ハイブリッドオートマトンの非標準モデルについて*

中村 勝則^{†‡}・房岡 璋[†]

On a Nonstandard Model of Hybrid Automaton*

Katsunori NAKAMURA^{†‡} and Akira FUSAOKA[†]

We discuss the description and analysis of Zeno phenomenon on the nonstandard hybrid automaton (NHA) which is a re-interpretation of a standard hybrid automaton in the domain of ${}^*\mathbb{R}$. We introduce the * cycle trajectory that is an infinite repetition of discrete state transition and prove that the convergence into * cycle is a necessary and sufficient condition for the existence of slightly extended Zeno. By using this condition, we show the existence of Zeno in the NHA of Fuller's problem, and also give the simple way to escape from Zeno state (the regularization) for NHA.

1. はじめに

ハイブリッドオートマトンは、離散的な状態変化と連続的なダイナミクスが相互作用するハイブリッドシステムを記述するために広く用いられている形式的枠組みであり [2,10]、離散的なダイナミクスを制御グラフの節点間遷移で、連続的なダイナミクスを各節点に微分方程式を対応させることで表現する。時間は節点の内部で進行し、節点間の遷移は瞬時に行われる。ハイブリッドシステムには連続系にはない解析困難な多くの現象があることが知られている [10]。とくに、ハイブリッドオートマトンでは、有限オートマトンの概念を基礎としているために、無限回の離散的な変化を含む Zeno 現象が取り扱えないという問題点がある [5,11,12]。Zeno 現象はハイブリッドシステムに固有の現象で、有限時間内に無限回の離散的な状態変化が起こるものであり、システムに対するシミュレーションや到達可能性解析を困難なものにする原因となる。Fig. 1(a) は、バウンドするボールを表現したハイブリッドオートマトンである。ボールは静止するまで床で無限回弾むので Zeno 現象を含んでいる。このようなハイブリッドシステムの記述には、有限オートマトンでなく、無限回の遷移を取り扱う枠組みを考える

ことが自然である。無限回の遷移を許すオートマトンは Büchi の超限オートマトンをはじめいくつかのモデルが与えられており、これに基づいたハイブリッドオートマトンも提案されている [6,7]。しかしながら、超限オートマトンは自然数をベースにした有限オートマトンを順序数の上に拡張したものであり、無限回の状態遷移のみを取り扱うには問題がないが、ハイブリッドオートマトンは連続系のダイナミクスを含むので、単に無限集合の順序関係だけでなく、無限小または無限大になる量の取り扱いが必要である。この点で順序数をベースにした超限オートマトンは不十分で問題を残している。

本稿では、非標準解析の手法を用い、ハイブリッドオートマトンの形式的な記述はそのままにして、解釈の領域(連続変数や実行回数)を標準的な実数 $\mathbb{R}$ に無限小や無限大を加えた非標準の実数 ${}^*\mathbb{R}$ とすることにより、NHA (Nonstandard Hybrid Automaton) とよぶオートマトンを導入し、Zeno 現象の取り扱いについて論じる。

一般の力学系では、時間無限大の挙動に関して平衡点や ω 極限集合の概念が用いられている。Zeno 現象は有限時間内の現象であるが、無限回の離散的な変化を含むため同様の議論を行うことが考えられる。ハイブリッドオートマトンでは、システムの状態は節点と連続変数の値の組によって表すことができるので、遷移を無限回繰り返すとき、状態がどのような軌道を描くかが Zeno 現象の解析の中心である。多くの研究では、Zeno 現象を、有限個の節点からなる周期的な一つの閉じたパス上の状態遷移として限定している [5,12]。しかしながら、Zeno 現

* 原稿受付 2009 年 7 月 17 日

[†] 立命館大学 Ritsumeikan University; 1-1-1 Noji higashi, Kusatsu city, Shiga 525-8577, JAPAN

[‡] 平安女学院大学 Heian Jogakuin (St. Agnes') School; 5-81-1 Nanpeidai, Takatsuki city, Osaka 569-1092, JAPAN
Key Words: nonstandard analysis, hybrid system.

