Stability Feeler による実数 μ 解析*松田 忠典[†]・川西 通裕[†]・成清 辰生[†]Real μ -analysis by the Stability Feeler*Tadasuke MATSUDA[†], Michihiro KAWANISHI[†] and Tatsuo NARIKIYO[†]

It is considered that there is some deep relationship between studies on the structured singular value and on robust D-stability analyses of systems with parametric uncertainties. Studies on the relationship, however, are very few in number. In this paper, we show an attempt to study one of the relationship. The attempt is to compute the real structured singular value μ by using the stability feeler, which is a tool for robust D-stability analysis of polytopic polynomials. A numerical example is provided to show that an upper bound and a lower bound of μ are successfully obtained by using the stability feeler. We also compare the result to those derived by conventional methods. Moreover, this paper discuss the computational complexity of the proposed method.

1. はじめに

制御システムにおいて、閉ループ系の安定性は最も基本的な要求である。多くの場合、制御システムのパラメータに不確かさが含まれ、このようなシステムの安定解析、すなわちロバスト安定解析の研究はこれまでに非常に多くなされてきた [1–29]。

構造的な不確かさを含む制御システムに対しては、そのロバスト安定解析に有効な構造化特異値 μ が Doyle ら [3] によって提案されて以来、研究が活発に行われた [4–21]。行列と不確かさの構造が与えられたときの構造化特異値 μ の厳密な値の計算は NP 困難であることが知られている [6]。文献 [7] および [8] の方法は計算効率を犠牲にする代わりに、この μ の厳密な値を求める方法であり、低次元の問題に対して有効である。一方、高次元の問題に対して μ の厳密な値を求めることは現実的でなく、 μ の存在し得る区間の上限または下限を求める方法が提案されている。以降では、これらをそれぞれ μ の上界および μ の下界という。D スケーリングを用いる方法 [3] や D-G スケーリングを用いる方法 [9] がそのような方法である。また、実数不確かさの構造と周波数に依存する行列が与えられたときの μ は周波数に対して不連続となるという

問題があることもあり [18]、近年では周波数ごとの μ を計算するのではなく、 μ の上界のすべての周波数に対する最大値を直接計算する方法が提案されている [10–13]。文献 [10] はセクタ変換による正実化と強正実補題を用いる方法、文献 [11] はパラメータ依存マルチプライアと強正実補題を用いる方法、文献 [12,13] は Convex Quadratic Separator と Kalman-Yakubovich-Popov 補題を用いる方法である。

一方で、パラメトリックな不確かさを含む線形時不変システムに対しても、安定半径 [22] や方向付き安定半径 [23] など、さまざまな結果が存在する。特性多項式の各係数の変動範囲が区間で表される区間多項式の Hurwitz 安定性については、Kharitonov の定理 [24] により、四つの端点に相当する端点多項式の Hurwitz 安定性に帰着される。区間多項式よりも一般的な、有限個の端点多項式の凸包に相当する多項式ポリトープの D 安定性については、一般に端点多項式の安定性に帰着されない。ここで、D 安定とは、複素平面上の所望の実軸対称な連結開領域である安定領域 D に多項式の零点がすべて含まれていることを指し、たとえば、領域 D が複素開左半平面である場合の D 安定は Hurwitz 安定に相当し、単位円内である場合は Schur 安定に相当する。多項式ポリトープの D 安定性は、エッジ定理 [25] により露出エッジに相当するセグメント多項式の D 安定性に帰着される。文献 [26] と [27] の方法は、それぞれエッジ定理を利

* 原稿受付 2010 年 1 月 27 日

[†] 豊田工業大学 Toyota Technological Institute; 2-12-1, Hisakata, Tempaku, Nagoya, Aichi 468-8511, JAPAN
Key Words: real μ -analysis, structured singular value, robust stability analysis, stability feeler, linear systems.

用した Hurwitz 安定解析法と Schur 安定解析法である．また，筆者らはエッジ定理を利用した多項式ポリトープのより広いクラスの D 安定性の解析・設計ツールとして stability feeler を提案している [28,29]．stability feeler により多項式ポリトープのロバスト D 安定解析が可能となるほか，特性多項式族の係数が不確かなパラメータのアフィン関数であるとき，ロバスト D 安定となるための一つのパラメータの必ずしも連結でないすべての範囲を求めることができる．

構造化特異値に関する研究と，上で述べたパラメトリックな不確かさを含む線形時不変システムの D 安定性についての研究は関連が深いと考えられるが，構造化特異値 μ を用いた区間多項式とダイヤモンド多項式の Hurwitz 安定解析および安定化についての研究 [19,20] や区間システムの D 安定解析についての研究 [21] などを除き，両者の研究は独立に行われてきた．文献 [19,20] ではこの両分野の関連を明らかにする研究が少ないことを問題点として指摘している．しかしその後，両者の関係に関する研究は十分に行われていない．そこで本論文では，両者の関係を明らかにする一つの試みとして，上記の文献 [19–21] とは逆に，多項式ポリトープのロバスト D 安定解析ツールである stability feeler を用いて，実数不確かさの構造と周波数に依存する行列が与えられたときの構造化特異値の全周波数に対する上限値（実数 μ ）の計算を行うことを検討する．実数 μ を計算するためには，係数が不確かなパラメータの非線形関数となるような特性多項式族が安定となるための，複数パラメータの最大の範囲を求める必要がある．つまり，実数 μ の計算に stability feeler を用いる際には二つの問題点があり，一つはシステムの実数多項式族の係数が不確かなパラメータの非線形関数となること，もう一つが安定となる複数のパラメータの範囲を求める必要があることである．本論文では，前者は変数変換により対処し，後者については二分探索法と stability feeler による安定解析法を組み合わせるという手法をとる．

本手法は実数不確かさの構造と周波数に依存する行列が与えられたときの各周波数における μ を計算する方法ではなく，近年の文献 [10–13] の方法と同様，すべての周波数に対する μ の上界を計算する方法であるため， μ が周波数に対し不連続となるという問題にも対処できる．また，実数 μ の上界を計算する過程でシステムを不安定化する不確かさが具体的に求められるため，実数 μ の下界値の推定を同時に行うことができる．さらに本論文では，提案手法の計算量について考察するとともに，代表的な数値例に対する結果の保守性について従来法と比較する．

2. 準備

2.1 Stability Feeler

stability feeler とは，線形時不変システムの実数多項式係数空間での直線

$$\{\hat{p}(s) + K p_K(s), K \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

が D 安定であるための，必ずしも連結でない K のすべての範囲を求めるツールである．ここで， $\hat{p}(s)$, $p_K(s)$ は実多項式， $\mathbb{R}$ は実数の集合である．なお，(1) 式の次数低下はないものとする．stability feeler の計算は，複素平面上の安定領域 D の境界が一助変数表示可能な領域ならば大きな困難はない．

さらに，stability feeler を用いることにより，次数が一定の以下のような多項式の平行ポリトープ

$$\left\{ \hat{p}(s) + [\alpha_1 \cdots \alpha_b K] [p_1(s) \cdots p_b(s) p_K(s)]^T \mid \alpha_i \in [r_{i-}, r_{i+}] \subset \mathbb{R}, i = 1, \dots, b, K \in \mathbb{R} \right\} \quad (2)$$

