$

となる．つぎに拡大相空間 $T^*\bar{Q}$ において、以下の座標変換 $(q^0, q, p_0, p) \rightarrow (\tilde{q}^0, \tilde{q}, \tilde{p}_0, \tilde{p})$ 、 $\tilde{q}^0 \in \mathbf{R}$ 、 $\tilde{q} \in \mathbf{R}^n$ 、 $\tilde{p}_0 \in \mathbf{R}$ 、 $\tilde{p} \in \mathbf{R}^n$ を考える (Fig. 2 (c))．

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}^0 \\ \tilde{q} \\ \tilde{p}_0 \\ \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0_n & 0 & 0_n \\ 0_n & \bar{I}_n & 0_n & \bar{O}_n \\ 0 & 0_n & 1 & \bar{X}^\top \\ 0_m & \bar{O}_{m,n} & 0_m & \bar{Y}^\top \\ 0_{n-m} & \bar{O}_{n-m,n} & 0_{n-m} & \bar{B} \end{bmatrix}}_{\bar{M}(q)} \begin{bmatrix} q^0 \\ q \\ p_0 \\ p \end{bmatrix} \quad (23)$$

ここで、 $\tilde{p} := [\tilde{p}_1^\top \tilde{p}_2^\top]^\top$ 、 $\tilde{p}_1 \in \mathbf{R}^m$ 、 $\tilde{p}_2 \in \mathbf{R}^{n-m}$ と分割し、さらに (23) 式による変換後の拡大ハミルトニアン $\bar{H}$ を $\tilde{H}$ とすると、 $\tilde{p}_2$ は

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_2} = 0_{n-m} \quad (24)$$

を満たすと仮定する．また、アファイン拘束に関するベクトル場を $\hat{X}, \hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_m$ と記述し、 $\hat{Y}(q) := [\hat{Y}_1 \cdots \hat{Y}_m]$ とおく．ここで $\hat{Y}$ の定義により、(23) 式の変換行列 $\bar{M}(q)$ は常に正則となる．この座標変換 (23) は後で見るように拡大正準 2 形式 (16) を不変にしないので、正準変換ではないところを留意されたい．(23) 式の逆変換は

$$\begin{bmatrix} q^0 \\ q \\ p_0 \\ p \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0_n & 0 & 0_m & 0_{n-m} \\ 0_n & \bar{I}_n & 0_n & \bar{O}_{n,m} & \bar{O}_{n,n-m} \\ 0 & 0_n & 1 & -\bar{X}^\top \bar{U} & -\bar{X}^\top \bar{V} \\ 0_m & \bar{O}_{m,n} & 0_m & \bar{U} & \bar{V} \end{bmatrix}}_{\bar{M}(\tilde{q})^{-1}} \begin{bmatrix} \tilde{q}^0 \\ \tilde{q} \\ \tilde{p}_0 \\ \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

で与えられ、ここで

$$[U \ V] := \begin{bmatrix} \hat{Y}^\top \\ B \end{bmatrix}^{-1}, U \in \mathbf{R}^{n \times m}, V \in \mathbf{R}^{n \times (n-m)} \quad (26)$$

とおいっている．

座標変換 (23) を用いると，拡大ポアソン構造行列 (20) は計算によって，

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \begin{bmatrix} \{\tilde{q}^0, \tilde{q}^0\} & \{\{\tilde{q}^0, \tilde{q}^j\}\}_j & \{\tilde{q}^0, \tilde{p}_0\} & \{\{\tilde{q}^0, \tilde{p}_j\}\}_j \\ \{\{\tilde{q}^i, \tilde{q}^0\}\}_{i,j} & \{\{\tilde{q}^i, \tilde{q}^j\}\}_{i,j} & \{\{\tilde{q}^i, \tilde{p}_0\}\}_{i,j} & \{\{\tilde{q}^i, \tilde{p}_j\}\}_{i,j} \\ \{\tilde{p}_0, \tilde{q}^0\} & \{\{\tilde{p}_0, \tilde{q}^j\}\}_j & \{\tilde{p}_0, \tilde{p}_0\} & \{\{\tilde{p}_0, \tilde{p}_j\}\}_j \\ \{\{\tilde{p}_i, \tilde{q}^0\}\}_{i,j} & \{\{\tilde{p}_i, \tilde{q}^j\}\}_{i,j} & \{\{\tilde{p}_i, \tilde{p}_0\}\}_{i,j} & \{\{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\}\}_{i,j} \end{bmatrix} \\ &\quad (i, j = 1, \dots, n) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0_n & 1 & 0_m & 0_{n-m} \\ 0_n & O_n & \hat{X} & \hat{Y} & B^\top \\ -1 & -\hat{X}^\top & 0 & -\hat{W}_1^\top & -\hat{W}_2^\top \\ 0_m & -\hat{Y}^\top & \hat{W}_1 & \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ 0_{n-m} & -B & \hat{W}_2 & \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix} \quad (27) \end{aligned}$$