Fig. 1 Bouncing ball and the corresponding hybrid automata

象は必ずしも有限個の節点を周期的に遷移するものばかりとは限らない．たとえば，Fig. 1(b)のような，バウンドするボールに2進数 w の整数部分 $\lfloor w \rfloor$ の値によって遷移が決まる離散的变化を加えたオートマトンを考える． w の初期値が有理数の場合は，節点の遷移は，初期値に依存した有限の周期をもつ閉じたパスとして表現できるが，無理数の場合は有限の周期を持たない．

しかしながら，本論文で示すように，無限長の節点の遷移を周期的に繰り返すパスにまで拡大すると，無限回の遷移の後，同一節点で連続変数の値の差が無限小である状態に還るという意味で周期的な軌道を考えることで，すべての Zeno 現象をとらえることができる．このことから以下では，*cycle 軌道の概念を導入し Zeno 現象を扱う．Zeno 現象は，有限時間内に無限回の離散的变化が行われる現象として定義されるが，実際は，節点内部で連続的な変化を起こす時間が次第に 0 に収束し，節点上での滞在時間が無限小になるにもかかわらず，離散的变化が繰り返されるというところに特徴がある．これは有限時間内でなくても起こる現象であるので，本論文では拡張 Zeno を新たに定義した．

一般のハイブリッドオートマトンが Zeno 現象を起こすための必要十分条件を得ることは未解決の問題であるが，本論文では，NHA が拡張 Zeno 現象を起こすための必要十分条件は，*cycle 軌道に収束することであることを示す．

本論文の後半では，Fuller 問題とよばれる古典的な最適制御の問題を取り上げる．Fuller 問題の解は，Zeno 現象を用いて停留点 (Zeno 点) に達し，次に逆 Zeno 現象により目標点に到達する軌道であり，最も興味深いハイブリッドシステムの一つの例である．ここでは，Fuller 問題の解に対する NHA が拡張 Zeno 現象，および Zeno 現象を含むこと，さらに NHA では比較的容易に正則化 (regularization) が可能であり，正則化された NHA では，Zeno 状態から脱出し逆 Zeno により目標点に到達する軌道が記述されることを示す．

2. NHA (Nonstandard Hybrid Automaton)

以下では， $(a_1, a_2, \dots)$ のように数列の末尾が継続記号 $\dots$ となっている場合は無限長の数列を， $(a_1, a_2, \dots, a_k)$

のように最終の項が明記されている場合は有限長の数列を意味する．

2.1 非標準の実数 ${}^*\mathbb{R}$

非標準の実数 ${}^*\mathbb{R}$ は，無限長の実数列で数表現することで，無限小や無限大を含む数集合に $\mathbb{R}$ を拡大したものである．ただし，そのままでは大きすぎるので，フィルタを用いて数列の有限部分の差異を無視する [1]．

【定義 1】 非標準の実数

$\mathbb{N}$ を自然数の集合とする． $\mathbb{N}$ の無限部分集合の集まり

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} - A : \text{有限集合}\}$$

を，Fréchet フィルタとよぶ．つぎに，数列

$$a = (a_1, a_2, \dots), \quad b = (b_1, b_2, \dots)$$

に対して，次のような関係 $\sim$ を定義する¹．

$$(a_1, a_2, \dots) \sim (b_1, b_2, \dots) \Leftrightarrow \{k \mid a_k = b_k\} \in \mathcal{F}$$

直ちにわかるように，関係 $\sim$ は同値関係である．このようにすることで， $\mathcal{F}$ は無限集合のみの集まりなので，数列の有限部分の差異を無視することができる．

非標準の実数を ${}^*\mathbb{R} = W / \sim$ で定義する．すなわち， $(a_1, a_2, \dots)$ の同値類を $[\langle a_1, a_2, \dots \rangle]$ と書き，これで非標準の実数を表す．

非標準の変数や関数の記号には $*$ を付けて標準の記号と区別する (非標準であることが明らかな場合は省略する)． $\mathbb{R}$ 上の数 a や関数 $f(x)$ は， ${}^*\mathbb{R}$ 上では $[\langle a, a, a, \dots \rangle]$ ， $[\langle f(x), f(x), \dots \rangle]$ と表現できるので， ${}^*\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ を含む．

${}^*\mathbb{R}$ が非標準の実数とよばれるのは，実数体としての $\mathbb{R}$ の公理をすべて満たすからである．すなわち $\mathbb{R}$ で成り立つ性質はすべて ${}^*\mathbb{R}$ でも成り立つ (移行原理)．

【定義 2】 算術演算と関係

${}^*\mathbb{R}$ に対して，算術演算 $+$ ， $-$ ， $\times$ ， $/$ や関係を以下のようにして定義する．

(1) 算術演算

$$[\langle a_1, a_2, \dots \rangle] + [\langle b_1, b_2, \dots \rangle] = [\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots \rangle]$$

他の演算に関しても同様に定義される．

(2) 関係

$$[\langle a_1, a_2, \dots \rangle] < [\langle b_1, b_2, \dots \rangle] \equiv \{n \mid a_n < b_n\} \in \mathcal{F}$$

¹厳密には，非標準解析では，Fréchet フィルタを拡大したウルトラフィルタが用いられる．

他の関係も同様に定義される．

【定義 3】 無限小，無限大

無限小の数は，その絶対値が，0 でない任意の正の実数より小さい数である．すなわち，

$\{b \in {}^*\mathbb{R} \mid \forall a \in \mathbb{R}[a \neq 0 \Rightarrow |b| < |a|]\}$ の要素である．同様に，無限大の数は，その絶対値が，任意の実数より大きい数である．すなわち，