が D 安定であるための K の範囲を求めることができる．ここで， $\hat{p}(s)$, $p_K(s)$, $p_i(s)$, $i = 1, \dots, b$ は n 次以下の実多項式である．すなわち，特性多項式の係数が不確かなパラメータ $\alpha_1, \dots, \alpha_b$, K のアフィン関数であるとき，すべての $\alpha_i \in [r_{i-}, r_{i+}]$, $i = 1, \dots, b$ でシステムが安定となるような単一のパラメータ K の範囲（非連結な区間を含む全範囲）を得ることができる．なお，この際の計算量は $O(n^2 2^b)$ である．また，安定な K の範囲を導出する過程で，(2) 式の $p_K(s)$ 方向のエッジ多項式

$$\hat{p}(s) + [\alpha_1 \cdots \alpha_b K] [p_1(s) \cdots p_b(s) p_K(s)]^T, \quad (3) \\ \alpha_i \in \{r_{i-}, r_{i+}\}, i = 1, \dots, b, K \in \mathbb{R}$$

が不安定となる $\alpha_1, \dots, \alpha_b$, K の値も得られる．詳細は文献 [28,29] を参照されたい．

2.2 実数 μ 解析

安定な伝達関数行列 $H(s)$ と実数不確かさを表す Δ からなる Fig. 1 のような連続時間閉ループシステムを考える．ここで，

$$\Delta \in \mathcal{X}, \quad (4) \\ \mathcal{X} = \{\text{diag}\{\delta_1 I_{k_1}, \dots, \delta_m I_{k_m}\} \mid \delta_i \in \mathbb{R}\}$$

である．このシステムに対して，構造化特異値 $\mu_{\mathcal{X}}(H)$ を

$$\mu_{\mathcal{X}}(H) := \left(\min_{\Delta \in \mathcal{X}} \{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - \Delta H) = 0\} \right)^{-1} \quad (5)$$

と定義する．ただし， $\det(I - \Delta H) = 0$ となる $\Delta \in \mathcal{X}$ が存在しない場合は $\mu_{\mathcal{X}}(H) = 0$ とする．ここで， $\bar{\sigma}(\cdot)$ は行列の最大特異値を表す．このとき，以下の補題が成り立つ [3]．

Fig. 1 Closed loop systems

【補題 1】 $H(s)$ と Δ からなる閉ループ系が $-\frac{1}{\gamma} \leq \delta_i \leq \frac{1}{\gamma}$ を満足するすべての δ_i , $i=1, \dots, m$ で安定であるための必要十分条件は,

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\mathcal{X}}(H(j\omega)) < \gamma \quad (6)$$

となることである。ただし, $j = \sqrt{-1}$ である。

以降では, $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\mathcal{X}}(H(j\omega))$ を $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ という記号で表現する。すなわち,

$$\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H) := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\mathcal{X}}(H(j\omega)) \quad (7)$$

とする。さらに, μ_u と μ_l をそれぞれ, H と $\mathcal{X}$ が与えられたときに $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ が存在し得る区間の上限と下限を表す変数とする。以降では, これらをそれぞれ $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の上界および $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の下界という。

3. Stability Feeler による $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の上界値と下界値の導出

本節では, stability feeler を用いて $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の上界 μ_u と下界 μ_l を計算する方法について述べる。stability feeler を用いるために, まず, 特性多項式族の係数が不確かなパラメータのアフィン関数となるように変数変換を行う。さらに, この近似された特性多項式族を用いて実数 γ^* を定義する。この γ^* は $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の上界となる。 γ^* を計算するためには, 近似された特性多項式族が安定となるような複数のパラメータの範囲を求める必要があるため, 二分探索を行う。3.1 では変数変換によって近似多項式族を生成し, これを用いて定義される実数 γ^* が $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の上界となっていることを示す。3.2 では二分探索の初期値設定について述べる。この初期値は γ^* の上界 γ_u^* と下界 γ_l^* であり, これらは stability feeler により計算される。ここで, γ_u^* は $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の上界でもあるため, この初期値設定の段階で $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の上界 μ_u が得られる。3.3 では stability feeler と二分探索による, γ^* と与えられた精度で一致する上界と下界の導出について述べる。これにより, $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ のより小さい上界 μ_u が得られる。さらに, 3.4 では, この二分探索の過程で $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の下界 μ_l も導出することができることを示す。3.5 では提案手法をアルゴリズムの形でまとめ, 計算量および結果の保守性などについて考察する。

3.1 Stability Feeler 適用のための変数変換

Fig. 1 のシステムの特性多項式は $\det(I - \Delta H(s))$ の分子多項式となる。すなわち,

$$\det(I - \Delta H(s)) =: \frac{N_p(\Delta_m, s)}{D_p(\Delta_m, s)}, \quad (8)$$

$$\Delta_m = [\delta_1 \ \cdots \ \delta_m]^T \in \mathbb{R}^m$$

と表されるとき, 特性多項式は $N_p(\Delta_m, s)$ となる。ただし, $N_p(\Delta_m, s)$, $D_p(\Delta_m, s)$ はそれぞれ Δ_m の要素と微分オペレータ s からなる互いに素な多項式, $\mathbb{R}^m$ は m 次の実数ベクトルの集合である。ここで, 多項式の集合 $\mathcal{N}(\gamma)$ を

$$\mathcal{N}(\gamma) := \{N_p(\Delta_m, s) \mid \Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma)\} \quad (9)$$

と定義する。ただし, 集合 $\mathcal{Q}(\gamma) \subset \mathbb{R}^m$ を正実数 γ を用いて

$$\mathcal{Q}(\gamma) := \left[-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} \right]^m$$

$$:= \underbrace{\left[-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} \right] \times \cdots \times \left[-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} \right]}_m \quad (10)$$

と定義する。また, $\gamma = 0$ のときは $\mathcal{Q}(0) := \mathbb{R}^m$ とする。このとき, $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ は安定な多項式の集合, すなわち, すべての零点の実部が負となるような多項式の集合 $\mathcal{P}_s$ を用いて

$$\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H) = \inf_{\gamma \geq 0} \gamma \quad (11)$$

subject to $\mathcal{N}(\gamma) \subset \mathcal{P}_s$

と表される。なぜならば, 補題 1 より $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ は Fig. 1 が $-\frac{1}{\gamma} \leq \delta_i \leq \frac{1}{\gamma}$ を満たすすべての δ_i , $i=1, \dots, m$ で安定となる γ の下限値であり, かつこの安定性が (9) 式より $\mathcal{N}(\gamma) \subset \mathcal{P}_s$ であることと等価であるからである。

ここで, $b = \prod_{i=1}^m (k_i + 1) - 1$ としたとき, Δ_m の単項式 $f_i(\Delta_m): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, b$ をベクトル形式で

$$[1 \ f_1(\Delta_m) \ \cdots \ f_b(\Delta_m)]^T := \delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \cdots \otimes \delta_m,$$

$$\delta_i = [1 \ \delta_i \ \delta_i^2 \ \cdots \ \delta_i^{k_i}]^T \in \mathbb{R}^{k_i+1}, \ i=1, \dots, m,$$

$$\Delta_m = [\delta_1 \ \cdots \ \delta_m]^T \in \mathbb{R}^m \quad (12)$$

と定義する。ただし, $\otimes$ はクロネッカー積である。このとき, 特性多項式 $N_p(\Delta_m, s)$ は一般にこれらの単項式 $f_i(\Delta_m)$, $i=1, \dots, b$ と多項式 $\hat{p}(s)$, $p_i(s)$, $i=1, \dots, b$ を用いて

$$N_p(\Delta_m, s) = \hat{p}(s)$$

$$+ [f_1(\Delta_m) \ \cdots \ f_b(\Delta_m)] [p_1(s) \ \cdots \ p_b(s)]^T \quad (13)$$

と表される。ここで, n を $\hat{p}(s)$, $p_i(s)$, $i=1, \dots, b$ の次数のうち最大のものとする。 $f_i(\Delta_m)$, $i=1, \dots, b$ は Δ_m の単項式であるので, 多項式族 $\mathcal{N}(\gamma)$ の各係数は一般に Δ_m の非線形関数となる。よって stability feeler では