となることが確認できる．ここで B の行ベクトルを $B_1, \dots, B_{n-m}$ として，

$$\begin{aligned} (\hat{W}_1)_i &:= \hat{Y}_i^\top \frac{\partial(\hat{X}^\top p)}{\partial q} - \frac{\partial(\hat{Y}_i^\top p)}{\partial q} \hat{X}, i = 1, \dots, m \\ (\hat{W}_2)_i &:= B_i \frac{\partial(\hat{X}^\top p)}{\partial q} - \frac{\partial(B_i p)}{\partial q} \hat{X}, i = m+1, \dots, n \\ (\hat{Z}_{11})_{i,j} &:= -p^\top [\hat{Y}_i, \hat{Y}_j], i, j = 1, \dots, m \\ (\hat{Z}_{12})_{i,j} &:= -p^\top [\hat{Y}_i, B_j^\top], i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n-m \\ (\hat{Z}_{21})_{i,j} &:= -(\hat{Z}_{12})_{j,i}, i = 1, \dots, n-m, j = 1, \dots, m \\ (\hat{Z}_{22})_{i,j} &:= -p^\top [B_i^\top, B_j^\top], i, j = 1, \dots, n-m \quad (28) \end{aligned}$$

とおいっており ($[\cdot, \cdot]$ はリー括弧を表す)，とくに $\hat{Z}_{11}, \hat{Z}_{22}$ は定義より歪対称行列となる．拡大ハミルトニアン $\tilde{H}$ は座標変換 (23) によって，

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\tilde{q}^0, \tilde{q}, \tilde{p}_0, \tilde{p}) &:= \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}_0 - \hat{X}^\top [U \ V] \tilde{p}, [U \ V] \tilde{p}) \\ &= H(\tilde{q}, [U \ V] \tilde{p}) + \tilde{p}_0 - \hat{X}^\top [U \ V] \tilde{p} \quad (29) \end{aligned}$$

に変換される．したがって，(22) 式は (27), (29) 式を用いて， $2n+2$ 次元拡大相空間 $T^*\bar{Q}$ 上で

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}^{0'} \\ \tilde{q}' \\ \tilde{p}'_0 \\ \tilde{p}'_1 \\ \tilde{p}'_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0_n & 1 & 0_m & 0_{n-m} \\ 0_n & O_n & \hat{X} & \hat{Y} & B^\top \\ -1 & -\hat{X}^\top & 0 & -\hat{W}_1^\top & -\hat{W}_2^\top \\ 0_m & -\hat{Y}^\top & \hat{W}_1 & \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ 0_{n-m} & -B & \hat{W}_2 & \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix}}_{\tilde{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}^0} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_0} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_1} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_2} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ O_{n,n-m} \\ 0 \\ O_{m,n-m} \\ B B^\top \end{bmatrix} \lambda \quad (30)$$

と変換することができる．

ここで (30) 式の低次元化を行う．(30) 式の第 1 式は， t と s を同一視して (23) 式を用いると，

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_0} = \frac{\partial \tilde{q}^0}{\partial s} = \frac{\partial \tilde{q}^0}{\partial t} = \frac{\partial q^0}{\partial t} = 1 \quad (31)$$

を表していることがわかるので， $\tilde{q}^0 = t$ として $\tilde{q}^0$ の 1 次元分を減らすことができる．なお，(31) 式は拡大ハミルトニアン (29) に対して満たされていることに注意する．そして $\tilde{p}_2$ は (24) 式を満たすので，(22) 式の第 5 式は除外することができ， $\tilde{p}_2$ の $n-m$ 次元分も減らすことができる．したがって， $(\tilde{q}, \tilde{p}_0, \tilde{p}_1)$ で記述される $n+m+1$ 次元空間 $\mathcal{X}_0$ を

$$\mathcal{X}_0 := \left\{ (q, p^0, p) \in \mathbf{R} \times T^*Q \mid A(q) \frac{\partial H(t, q, p)}{\partial p_0} + B(q) \frac{\partial H(t, q, p)}{\partial p} = 0 \right\} \quad (32)$$