$\{c \in {}^*\mathbb{R} \mid \forall a \in \mathbb{R}[a < |c|]\}$ の要素である．たとえば，ある実数 a に対して， $\left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < a\right\} \in \mathcal{F}$ なので，

$\varepsilon = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\rangle$ は無限小の数である．同様に，ある実数 a に対して， $\{n \in \mathbb{N} \mid a < n\} \in \mathcal{F}$ なので， $\omega = \langle 1, 2, 3, \dots \rangle$ は無限大の数である．この場合，

$$\varepsilon\omega = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\rangle \cdot \langle 1, 2, 3, \dots \rangle = \langle 1, 1, \dots \rangle = 1$$

である．

【定義 4】 非標準の自然数

${}^*\mathbb{R}$ と同様に，非標準の自然数 ${}^*\mathbb{N}$ は以下のように定義される．

$$\langle n_1, n_2, \dots \rangle \in {}^*\mathbb{N} \quad (n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N})$$

$\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{N}$ である． ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ は無限大の数の集合であり，先に挙げた ω や， $\omega + 1 = \langle 2, 3, 4, \dots \rangle$ ， $2\omega = \langle 2, 4, 6, \dots \rangle$ などのはこれの要素である．

【定義 5】 近接関係

2項関係 $a \approx b$ は，二つの数 a, b の差が無限小であることを意味する同値関係である．たとえば， $a = \left\langle 2, \frac{3}{2}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots \right\rangle$ ， $b = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\rangle$ の場合，任意の正の実数 c に対して $\left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n+1} < c\right\} \in \mathcal{F}$ となるので， $a - b$ は無限小である．したがって $a \approx b$ である．

【定義 6】 標準部分 (shadow)

すべての有限な非標準の実数 $a \in {}^*\mathbb{R}$ には，それに対応する唯一の標準の実数 $b \in \mathbb{R}$ が存在し， $a \approx b$ である．このとき， b は a の標準部分であるという．これを ${}^\circ$ を用いて， $b = {}^\circ a$ と書く．

$\mathbb{R}$ における連続性や極限は， ${}^*\mathbb{R}$ 上では次のように定義される．

【定義 7】 連続性，極限

- (1) 標準の関数 $f(x)$ の拡大は， $x = \langle x_1, x_2, \dots \rangle$ に対し， ${}^*f(x) = \langle f(x_1), f(x_2), \dots \rangle$ により定義される．
- (2) 標準の関数 $f(x)$ が標準の $x \in \mathbb{R}$ において連続であることの定義は以下のとおりである．

$$\forall y \in {}^*\mathbb{R}[y \approx x \Rightarrow {}^*f(y) \approx f(x)]$$

- (3) 数列 a_n の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$ は， ${}^*\mathbb{R}$ 上では次のように表現される．

$$\forall n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}[a_n \approx \alpha]$$

したがって， $\forall m, n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}[a_m \approx a_n]$ である．

2.2 ハイブリッドオートマトン (Hybrid Automaton)

【定義 8】 ハイブリッドオートマトン

ハイブリッドオートマトン $\mathcal{H}$ は次のような 7 対

$$\mathcal{H} = (\Gamma, X, \mathcal{I}, D, \Pi, G, \Sigma)$$

として構成される．

Γ : 制御グラフ $\Gamma = (Q, E)$

Q は節点 (node) の有限集合 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ ， E

は節点間の枝 (edge) の有限集合

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subseteq Q \times Q \text{ である．}$$

X : 変数ベクトル $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \subseteq \mathbb{R}^n$

節点と変数の組 (q_i, x) を状態 (state) という．

$\mathcal{I}$: 初期状態の集合 $\mathcal{I} = \{(q_0, x_0)\} \ (q_0 \in Q)$

D : 各節点 q_i に対する変数のドメイン $D(q_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ の集合．

Π : 各節点 q_i 上の連続ダイナミクスを記述する微分方程式 $\dot{x} = f(x, q_i)$ の有限集合．ただし，各節点 q_i に対して $f(\cdot, q_i)$ がリプシッツ条件を満たすものとする．

G : ジャンプ条件 $H(e, x): E \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ．本稿では $H(e, x)$ は x に関する連続関数に限定し， $H(e, x) = 0$ により節点間の遷移が起こる条件を与える．

Σ : 事象 $x' := g(e, x) \ (g: E \times X \rightarrow X)$ ．本稿では $g(e, x)$ は x に関する連続関数に限定し，節点間の遷移が起こった時点での変数の離散的变化を与える．