(11) 式を直接計算することができない．そこで，実数 γ^* を

$$\gamma^* := \inf_{\gamma \geq 0} \quad (14)$$

subject to $\tilde{\mathcal{N}}(\gamma) \subset \mathcal{P}_s$

と定義する．ここで，多項式族 $\tilde{\mathcal{N}}(\gamma)$ は

$$\tilde{\mathcal{N}}(\gamma) := \{\tilde{N}_p(\tilde{\Delta}_b, s) \mid \tilde{\Delta}_b \in \mathcal{D}(\gamma)\} \quad (15)$$

と定義され， $\tilde{N}_p(\tilde{\Delta}_b, s)$ と $\mathcal{D}(\gamma)$ はそれぞれ

$$\tilde{N}_p(\tilde{\Delta}_b, s) := \hat{p}(s) + \tilde{\Delta}_b^T [p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \quad (16)$$

$$:= \hat{p}(s) + [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b] [p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \quad (17)$$

$$\mathcal{D}(\gamma) := \mathcal{D}_1(\gamma) \times \mathcal{D}_2(\gamma) \times \cdots \times \mathcal{D}_b(\gamma) \subset \mathbb{R}^b \quad (18)$$

と定義される多項式および超直方体である．ここで， $\mathcal{D}(\gamma)$ の i 番目の成分の区間 $\mathcal{D}_i(\gamma)$ は

$$\mathcal{D}_i(\gamma) := \left[\min_{\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma)} f_i(\Delta_m), \max_{\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma)} f_i(\Delta_m) \right] \quad (19)$$

と定義される．すなわち，(13) 式の関数 $f_i(\Delta_m)$ ， $i = 1, \dots, b$ を互いに独立な変数 $\tilde{\delta}_i$ ， $i = 1, \dots, b$ におきかえ，これらの変数の変動範囲を，もとの関数 $f_i(\Delta_m)$ ， $i = 1, \dots, b$ が $\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma)$ で取りうる範囲とすれば，多項式族 $\mathcal{N}(\gamma)$ は多項式族 $\tilde{\mathcal{N}}(\gamma)$ となる．なお， $f_i(\Delta_m)$ ， $i = 1, \dots, b$ は Δ_m の単項式なので， $\min_{\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma)} f_i(\Delta_m)$ および $\max_{\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma)} f_i(\Delta_m)$ は容易に求めることができる．ここで， $\mathcal{D}(\gamma)$ の定義より $\{[f_1(\Delta_m) \cdots f_b(\Delta_m)]^T \mid \Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma)\} \subset \mathcal{D}(\gamma)$ であるので，(13) 式 および $\tilde{N}_p(\tilde{\Delta}_b, s)$ ， $\mathcal{N}(\gamma)$ ， $\tilde{\mathcal{N}}(\gamma)$ の定義より

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\gamma) &= \{N_p(\Delta_m, s) \mid \Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma)\} \\ &= \{\hat{p}(s) + [f_1(\Delta_m) \cdots f_b(\Delta_m)] \\ &\quad \cdot [p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \mid \Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma)\} \\ &\subset \{\hat{p}(s) + \tilde{\Delta}_b^T [p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \mid \\ &\quad \tilde{\Delta}_b \in \mathcal{D}(\gamma)\} \\ &= \tilde{\mathcal{N}}(\gamma) \end{aligned} \quad (20)$$

となる．よって(11)，(14)式より以下の補題が成立する．

【補題 2】 γ^* は構造化特異値の上限 $\tilde{\mu}_X(H)$ の上界値となる．すなわち，

$$\tilde{\mu}_X(H) \leq \gamma^* \quad (21)$$

となる．

すなわち， $\mathcal{N}(\gamma)$ の近似特性多項式族 $\tilde{\mathcal{N}}(\gamma)$ を用いて γ^* を計算することができれば， $\tilde{\mu}_X(H)$ の上界 μ_u が求められる．しかし， γ^* を計算するためには複数のパラメータ $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_b$ の安定な範囲を求める必要がある．一方，stability feeler は単一パラメータの安定な範囲のみが求められるツールであるため，stability feeler だけでは γ^* を直接計算することができない．この問題を，次節以降で示すように，stability feeler の計算と二分探索

法を組み合わせることにより解決する．

3.2 二分探索のための初期値設定

前節で定義した $\tilde{\mu}_X(H)$ の上界 γ^* の存在し得る区間の上限と下限を stability feeler により求める方法を示す．以降，これらをそれぞれ γ^* の上界および下界という．これらは，3.3 で示す二分探索の初期値となる．まず， $p_i(s)$ が恒等的に 0 でないような $i \in \{1, \dots, b\}$ を一つ選んで i' とし， γ_l^* を

$$\gamma_l^* := \inf_{\gamma \geq 0} \quad (22)$$

subject to $\{\hat{p}(s) + \tilde{\delta}_{i'} p_{i'}(s) \mid \tilde{\delta}_{i'} \in \mathcal{D}_{i'}(\gamma)\} \subset \mathcal{P}_s$

と定義する．ここで，(22) 式の制約条件式の多項式族は， $\tilde{\delta}_{i'}$ を K と考えると (1) 式で表されるため， γ_l^* は stability feeler によって求められる．このとき，以下が成立する．

【補題 3】 γ_l^* は γ^* の下界となる．すなわち

$$\gamma_l^* \leq \gamma^* \quad (23)$$

が成立する．

(証明) $\mathcal{Q}(\gamma)$ ， $f_i(\Delta_m)$ ， $\mathcal{D}_i(\gamma)$ の定義より， $[0 \cdots 0]^T \in \mathcal{Q}(\gamma)$ かつ $f_i(\Delta_m)$ ， $i = 1, \dots, b$ は Δ_m の単項式なので， $0 \in \left[\min_{\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma)} f_i(\Delta_m), \max_{\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma)} f_i(\Delta_m) \right] = \mathcal{D}_i(\gamma)$ ， $i = 1, \dots, b$ となる．よって $\mathcal{D}(\gamma)$ の定義より $\mathcal{D}(\gamma) = \mathcal{D}_1(\gamma) \times \cdots \times \mathcal{D}_b(\gamma) \supset \{[0 \cdots 0 \tilde{\delta}_{i'} 0 \cdots 0]^T, \tilde{\delta}_{i'} \in \mathcal{D}_{i'}(\gamma)\}$ であるため

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{N}}(\gamma) &= \{\tilde{N}_p(\tilde{\Delta}_b, s) \mid \tilde{\Delta}_b \in \mathcal{D}(\gamma)\} \\ &\supset \{\tilde{N}_p(\tilde{\Delta}_b, s) \mid \tilde{\Delta}_b = [0 \cdots 0 \tilde{\delta}_{i'} 0 \cdots 0]^T, \\ &\quad \tilde{\delta}_{i'} \in \mathcal{D}_{i'}(\gamma)\} \\ &= \{\hat{p}(s) + \tilde{\delta}_{i'} p_{i'}(s) \mid \tilde{\delta}_{i'} \in \mathcal{D}_{i'}(\gamma)\} \end{aligned} \quad (24)$$

となる．よって(14)，(22)式より

$$\gamma_l^* \leq \gamma^* \quad (25)$$

となる．

また， γ_u^* を，先ほど定義した γ_l^* と γ_l^* の定義時に選んだ i' を用いて

$$\gamma_u^* := \inf_{\gamma \geq 0} \quad (26)$$

subject to $\{\hat{p}(s) + [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b] [p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \mid \tilde{\delta}_{i'} \in \mathcal{D}_{i'}(\gamma), \forall \tilde{\delta}_i \in \mathcal{D}_i(\gamma_l^*), i \neq i'\} \subset \mathcal{P}_s$