のように記述すると (Fig. 2 (d))， $T^*\bar{Q}$ 上の (30) 式は $\mathcal{X}_0$ 上で変数 $(\tilde{q}, \tilde{p}_0, \tilde{p}_1)$ を用いて，

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}}_0 \\ \dot{\tilde{p}}_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} O_n & \hat{X} & \hat{Y} \\ -\hat{X}^\top & 0 & -\hat{W}_1^\top \\ -\hat{Y}^\top & \hat{W}_1 & \hat{Z}_{11} \end{bmatrix}}_{\tilde{J}_0(\tilde{q}, \tilde{p}_0, \tilde{p}_1)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_0} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_1} \end{bmatrix} \quad (33)$$

のように表すことができる．そして，この $\mathcal{X}_0$ 上でもアソソ括弧

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\} := \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{q}} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{p}_0} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{p}_1} \right] \tilde{J}_0(\tilde{q}, \tilde{p}_0, \tilde{p}_1) \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{q}} \\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{p}_0} \\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{p}_1} \end{bmatrix} \quad (34)$$

を定義することができ， T^*Q 上のポアソソ括弧の性質 (i) 歪対称性，(ii) 双線形性，(iv) ライブニッツの規則を満たすことが確認できる．しかし，(iii) ヤコビの恒等式は必ずしも成り立たない．ポアソソ多様体は，性質 (i)，(ii)，(iv) のみを満たす場合は特に概ポアソソ多様体とよばれ，非ホロノミックシステムを考える場合において重要な役割を果たす [8]．

そして，さらなる超曲面への低次元化を考える．座標変換 (23) により， $T^*\bar{Q}$ の超曲面 (21) は

$$\tilde{p}_0 = -H(\tilde{q}, [U \ V] \tilde{p}) + \hat{X}^T [U \ V] \tilde{p} =: -\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) \quad (35)$$

となり, $\tilde{p}_0$ が分離されているままであることがわかる. したがって, この $n+m+1$ 次元空間 $\tilde{\mathcal{X}}$ で

$$\tilde{p}_0 = -\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}_1) \quad (36)$$

において, 変数を $(\tilde{q}, \tilde{p}_1)$ としてシステムを考えることによって, さらに $\tilde{p}_0$ の1次元分を減らすことができる. このとき, システムのハミルトニアンは(36)式で定義される $\tilde{H}$ となる. 以上より, $(\tilde{q}, \tilde{p}_1)$ で記述される $n+m$ 次元空間 $\mathcal{X}_0$ を

$$\mathcal{X} := \left\{ (q, p) \in T^*Q \mid A(q) + B(q) \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} = 0 \right\} \quad (37)$$

のように定義すると (Fig. 2 (e)), T^*Q 上の (30) 式は $\mathcal{X}$ 上で以下のように表すことができる.

【定理 2】 (37) 式で定義される $n+m$ 次元空間 $\mathcal{X}$ 上で変数を $\tilde{q} \in \mathbf{R}^n, \tilde{p}_1 \in \mathbf{R}^m$ として, アファイン拘束を受ける非ホロノミックハミルトニアンシステム (Nonholonomic Hamiltonian Systems with Affine Constraints, NHSAC) は,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{X}(\tilde{q}) \\ \hat{W}_1(\tilde{q}, \tilde{p}_1) \end{bmatrix} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} O_n & \hat{Y}(\tilde{q}) \\ -\hat{Y}(\tilde{q})^T & \hat{Z}_{11}(\tilde{q}, \tilde{p}_1) \end{bmatrix}}_{\tilde{J}(\tilde{q}, \tilde{p}_1)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

のように表される. ここで, ハミルトニアン $\tilde{H}$ は (35) 式, $\hat{W}_1, \hat{Z}_{11}$ は (28) 式でそれぞれ定義され, これらは $\mathcal{X}$ 上で $\tilde{q}$ と $\tilde{p}_1$ の関数で表される.