と定義する．ただし，制約条件式を満たす γ が存在しない場合は $\gamma_u^* = +\infty$ とする．(26) 式の制約条件式の多項式族は $\tilde{\delta}_{i'}$ を K と考えると (2) 式で表される平行ポルトープであるので， γ_u^* は stability feeler により計算できる．2.1 で述べたように，このときの計算量は $O(n^2 2^b)$ となる．この γ_u^* について，以下が成立する．

【補題 4】 γ_u^* は γ^* の上界となる．すなわち

$$\gamma^* \leq \gamma_u^* \quad (27)$$

が成立する．

(証明) $\mathcal{D}_i(\gamma)$ の定義および $\gamma_l^* \leq \gamma^*$ より，任意の i で $\mathcal{D}_i(\gamma_l^*) \supset \mathcal{D}_i(\gamma^*)$ が成り立つので

$$\begin{aligned} & \{\hat{p}(s) + [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b][p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \mid \\ & \tilde{\delta}_{i'} \in \mathcal{D}_{i'}(\gamma), \\ & \forall \tilde{\delta}_i \in \mathcal{D}_i(\gamma_l^*), i \neq i'\} \\ \supset & \{\hat{p}(s) + [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b][p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \mid \\ & \tilde{\delta}_{i'} \in \mathcal{D}_{i'}(\gamma), \\ & \forall \tilde{\delta}_i \in \mathcal{D}_i(\gamma^*), i \neq i'\} \end{aligned} \quad (28)$$

となる．よって γ_x^* を

$$\begin{aligned} \gamma_x^* := & \inf_{\gamma \geq 0} \gamma \\ & \text{subject to} \\ & \{\hat{p}(s) + [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b][p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \mid \\ & \tilde{\delta}_{i'} \in \mathcal{D}_{i'}(\gamma), \\ & \forall \tilde{\delta}_i \in \mathcal{D}_i(\gamma^*), i \neq i'\} \subset \mathcal{P}_s \end{aligned} \quad (29)$$

と定義すれば，(26)，(28) 式より

$$\gamma_x^* \leq \gamma_u^* \quad (30)$$

となる．また， $\mathcal{P}_s$ は開集合で， $\gamma^* \neq 0$ のとき $\tilde{\mathcal{N}}(\gamma^*)$ は閉集合なので，(14) 式の γ^* の定義より $\tilde{\mathcal{N}}(\gamma^*) = \{\hat{p}(s) + [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b][p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \mid \forall \tilde{\delta}_i \in \mathcal{D}_i(\gamma^*)\} \not\subset \mathcal{P}_s, \forall \gamma^* \neq 0$ となる．よって $\gamma^* \neq 0$ のとき，(29) 式の制約条件式の γ に γ^* を代入すると，その制約条件式は満たさなくなるので

$$\gamma^* \leq \gamma_x^* \quad (31)$$

となる．一方， γ_x^* の定義より $\gamma_x^* \geq 0$ なので $\gamma^* = 0$ のときも明らかに上式が成り立つ．以上より

$$\gamma^* \leq \gamma_x^* \leq \gamma_u^* \quad (32)$$

となる．

補題 2 と補題 4 より，以下が成立する．

【定理 1】 (26) 式で定義される γ_u^* は $\tilde{\mu}_X(H)$ の上界となる．すなわち，

$$\tilde{\mu}_X(H) \leq \gamma_u^* \quad (33)$$

となる．

よって，

$$\mu_u := \gamma_u^* \quad (34)$$

と定義できる．

ここで，求めたい γ^* の上界と下界の精度を表す与えられた正実数 ε を用いて $\gamma_u^* - \gamma_l^* \leq \varepsilon$ となるならば， γ^*

の上界 γ_u^* および下界 γ_l^* は γ^* との差が ε 以下となり， γ^* と $\pm\varepsilon$ 以内の精度で一致する．そうでない場合は，次節で述べる二分探索法により γ^* のより正確な値の推定を行う．この二分探索により， $\tilde{\mu}_X(H)$ のより小さい上界 μ_u が得られる．

3.3 Stability Feeler と二分探索法による γ^* の推定

前節で得られた γ_u^* と γ_l^* の差が $\varepsilon > 0$ より大きいとき，この差を以下のようにして小さくする． γ_{tmp1} を

$$\gamma_{\text{tmp1}} := \begin{cases} \eta & \text{if } \gamma_u^* = +\infty, \gamma_l^* = 0 \\ 2\gamma_l^* & \text{if } \gamma_u^* = +\infty, \gamma_l^* > 0 \\ (\gamma_u^* + \gamma_l^*)/2 & \text{if } \gamma_u^* < +\infty \end{cases} \quad (35)$$

と定義する．ここで， η は $0 < \eta < +\infty$ を満足する適当な実数である． $\gamma_l^* < \gamma_u^*$ および (35) 式より，明らかに

$$\gamma_l^* < \gamma_{\text{tmp1}} < \gamma_u^* \quad (36)$$

であるので， γ_{tmp1} と γ^* の大小関係の判定が可能ならば， $\gamma_{\text{tmp1}} \leq \gamma^*$ のとき $\gamma_l^* := \gamma_{\text{tmp1}}$ ， $\gamma_{\text{tmp1}} \geq \gamma^*$ のとき $\gamma_u^* := \gamma_{\text{tmp1}}$ と再定義することにより γ^* の上界 γ_u^* と下界 γ_l^* との差が小さくなり， γ^* のより正確な値が推定できる．ここで， $\gamma_u^* < +\infty$ のとき，(35) 式より γ_{tmp1} は γ_u^* と γ_l^* のちょうど中間の値となるので，この操作は通常の二分探索となる． γ_{tmp1} と γ^* の大小関係の判定を行うために， γ_{tmp2} を

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{tmp2}} := & \inf_{\gamma \geq 0} \gamma \\ & \text{subject to} \\ & \{\hat{p}(s) + [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b][p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \mid \\ & \tilde{\delta}_{i'} \in \mathcal{D}_{i'}(\gamma), \\ & \forall \tilde{\delta}_i \in \mathcal{D}_i(\gamma_{\text{tmp1}}), i \neq i'\} \subset \mathcal{P}_s \end{aligned} \quad (37)$$

と定義する．ただし，制約条件式を満たす γ が存在しない場合は $\gamma_{\text{tmp2}} = +\infty$ とする．これは (26) 式と同様に stability feeler により計算できる．計算量もやはり同様に $O(n^2 2^b)$ となる．このとき，以下が成立する．

【補題 5】 $\gamma_{\text{tmp2}} \leq \gamma_{\text{tmp1}}$ のとき，

$$\gamma^* \leq \gamma_{\text{tmp1}} < \gamma_u^* \quad (38)$$

が成立する．そうでないとき，すなわち $\gamma_{\text{tmp2}} > \gamma_{\text{tmp1}}$ のときは

$$\gamma_l^* < \gamma_{\text{tmp1}} \leq \gamma^* \quad (39)$$

となる．

(証明)

• $\gamma_{\text{tmp2}} \leq \gamma_{\text{tmp1}}$ の場合

背理法により $\gamma^* \leq \gamma_{\text{tmp1}}$ となることを示す．まず，

$$\gamma^* > \gamma_{\text{tmp1}} \quad (40)$$

と仮定すると， $\mathcal{D}_i(\gamma)$ の定義より任意の i で $\mathcal{D}_i(\gamma_{\text{tmp1}}) \supset$

$\mathcal{D}_i(\gamma^*)$ となるので,

$$\begin{aligned} & \{\hat{p}(s) + [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b][p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \mid \\ & \tilde{\delta}_{i'} \in \mathcal{D}_{i'}(\gamma), \\ & \forall \tilde{\delta}_i \in \mathcal{D}_i(\gamma_{\text{tmp1}}), i \neq i'\} \\ \supset & \{\hat{p}(s) + [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b][p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \mid \\ & \tilde{\delta}_{i'} \in \mathcal{D}_{i'}(\gamma), \\ & \forall \tilde{\delta}_i \in \mathcal{D}_i(\gamma^*), i \neq i'\} \end{aligned} \quad (41)$$

となる．よって γ_x^* を (29) 式で定義したものとすると, (29), (37) 式より $\gamma_x^* \leq \gamma_{\text{tmp2}}$ となる．さらに, (31), (40) 式より

$$\gamma_{\text{tmp1}} < \gamma^* \leq \gamma_x^* \leq \gamma_{\text{tmp2}} \quad (42)$$

となるので $\gamma_{\text{tmp2}} \leq \gamma_{\text{tmp1}}$ と矛盾する．したがって (40) 式は成立せず,

$$\gamma^* \leq \gamma_{\text{tmp1}} \quad (43)$$

となる．さらに, (36) 式と合わせると

$$\gamma^* \leq \gamma_{\text{tmp1}} < \gamma_u^* \quad (44)$$

となる．

• $\gamma_{\text{tmp2}} > \gamma_{\text{tmp1}}$ の場合

(37) 式の制約条件式の γ に γ_{tmp2} よりも小さい値を代入すると, その制約条件式は満たさなくなるので,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s \not\supset & \{\tilde{N}_p(\tilde{\Delta}_b, s) \mid \tilde{\Delta}_b = [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b]^T, \\ & \tilde{\delta}_i \in \mathcal{D}_i(\gamma_{\text{tmp1}}), i = 1, \dots, b\} \\ = & \tilde{N}(\gamma_{\text{tmp1}}) \end{aligned} \quad (45)$$

となる．また, $\tilde{N}(\gamma)$ の定義より任意の実数 $\alpha \geq \beta \geq 0$ に対し $\tilde{N}(\alpha) \subset \tilde{N}(\beta)$ となるので, $\gamma_{\text{tmp1}} > \gamma^*$ を仮定すると (14) 式より $\tilde{N}(\gamma_{\text{tmp1}}) \subset \mathcal{P}_s$ となる．これは (45) 式と矛盾するので

$$\gamma_{\text{tmp1}} \leq \gamma^* \quad (46)$$

となる．さらに, (36) 式と合わせると

$$\gamma_l^* < \gamma_{\text{tmp1}} \leq \gamma^* \quad (47)$$

となる．

以上より, $\gamma_{\text{tmp2}} \leq \gamma_{\text{tmp1}}$ のとき,

$$\gamma_u^* := \gamma_{\text{tmp1}} \quad (48)$$

と再定義し, そうでないときは

$$\gamma_l^* := \gamma_{\text{tmp1}} \quad (49)$$

と再定義すれば, γ^* により近い上界あるいは下界が求められたことになる．以上を $\gamma_u^* - \gamma_l^* \leq \varepsilon$ となるまで繰り返せば, γ_u^* および γ_l^* は γ^* との差が ε 以下となり, これら

は γ^* と $\pm\varepsilon$ 以内の精度で一致する．

以上により得られた γ_u^* についても $\gamma^* \leq \gamma_u^*$ が成立するので, 補題 2 より以下が成立する．

【定理 2】 二分探索により得られる γ_u^* は $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の上界となる．すなわち

$$\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H) \leq \gamma_u^* \quad (50)$$

である．

よって

$$\mu_u := \gamma_u^* \quad (51)$$

と定義できる．

3.4 $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の下界の導出

本節では 3.3 で示した二分探索の過程で $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の下界も求めることができることを示す．(37) 式で表される γ_{tmp2} を stability feeler により計算する際, 2.1 で述べたように, 以下の多項式

$$\begin{aligned} & \hat{p}(s) + [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b][p_1(s) \cdots p_b(s)]^T, \\ & \tilde{\delta}_i \in \left\{ \min_{\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma_{\text{tmp1}})} f_i(\Delta_m), \max_{\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma_{\text{tmp1}})} f_i(\Delta_m) \right\}, \\ & i = 1, \dots, i' - 1, i' + 1, \dots, b, \tilde{\delta}_{i'} \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (52)$$

が不安定となる $\tilde{\Delta}_b = [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b]^T$ の値が得られる．このような $\tilde{\Delta}_b$ の集合を $\mathcal{E}$ とおく．すなわち

$$\begin{aligned} \mathcal{E} := & \left\{ \tilde{\Delta}_b = [\tilde{\delta}_1 \cdots \tilde{\delta}_b]^T \mid \right. \\ & \tilde{\delta}_i \in \left\{ \min_{\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma_{\text{tmp1}})} f_i(\Delta_m), \max_{\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma_{\text{tmp1}})} f_i(\Delta_m) \right\}, \\ & i = 1, \dots, i' - 1, i' + 1, \dots, b, \tilde{\delta}_{i'} \in \mathbb{R}, \\ & \left. \tilde{N}_p(\tilde{\Delta}_b, s) \notin \mathcal{P}_s \right\} \end{aligned} \quad (53)$$

と定義する．このとき, 以下が成立する．

【定理 3】 $[f_1(\Delta_m) \cdots f_b(\Delta_m)]^T \in \mathcal{E}$ となる $\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma_{\text{tmp1}})$ が存在するならば,

$$\gamma_{\text{tmp1}} \leq \tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H) \quad (54)$$

となる．すなわち, γ_{tmp1} は $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の下界となる．

(証明) $[f_1(\Delta_m) \cdots f_b(\Delta_m)]^T \in \mathcal{E}$ となる $\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma_{\text{tmp1}})$ が存在するとき, (53) 式よりその Δ_m で

$$\begin{aligned} & \tilde{N}_p([f_1(\Delta_m) \cdots f_b(\Delta_m)]^T, s) \\ = & \hat{p}(s) + [f_1(\Delta_m) \cdots f_b(\Delta_m)][p_1(s) \cdots p_b(s)]^T \\ = & N_p(\Delta_m, s) \notin \mathcal{P}_s \end{aligned} \quad (55)$$

となる．よって $N_p(\Delta_m, s)$ が不安定となる $\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma_{\text{tmp1}})$ が存在するので, $\tilde{N}(\gamma_{\text{tmp1}}) \not\subset \mathcal{P}_s$ となる．さらに, 任意の実数 $\alpha \geq \beta \geq 0$ について $\mathcal{Q}(\alpha) \subset \mathcal{Q}(\beta)$, すなわち $\mathcal{N}(\alpha) \subset \mathcal{N}(\beta)$ となるので, (11) 式より $\gamma_{\text{tmp1}} \leq \tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ が成立する．

$[f_1(\Delta_m) \cdots f_b(\Delta_m)]^T \in \mathcal{E}$ となる $\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma_{\text{tmp1}})$ が存在するかどうかの判定は, 実際に $\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma_{\text{tmp1}})$ を

$[f_1(\Delta_m) \cdots f_b(\Delta_m)]^T$ に代入し、それが $\mathcal{E}$ に属するかどうか調べることにより行う。ただし、超直方体 $\mathcal{Q}(\gamma_{\text{tmp1}})$ は無限個の点の集合であるので、本手法ではその頂点に相当する点のみについて調べることにする。その結果、 $[f_1(\Delta_m) \cdots f_b(\Delta_m)]^T \in \mathcal{E}$ となるものが存在するとき、 $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の下界 μ_l を

$$\mu_l := \gamma_{\text{tmp1}} \quad (56)$$

と定義できる。

3.5 提案アルゴリズムおよび考察

前節までの議論をアルゴリズムの形でまとめると、以下ようになる。

[提案アルゴリズム]