線形拘束の場合のハミルトニアンシステム [3] と比べ, NHSAC (38) にはアファイン拘束に起因する右辺第1項が存在するところが大きな違いである. なおアファイン拘束に関して $A \equiv 0$ つまり $\hat{X} \equiv 0$ とおくことにより, NHSAC (38) は線形拘束の場合のハミルトニアンシステム [3] と一致するところに注意されたい. また, ハミルトニアンの中の慣性行列 G が単位行列の簡単な場合を考えると, (37) 式は $\mathcal{X} = \{(\tilde{q}, \tilde{p}) \mid \tilde{p}_2 = -A(\tilde{q})\}$ と表すことができる. これは [3] で示されている線形拘束の場合における座標変換後の拘束空間 $\mathcal{X} = \{(\tilde{q}, \tilde{p}) \mid \tilde{p}_2 = 0\}$ と一致する.

3.4 NHSAC の受動性

最後に本節では, NHSAC の受動性について考察する. NHSAC (38) には制御入力が含まれていないが, 元のシステム (22) の第4式に制御入力項 $E(q)u, E(q) \in \mathbf{R}^{n \times m}, u \in \mathbf{R}^m$ を加えた場合を考えると, NHSAC (38) は以下のように得られることがわかる.

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{W}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O_n & \hat{Y} \\ -\hat{Y}^T & \hat{Z}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n \\ \hat{Y}^T E \end{bmatrix} u \quad (39)$$

また, 出力 $y \in \mathbf{R}^m$ を

$$y = E^T \hat{Y} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_1} \quad (40)$$

のように設定する. 一般的にハミルトニアンシステムに対して, ハミルトニアン $\tilde{H}$ が準正定関数であり, さらに

$$\dot{\tilde{H}} = \frac{d\tilde{H}}{dt} \leq y^T u \quad (41)$$

が満たされるとき, 受動性を満たすとよばれる. 以下の定理は, NHSAC (39), (40) が受動性を満たすための条件を与える.

【定理 3】 NHSAC (39), (40) が受動性を満たすための必要十分条件は, $\tilde{H}$ が準正定関数であり, かつ

$$\frac{\partial \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}_1)}{\partial \tilde{q}} \hat{X}(\tilde{q}) + \frac{\partial \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}_1)}{\partial \tilde{p}_1} \hat{W}_1(\tilde{q}, \tilde{p}_1) \leq 0 \quad (42)$$

が成り立つことである.

(証明) ハミルトニアン $\tilde{H}$ を NHSAC (39), (40) の解軌道上において時間 t で微分すると,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{H}} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \dot{\tilde{q}} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_1} \dot{\tilde{p}}_1 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} & \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_1} \end{bmatrix} \\ &\times \left\{ \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{W}_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} O_n & \hat{Y} \\ -\hat{Y}^T & \hat{Z}_{11} \end{bmatrix}}_{\tilde{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n \\ \hat{Y}^T E \end{bmatrix} u \right\} \\ &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \hat{X} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_1} \hat{W}_1 + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_1} \hat{Y}^T E u \\ &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \hat{X} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_1} \hat{W}_1 + y^T u \end{aligned}$$

となる. ここで $\tilde{J}$ が歪対称行列という性質を使っている. したがって, 題意が示された.

定理3の証明では, ハミルトニアン $\tilde{H}$ の時間微分を陽に計算しているが, 実は, 元の拡大ハミルトニアンシステム (30) の第3式において, $\tilde{p}_0 = -\tilde{H}$ を代入しても (42) 式と同じ結果が得られる. つまり, (30) 式の第3式はシステムのハミルトニアンの時間変化を表している. 線形拘束の場合, ハミルトニアンシステムの受動性は常に満たされることは知られているが [9], それは (42) 式において $\hat{X} \equiv 0$ とおくことから確かめられ, アファイン拘束の影響がシステムの受動性を常に満たさなくさせていることがわかる.

4. 物理例

本章では具体的な物理例として「回転盤上のコイン」[12–14]を取りあげる．Fig. 3のように，一定角速度で回転する回転盤の上にコインを乗せるような仮想的なシステムを考える．ここでコインは回転盤と点で接しているとし，倒れることなく鉛直に保ったまま水平な回転盤の上を滑ることなく運動する場合を考える．回転盤の中心が原点となるように xy 座標系を取り，コインが回転盤と接している位置を (x, y) で表す．その接点を通り，コインの回転方向に引いた直線が x 軸の正の方向と成す角を θ とする．またコインの回転角を ϕ とする．これらにより，回転盤上のコインの一般化座標は $q = [q^1 \ q^2 \ q^3 \ q^4]^T = [\theta \ \phi \ x \ y]^T \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ で記述され， $n = 4$ である． q に対応する一般化運動量を $p = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]^T$ とおく．パラメータは回転盤の回転角速度を Ω ，コインの質量を M ，コインの半径を R ，コインの θ 方向， ϕ 方向の慣性モーメントをそれぞれ J_1, J_2 とする．すると，このシステムのハミルトニアンは

$$H(q, p) = \frac{1}{2J_1} p_1^2 + \frac{1}{2J_2} p_2^2 + \frac{1}{2M} (p_3^2 + p_4^2) \quad (42)$$