Step 1: それぞれ (22), (26) 式で表される γ_l^*, γ_u^* を stability feeler により計算し、 $\mu_u := \gamma_u^*$ とする。

Step 2: $\gamma_u^* - \gamma_l^* \leq \varepsilon$ ならば終了。

Step 3: γ_{tmp1} を (35) 式のように定義する。

Step 4: (37) 式で表される γ_{tmp2} を stability feeler により計算する。この計算の過程で、(53) 式で表される $\mathcal{E}$ が得られる。

Step 5: $\gamma_{\text{tmp2}} \leq \gamma_{\text{tmp1}}$ ならば $\gamma_u^* := \gamma_{\text{tmp1}}$ とし、 $\mu_u := \gamma_u^*$ とする。そうでなく、かつ $[f_1(\Delta_m) \cdots f_b(\Delta_m)]^T \in \mathcal{E}$ となる $\Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma_{\text{tmp1}})$ が存在するならば、 $\mu_l := \gamma_{\text{tmp1}}$, $\gamma_l^* := \gamma_{\text{tmp1}}$ とする。それ以外の場合は $\gamma_l^* := \gamma_{\text{tmp1}}$ とする。

Step 6: $\gamma_u^* - \gamma_l^* \leq \varepsilon$ ならば終了。そうでなければ Step 3 にもどる。

Step 1 では二分探索の初期値設定を行っている。このとき、 $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の上界 μ_u も得られる。Step 2 の条件が満たされない場合は Step 3 以降の二分探索を行う。この二分探索の過程（具体的には、Step 5）で、 $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ のより小さい上界 μ_u や、システムを不安定化する Δ_m の値および $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の下界 μ_l が得られる。

本提案手法は、近年の構造化特異値の解析手法 [10–13] と同様、周波数グリidding を用いない手法であるため、周波数に対して不連続な実数 μ 解析において有利となる。

一方で、Step 1 における γ_u^* および Step 4 における γ_{tmp2} の導出の際に要する計算量は $O(n^2 2^b)$ となるため、本手法による計算量は不確かさの構造に関するパラメータ b に対して指数オーダーとなる。しかしながら、(17) 式のように単項式 $f_i(\Delta_m)$ を新たな変数 $\tilde{\delta}_i$ とする変数変換のほか、the implicit Bernstein form に基づく多項式オーダーのアルゴリズム [30] を用いる変数変換も考えられる。この場合、システムの次数 n が b より小さく、 $n < b$ ならば、計算量を最大で $O(n^2 2^n)$ まで低減化することができる。このような計算量低減化は、保守性を増やすこととなるため、実行可能な計算を考慮して必要最小限に

止めることが望ましい。なお、この計算量を最大限に低減化した場合は、特性多項式族を区間多項式に近似することに相当するため、本論文の手法でなく Kharitonov の定理 [24] に基づく手法による解析が可能である。この場合、計算量は多項式オーダーとなる。

また、本手法で得られる結果の保守性は、パラメータ空間における領域の分割を行うことにより低減化させることが可能である [31, 32]。

さらに、本手法で用いている stability feeler は開複素左半平面にシステムの極がすべて存在する Hurwitz 安定性のみでなく、より広いクラスの D 安定性も判定できるツールであるため、構造的な不確かさをもつシステムの様々な D 安定解析への応用も可能である [32]。

4. 数値例

本節では、本手法による実数 μ 解析の具体例を示す。この例は文献 [4] に示されているものである。

$H(s)$ および $\mathcal{X}$ が

$$H(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B + D, \quad (57)$$

$$A_c = A + B_u K, \quad C_c = C + D_u K$$

$$A = \text{diag}\{-100, -100, -1, -1\}$$

$$B = \text{diag}\{100, 100, 1, -1\}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$D_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$K = \begin{bmatrix} -1.9572 & 0 & -1.9806 & 0 \\ 0 & -2.0768 & 0 & -2.1147 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X} = \{\text{diag}\{\delta_1 I_2, \delta_2 I_2\} \mid \delta_i \in \mathbb{R}\} \quad (58)$$

と表されたとする。このシステムに対し、本手法を適用して μ 解析を行う。なお、求めたい γ^* の上界と下界の精度を表す実数 ε の値は 1×10^{-4} とする。また、数値計算ソフトウェアとして Matlab を使用する。特性多項式族 $\mathcal{N}(\gamma)$ は (57), (58) 式より

$$\mathcal{N}(\gamma) = \{N_p(\Delta_m, s) \mid \Delta_m \in \mathcal{Q}(\gamma)\}, \quad (59)$$

$$\Delta_m = [\delta_1 \ \delta_2]^T,$$

$$\mathcal{Q}(\gamma) = \left[-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right] \times \left[-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right],$$

$$N_p(\Delta_m, s) = \hat{p}(s)$$

$$\begin{aligned}
& + [f_1(\Delta_m) \cdots f_8(\Delta_m)] [p_1(s) \cdots p_8(s)]^T, \\
& [1 \ f_1(\Delta_m) \cdots f_8(\Delta_m)]^T \\
& = [1 \ \delta_1 \ \delta_1^2]^T \otimes [1 \ \delta_2 \ \delta_2^2]^T, \\
& \hat{p}(s) = 4641840 + 3140480s + 561417s^2 \\
& \quad + 10304.8s^3 + 50s^4, \\
& p_1(s) = -134100 - 69732s - 1354.41s^2 \\
& \quad - 6.705s^3, \\
& p_2(s) = -2000000 - 2040000s - 540200s^2 \\
& \quad - 10200s^3 - 50s^4, \\
& p_3(s) = 0, \\
& p_4(s) = 0, \\
& p_5(s) = 0, \\
& p_6(s) = -4138070 - 4131280s - 1051060s^2 \\
& \quad - 10152.4s^3 - 25s^4, \\
& p_7(s) = -8123070 - 3959020s - 12540.4s^2 \\
& \quad + 33.3525s^3, \\
& p_8(s) = 306125 + 200736s + 22405.2s^2 \\
& \quad + 458.765s^3 + 25s^4
\end{aligned}$$

となる．なお， $N_p(\Delta_m, s)$ の計算には Matlab のシンボリック計算用の `det` コマンドを使用した．まず，(22) 式と (26) 式で定義される γ_l^* ， γ_u^* を求める． $p_{i'}(s)$ が恒等的に 0 でない $i' \in \{1, \dots, 8\}$ として $i' = 1$ を選ぶと，

$$\begin{aligned}
\gamma_l^* &:= \inf_{\gamma \geq 0} \gamma \\
&\text{subject to} \\
&\{\hat{p}(s) + \tilde{\delta}_1 p_1(s) \mid \tilde{\delta}_1 \in [-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}]\} \subset \mathcal{P}_s
\end{aligned} \quad (60)$$

となり，これを stability feeler で計算すると

$$\gamma_l^* = 0.0289 \quad (61)$$

となる．また，(26) 式より

$$\begin{aligned}
\gamma_u^* &:= \inf_{\gamma \geq 0} \gamma \\
&\text{subject to} \\
&\{\hat{p}(s) + \tilde{\delta}_1 p_1(s) + \tilde{\delta}_2 p_2(s) + \tilde{\delta}_6 p_6(s) + \tilde{\delta}_7 p_7(s) \\
&\quad + \tilde{\delta}_8 p_8(s) \mid \tilde{\delta}_1 \in [-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}], \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_6 \in [0, \frac{1}{\gamma^{*2}}], \\
&\quad \tilde{\delta}_7 \in [-\frac{1}{\gamma_l^{*3}}, \frac{1}{\gamma_l^{*3}}], \tilde{\delta}_8 \in [0, \frac{1}{\gamma_l^{*4}}]\} \subset \mathcal{P}_s
\end{aligned} \quad (62)$$

となる．これを stability feeler により求めると，制約条件式を満足する γ が存在しないので

$$\gamma_u^* = +\infty \quad (63)$$

となる．つぎに，(35) 式にしたがって γ_{tmp1} を定義すると， $\gamma_u^* = +\infty$ ， $\gamma_l^* > 0$ なので

$$\gamma_{\text{tmp1}} := 2\gamma_l^* = 0.0578 \quad (64)$$

となり，この γ_{tmp1} の値と (37) 式を用いて γ_{tmp2} を求めると，(37) 式の制約条件式を満たす γ が存在しないので

$$\gamma_{\text{tmp2}} = +\infty \quad (65)$$

となる．よって $\gamma_{\text{tmp2}} > \gamma_{\text{tmp1}}$ なので

$$\gamma_l^* := \gamma_{\text{tmp1}} = 0.0578 \quad (66)$$

と再定義される．以上の操作を 20 回繰り返した結果，Table 1 に示すように γ_u^* と γ_l^* の差は $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ 以下となり，最終的に

$$\gamma_u^* = 1.7128, \gamma_l^* = 1.7127 \quad (67)$$

となる．よって， $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の上界 μ_u は

$$\mu_u := \gamma_u^* = 1.7128 \quad (68)$$

となる．また，この二分探索の過程で， $\Delta_m = [-0.7211 - 0.7211]^T$ ， $[-0.6181 - 0.6181]^T$ ， $[-0.5968 - 0.5968]^T$ ， $[-0.5867 - 0.5867]^T$ がそれぞれ $\mathcal{Q}(\gamma_{\text{tmp1}})$ ， $\gamma_{\text{tmp1}} = 1.3867, 1.6178, 1.6756, 1.7045$ に属し，かつ $[f_1(\Delta_m) \cdots f_8(\Delta_m)]^T \in \mathcal{E}$ を満たすことが確認される．ゆえに Table 1 に示すように， $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の下界 μ_l は最終的に

$$\mu_l := 1.7045 \quad (69)$$

となる．なお，以上の γ_l^* ， γ_u^* の初期値の計算と 20 回の反復計算に要した時間 (cpu time) は 25.93[s] であった．使用した計算機の CPU は Intel Core i7 で，クロック周波数は 2.93[GHz] である．

一方，文献 [4] では上記のシステムに対して様々な方法で $\tilde{\mu}_{\mathcal{X}}(H)$ の上界値を求めている．これらのうち周波数グリッドリングを必要としない方法は，セクタ変換による

Table 1 γ_u^* ， γ_l^* and μ_l obtained by the bisection method

Iteration count	γ_{tmp1}	γ_{tmp2}	$\gamma_u^* (\mu_u)$	γ_l^*	μ_l
1	0.0578	$+\infty$	$+\infty$	0.0578	—
2	0.1156	$+\infty$	$+\infty$	0.1156	—
3	0.2311	$+\infty$	$+\infty$	0.2311	—
4	0.4622	$+\infty$	$+\infty$	0.4622	—
5	0.9245	$+\infty$	$+\infty$	0.9245	—
6	1.8489	0.1000	1.8489	0.9245	—
7	1.3867	$+\infty$	1.8489	1.3867	1.3867
8	1.6178	$+\infty$	1.8489	1.6178	1.6178
9	1.7334	0.2871	1.7334	1.6178	1.6178
10	1.6756	$+\infty$	1.7334	1.6756	1.6756
11	1.7045	$+\infty$	1.7334	1.7045	1.7045
12	1.7189	0.5510	1.7189	1.7045	1.7045
13	1.7117	$+\infty$	1.7189	1.7117	1.7045
14	1.7153	0.8305	1.7153	1.7117	1.7045
15	1.7135	1.1800	1.7135	1.7117	1.7045
16	1.7126	2.0581	1.7135	1.7126	1.7045
17	1.7131	1.3299	1.7131	1.7126	1.7045
18	1.7128	1.5593	1.7128	1.7126	1.7045
19	1.7127	1.7743	1.7128	1.7127	1.7045
20	1.7128	1.6599	1.7128	1.7127	1.7045

正実化と強正実補題を用いる方法 [10], パラメータ依存マルチプライアと強正実補題を用いる方法 [11], Convex Quadratic Separator と Kalman-Yakubovich-Popov 補題を用いる方法 [12,13] である. これらにより導かれる $\tilde{\mu}_X(H)$ の上界は, セクタ変換による正実化と強正実補題を用いる方法の場合は $\mu_u = 2.412$, Convex Quadratic Separator と Kalman-Yakubovich-Popov 補題を用いる方法の場合は $\mu_u = 1.718$, パラメータ依存マルチプライアと強正実補題を用いる方法の場合は $\mu_u = 1.711$ であり, これらと比べると本方法はパラメータ依存マルチプライアと強正実補題を用いる方法に次いで 2 番目に小さい上界値が得られている. また, 本手法では, 上記の方法と異なり, $\tilde{\mu}_X(H)$ の下界値も得られている.

また, MATLAB の Robust Control Toolbox には H と X が与えられたときの (5) 式で表される $\mu_X(H)$ の上界と下界が得られる関数 `mussv` があり, この関数を用いる手法と本手法との比較も行った. ただし, `mussv` を用いる手法は周波数グリiddingを必要とするため, 実数値不確かさのみの本例題に対しては $\tilde{\mu}_X(H)$ の上界を求めることができない. したがって, 得られた $\tilde{\mu}_X(H)$ の下界 μ_l と cpu time のみ比較を行った. その結果を Table 2 に示す. ここで, 'm9' と 'g5' は `mussv` のオプションである. なお, `mussv` を使用する際に対象とした周波数の範囲は $[10^{-1}, 10^3]$ とした. この結果より, 本手法によれば, `mussv` を用いる手法よりも短い時間で, より大きい下界が得られていることがわかる.

Table 2 Comparison between the proposed method and the method using the `mussv`

Methods	The number of frequency points	μ_l	CPU time [s]
stability feeler	—	1.7045	25.93
<code>mussv</code>	3000	0	37.97
<code>mussv</code> , 'm9'	500	0	32.60
<code>mussv</code> , 'g5'	100	1.4497	55.26

5. おわりに

本論文では構造化特異値とパラメトリックアプローチとの関係を明らかにする一つの試みとして, 文献 [19–21] とは逆に, ロバスト D 安定解析・設計のための最近提案されたツールである `stability feeler` を用いて実数 μ 解析を行うことを検討した. また, 提案手法の計算量について考察するとともに, 文献 [4] に掲載されている代表的な数値例に対する結果の保守性について従来法と比較した.

その結果, 本提案手法は, 近年の構造化特異値の解析手法 [10–13] と同様, 周波数グリiddingを用いない手法となっており, 周波数に対して不連続な実数 μ 解析において有利となった. また, $\tilde{\mu}_X(H)$ の上界を計算する過程でシステムを不安定化する不確かさが具体的に求められ, ゆえに $\tilde{\mu}_X(H)$ の下界値も同時に求めることがで

きる. 文献 [4] に掲載されている数値例については, 従来手法 [10–13] と比べ, 2 番目に小さい $\tilde{\mu}_X(H)$ の上界値が得られた. 一方で, 本手法による計算量は, 不確かさの構造に関するパラメータ b に対して指数オーダーとなった.