で与えられる．

Fig. 3 Coin on rotating table

つぎに，コインの回転方向・側面方向の速度の釣り合いを考えることにより，このシステムが受けるアファイン拘束は

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega(y \cos \theta - x \sin \theta) \end{bmatrix}}_{A(q)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & -R & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}}_{B(q)} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = 0 \quad (43)$$

で与えられ， $m = 2$ である．このアファイン拘束(43)は分布 C_0 を計算することにより，定理 1 から完全非ホロノミックであることが確かめられる．コインは回転盤から角速度を与えられ自転するので，アファイン変数は ϕ となり，仮定 1 を満たす．ゆえに $\hat{X}, \hat{Y}$ は，

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Omega}{R}(q_3 \sin q_1 - q_4 \cos q_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & R \cos q_1 \\ 0 & R \sin q_1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

のように求められる．

簡単のために，パラメータに関して $M = R = J_1 = J_2 = 1$ とおき，変数を $\tilde{q} = [\tilde{q}^1 \ \tilde{q}^2 \ \tilde{q}^3 \ \tilde{q}^4]^T \in \mathbb{R}^4$ ， $\tilde{p}_1 = [\tilde{p}_{11} \ \tilde{p}_{12}]^T \in \mathbb{R}^2$ と記述する．そして，コインの θ, ϕ 方向へのトルクをそれぞれ制御入力 u_1, u_2 とし， $u = [u_1 \ u_2]^T \in \mathbb{R}^2$ ， $E(q) := [I_2 \ O_{2,4}]^T$ とする．すると，計算によって NHSAC は(45)，(46)式で与えられることがわかり，ハミルトニアンは(47)式のように表される．

最後に回転盤上のコインに対する NHSAC の受動性について考える．定理 3 の受動性条件(42)を具体的に計算すると，

$$-\frac{\Omega}{R^3 + R}(\tilde{q}_3 \cos \tilde{q}_1 + \tilde{q}_4 \sin \tilde{q}_1) \times \{\tilde{p}_{12} + 2\Omega R(\tilde{q}_3 \sin \tilde{q}_1 - \tilde{q}_4 \cos \tilde{q}_1)\} \tilde{p}_{11} \leq 0 \quad (48)$$

となる．(48)式が満たされていれば，NHSAC は受動性を満たすことになる．もし回転盤が静止している場合，つまり平面上の転がるコインを考えるならば，(48)式において $\Omega = 0$ とすると左辺が恒等的に 0 となるので，受動性条件を常に満たしていることが確認できる．

5. おわりに

本論文では，拡大相空間における拡大ハミルトニアンに対して座標変換と低次元化を行うことによって，アファイン拘束を受ける非ホロノミックハミルトニアンシステム(NHSAC)を導出した．さらに制御入力項と出力方程式を加えた NHSAC に対して，受動性の条件を求めた．NHSAC は従来の線形拘束の場合を包含する，より広いクラスのハミルトニアンシステムとなる．

今後の課題としては，受動性条件を満たすような軌道計画，NHSAC に対する一般化正準変換則の提案，受動性に基づいた制御則の導出などが挙げられる．

参考文献

- [1] A. M. Bloch, M. Reyhanoglu and H. McClamroch: Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, Vol. 37, No. 11, pp. 1746–1757 (1992)
- [2] R. M. Murray and S. S. Sastry: Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 38, No. 5, pp. 700–716 (1993)
- [3] A. J. van der Schaft and B. M. Maschke: On the Hamiltonian formulation of nonholonomic mechanical systems; *Reports on Mathematical Physics*,