本手法をより実用的なものにするためには, 計算量を減少させることと保守性を低減化させることが要求される. 計算量の減少については, the implicit Bernstein form に基づくアルゴリズム [30] を用いた変数変換と Kharitonov の定理 [24] の適用を行うことが考えられる. また, 本手法で得られる結果の保守性については, 領域 $Q(\gamma)$ の分割を行い, それぞれの領域について別々に解析を行うことにより, その保守性を低減化させ, $\tilde{\mu}_X(H)$ の真値にほぼ一致する上界と下界を得ることが可能である [31,32]. また, `stability feeler` は Hurwitz 安定性よりも広いクラスの D 安定性の解析が可能であるツールであるので, 構造的な不確かさをもつ様々な D 安定性の解析が可能である [32]. これらについては, 稿を改めたい.

謝 辞

本研究は, 文部科学省ハイテク・リサーチ・センター整備事業および文部科学省科学研究費補助金 (若手研究 (B) No. 21760339) の助成を受けたものである.

参 考 文 献

- [1] B. R. Barmish: *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan (1994)
- [2] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat and L. H. Keel: *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall (1995)
- [3] J. C. Doyle, J. E. Wall and G. Stein: Performance and robustness analysis for structured uncertainty; *Proc. 21st IEEE Conf. Decision Contr.*, pp. 629–636 (1982)
- [4] 杉江, 陳: 構造化特異値 μ を用いた安定解析 実数 μ 解析; システム/制御/情報, Vol. 42, No. 10, pp. 521–528 (1998)
- [5] 杉江: 構造化特異値に基づくロバスト性解析; 計測と制御, Vol. 42, No. 2, pp. 107–112 (2003)
- [6] R. P. Braatz, P. M. Young, J. C. Doyle and M. Morari: Computational complexity of μ calculation; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 39, No. 5, pp. 1000–1002 (1994)
- [7] R. R. E. de Gaston and M. G. Safonov: Exact calculation of the multiloop stability margin; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 33, No. 2, pp. 156–171 (1988)
- [8] M. P. Newlin and P. M. Young: Mixed μ problems and branch and bound techniques; *Inter. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 7, pp. 145–164 (1997)
- [9] M. K. H. Fan, A. L. Tits and J. C. Doyle: Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 36, No. 1, pp. 25–38 (1991)

- [10] J. H. Ly, R. Y. Chang, K. C. Goh and M. G. Safonov: LMI multiplier K_m/μ -analysis of the cassini spacecraft; *Inter. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 8, pp. 155–168 (1998)
- [11] G. Chen and T. Sugie: μ -analysis and synthesis of state feedback systems based on multipliers and LMIs; *17th American Control Conference*, pp. 537–541 (1998)
- [12] T. Iwasaki and S. Hara: Well-posedness of feedback systems: Insights into exact robustness analysis and approximate computations; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 43, No. 5, pp. 619–630 (1998)
- [13] T. Iwasaki and G. Shibata: LPV system analysis via quadratic separator for uncertain implicit systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 46, No. 8, pp. 1195–1208 (2001)
- [14] P. -A. Bliman: A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters; *SIAM J. on Control and Optimization*, Vol. 42, No. 6, pp. 2016–2042 (2004)
- [15] I. M. Jaimoukha, G. D. Halikias, U. Malik and S. K. Gungah: On the gap between the complex structured singular value and its convex upper bound; *SIAM J. on Control and Optimization*, Vol. 45, No. 4, pp. 1251–1278 (2006)
- [16] J. Lee: An upper bound of structured singular value; *International Journal of Control, Automation, and Systems*, Vol. 7, No. 5, pp. 848–851 (2009)
- [17] Y. Ebihara, Y. Onishi and T. Hagiwara: Robust performance analysis of uncertain LTI systems: Dual LMI approach and verifications for exactness; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 54, No. 5, pp. 938–951 (2009)
- [18] A. Packard and P. Pandey: Continuity properties of the real/complex structured singular value; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 38, No. 3, pp. 415–428 (1993)
- [19] J. Chen, M. K. H. Fan and C. N. Nett: Structured singular values and stability analysis of uncertain polynomials, Part 1: The generalized- μ ; *Systems & Control Letters*, Vol. 23, pp. 53–65 (1994)
- [20] J. Chen, M. K. H. Fan and C. N. Nett: Structured singular values and stability analysis of uncertain polynomials, Part 2: A missing link; *Systems & Control Letters*, Vol. 23, pp. 97–109 (1994)
- [21] S. J. Chen and J. L. Lin: Robust D-stability of discrete and continuous time interval systems; *Journal of the Franklin Institute*, 341, pp. 505–517 (2004)
- [22] C. B. Soh, C. S. Berger and K. P. Dabke: On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 30, No. 10, pp. 1033–1036 (1985)
- [23] K. Kawabata, T. Mori and Y. Kuroe: Directional stability radius: a stability analysis tool for uncertain polynomial systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 48, No. 6, pp. 1012–1016 (2003)
- [24] V. L. Kharitonov: Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of differential equations; *Differentsialnye Uravneniya*, Vol. 14, pp. 1483–1485 (1979)
- [25] A. C. Bartlett, C. V. Hollot and H. Lin: Root locations of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges; *Math. Contr., Signals, and Syst.*, Vol. 1, pp. 61–71 (1988)
- [26] S. Bialas: A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices; *Bull. Polish Acad. Sci., Thch. Sci.*, Vol. 33, No. 9–10, pp. 473–480 (1985)
- [27] J. E. Ackermann and B. R. Barmish: Robust Schur stability of a polytope of polynomials; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 33, No. 10, pp. 984–985 (1988)
- [28] 松田, 川端, 森: 多項式ポリトープ解析のための Stability Feeler の提案; 電気学会論文誌 C, Vol. 126, No. 11, pp. 1311–1317 (2006)
- [29] T. Matsuda and T. Mori: Stability feeler: A tool for parametric robust stability analysis and its applications; *IET Control Theory & Applications*, Vol. 3, Issue 12, pp. 1625–1633 (2009)
- [30] A. P. Smith: Fast construction of constant bound functions for sparse polynomials; *Journal of Global Optimization*, Vol. 43, Issue 2–3, pp. 445–458 (2009)
- [31] 松田, 川西, 成清: Stability Feeler による実数不確かさに対する構造化特異値 μ の計算; 第 37 回制御理論シンポジウム資料, pp. 25–28 (2008)
- [32] 松田, 川西, 成清: Stability Feeler を用いた構造的実数不確かさに対するロバスト D 安定解析 安定性判定領域を最小化する部分領域拡張法の提案 第 38 回制御理論シンポジウム資料, pp. 191–194 (2009)

著者略歴

まつ だ ただ すけ
松 田 忠 典 (正会員)

1980年1月4日生。2008年3月京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科情報・生産科学専攻博士後期課程修了。同年4月豊田工業大学制御システム研究室ポスドクトラル研究員となり現在に至る。ロバスト安定性理論の研究に従事。電気学会、計測自動制御学会の会員。

かわ にし みち ひろ
川 西 通 裕 (正会員)

1968年8月6日生。1996年3月京都大学大学院工学研究科応用システム科学専攻博士後期課程修了。同年4月神戸大学助手、2006年11月豊田工業大学助教授、2007年4月同准教授となり現在に至る。その間、2003年2月～2003年4月米国スタンフォード大学客員研究員。制御理論と数値最適化およびその応用に関する研究に従事。計測自動制御学会、日本機械学会、IEEEなどの会員。

なり きよ たつ お
成 清 辰 生

1952年7月27日生．1978年名古屋大学
応用物理学科卒業，1983年同大学院情報
工学専攻単位取得退学．同年通産省工業技
術院九州工業技術試験所入所．1990年豊
田工業大学助教授，1998年同教授となり
現在に至る．その間，1993年～2009年理

化学研究所バイオメテック・コントロール研究センター
フロンティア研究員（非常勤）併任．制御工学，ロボット工
学の研究と教育に従事．計測自動制御学会，日本ロボット学
会，日本機械学会，電気学会の会員．