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 \\ \dot{\tilde{q}}_2 \\ \dot{\tilde{q}}_3 \\ \dot{\tilde{q}}_4 \\ \dot{\tilde{p}}_{11} \\ \dot{\tilde{p}}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Omega}{R}(\tilde{q}_3 \sin \tilde{q}_1 - \tilde{q}_4 \cos \tilde{q}_1) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\Omega}{R^3 + R}(\tilde{q}_3 \cos \tilde{q}_1 + \tilde{q}_4 \sin \tilde{q}_1)\{\tilde{p}_{12} + 2\Omega R(\tilde{q}_3 \sin \tilde{q}_1 - \tilde{q}_4 \cos \tilde{q}_1)\} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \cos \tilde{q}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \sin \tilde{q}_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -R \cos \tilde{q}_1 & -R \sin \tilde{q}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}}^\top \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}^\top \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}^\top \quad (46)$$

$$\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}_1) = \frac{1}{2} \tilde{p}_{11}^2 + \frac{1}{2(R^2 + 1)} \tilde{p}_{12}^2 - \frac{\Omega}{R^3 + R}(\tilde{q}_3 \sin \tilde{q}_1 - \tilde{q}_4 \cos \tilde{q}_1) \tilde{p}_{12} - \frac{\Omega^2}{2(R^2 + 1)}(\tilde{q}_3 \sin \tilde{q}_1 - \tilde{q}_4 \cos \tilde{q}_1)^2 \quad (47)$$

Vol. 34, No. 2, pp. 225–233 (1994)

- [4] A. V. Tsiganov: Canonical transformations of the extended phase space, Toda lattices an the Stäckel family of integrable systems; *J. Physics A: Mathematical and General*, Vol. 33, No. 22, pp. 4169–4182 (2000)
- [5] K. Fujimoto and T. Sugie: Stabilization of Hamiltonian systems with nonholonomic constraints based on time-varying generalized canonical transformations; *Systems & Control Letters*, Vol. 44, No. 4, pp. 309–319 (2001)
- [6] J. Struckmeier: Hamiltonian dynamics on the symplectic extended phase space for autonomous and non-autonomous systems; *J. Physics A: Mathematical and General*, Vol. 38, No. 6, pp. 1257–1278 (2005)
- [7] Y. Minesaki and Y. Nakamura: New numerical integrator for the Stäckel system conserving the same number of constants of motion as the degree of freedom; *J. Physics A: Mathematical and General*, Vol. 39, No. 30, pp. 9453–9476 (2006)
- [8] A. M. Bloch: *Nonholonomic Mechanics and Control*, Springer-Verlag (2003)
- [9] 藤本, 杉江: 一般化正準変換を用いたあるクラスの非ホロノミック系の安定化; 計測自動制御学会論文誌, Vol. 36, No. 9, pp. 749–756 (2001)
- [10] 甲斐, 木村: 配位多様体におけるアファイン拘束の理論的解析 - Part I: アファイン拘束の可積分性・非可積分条件と配位多様体の葉層構造 - ; 計測自動制御学会論文誌, Vol. 42, No. 3, pp. 212–221 (2006)
- [11] 甲斐, 木村: 配位多様体におけるアファイン拘束の理論的解析 - Part II: アファイン拘束を受ける運動学的非
- 対称アファインシステムの可到達性 - ; 計測自動制御学会論文誌, Vol. 42, No. 3, pp. 222–231 (2006)
- [12] T. Kai, H. Kimura and S. Hara: Nonlinear control analysis on kinematically asymmetrically affine control systems with affine constraints; *Proc. of 16th IFAC World Congress* (2005)
- [13] T. Kai, H. Kimura and S. Hara: Nonlinear control analysis on nonholonomic dynamic systems with affine constraints; *Proc. of 44th IEEE CDC-ECC*, pp. 1459–1464 (2005)
- [14] T. Kai: Affine constraints in nonlinear control theory; *Proc. of 3rd Workshop on LHMNLC*, pp. 251–256 (2006)
- [15] 木村, 菅野: 微分形式による解析力学, 吉岡書店 (1996)
- [16] 山本, 中村: 解析力学 I, II, 朝倉書店 (1998)
- [17] 美多: 非線形制御入門 - 劣駆動ロボットの技能制御論, 昭晃堂 (2000)

著者略歴

甲斐 健也 (正会員)

1976年11月5日生。2005年東京大学大学院新領域創成科学研究科博士課程修了。同年大阪大学大学院工学研究科助手, 2007年同大学同研究科助教, 現在に至る。非線形制御理論, 非ホロノミックシステムなどの研究に従事。博士(科学)。2004年度計測自動制御学会学術奨励賞, 2006年度計測自動制御学会制御部門大会賞, 2007年度計測自動制御学会論文賞受賞。計測自動制御学会, 電子情報通信学会の会員。