【定義 9】 ハイブリッドオートマトン $\mathcal{H}$ の実行

ハイブリッドオートマトンの節点間の遷移に対する時間の列を，時区間の集合 $\mathcal{T} = \{[\hat{\tau}_0, \tilde{\tau}_0], [\hat{\tau}_1, \tilde{\tau}_1], \dots\}$ に対応させ，この $\mathcal{T}$ を hybrid time trajectory とよぶ．当然，すべての i において $\hat{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_i$ かつ $\tilde{\tau}_i = \hat{\tau}_{i+1}$ である．各時区間を $I_i = [\hat{\tau}_i, \tilde{\tau}_i]$ と表現する．

時刻 t における変数 x の値を $x(t)$ と書く．すなわち $x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ である．また， q は時区間の関数 $q: \{I_i\} \rightarrow Q$ として扱う．他方， x については，各節点の滞在開始時と終了時の値を与える以下の関数 $\hat{x}, \check{x}$ を使用する．

$$\hat{x}(I_i) = x(\hat{\tau}_i), \quad \check{x}(I_i) = x(\tilde{\tau}_i)$$

時区間 I_i において微分方程式の解を $\phi(\hat{x}, t)$ とすると， $\check{x}$ は次のように定義される．

$$\check{x} = \hat{x} + \int_{\hat{\tau}_i}^{\tilde{\tau}_i} f(\phi(\hat{x}, s), q(I_i)) ds$$

$\mathcal{H}$ の hybrid time trajectory を $\mathcal{T} = \{I_0, I_1, \dots, I_N\}$ とするとき， $\chi = (\mathcal{T}, q, \hat{x}, \check{x})$ が下記の条件をすべて満たす場合， χ を $\mathcal{H}$ の実行という．

$i = 0, 1, \dots, N-1$ に対して

- (1) $(q(I_0), \hat{x}(I_0)) \in \mathcal{I}$
- (2) $e_i = (q(I_i), q(I_{i+1})) \in E$
- (3) $H(e_i, \check{x}(I_i)) = 0$
- (4) $\hat{x}(I_{i+1}) = g(e_i, \check{x}(I_i))$

- (5) $t \in I_i : i = 0, 1, \dots, N$ であるすべての t において
 $x(t) \in D(q(I_i))$ である .

節点 q_i においてジャンプ条件 $H((q_i, q_j), x(t)) = 0$ が満たされても、必ず節点 q_j に遷移するとは限らないが、本論文では、一意の遷移が直ちに行われるシステムを対象とする。状態遷移の一意性を定義 10 に、遷移が直ちに行われる性質を定義 11 に示す。

【定義 10】 決定性ハイブリッドオートマトン

任意の節点 q_i, q_j, q_k に対し、 $e = (q_i, q_j), e' = (q_i, q_k) \in E$ かつ $q_j \neq q_k$ ならば、すべての $x \in D(q_i)$ に対して、

$$\{x | H(e, x) = 0\} \cap \{x | H(e', x) = 0\} = \emptyset$$

である。

【定義 11】 横断性条件

各ノード q_i において、以下の条件 (1), (2) を満たすことを横断性条件という。

$$(1) \begin{cases} x \in D(q_i) \rightarrow H((q_i, q_j), x(t)) \geq 0 \\ \text{特に } x \text{ が } D(q) \text{ の内部にある場合は} \\ H((q_i, q_j), x(t)) > 0, \text{ そうでない場合は,} \\ H((q, q'), x(t)) = 0 \\ x \notin D(q) \rightarrow H((q_i, q_j), x(t)) < 0 \end{cases}$$

変数 $x \in \mathbb{R}^n$ の各要素を $x_i (i = 1, \dots, n)$ とし、 H の f に沿った Lie 微分 L_f を以下のように定義する。

$$(2) \begin{cases} L_f H((q_i, q_j), x) = \sum_{i=1}^n \left\{ f_i(q_i, x) \frac{\partial H}{\partial x_i} \right\} \\ \begin{cases} H((q_i, q_j), \tilde{x}) = 0 \wedge L_f H((q_i, q_j), \tilde{x}) < 0, \\ H((q_i, q_j), \tilde{x}) = 0 \wedge \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} [L_f^i H((q_i, q_j), \tilde{x}) = 0] \Rightarrow \\ L_f^{k+1} H((q_i, q_j), \tilde{x}) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$L_f H((q_i, q_j), x)$ は $H((q_i, q_j), x)$ の時間変化を与えるものであるから、横断性条件を満たす場合、 $H((q_i, q_j), x) = 0$ となれば直ちに q_j に遷移する。

2.3 NHA (Nonstandard Hybrid Automaton)

これまでの定義から明らかなように、ハイブリッドオートマトンでは無限回の実行を取り扱うことはできない。以下では、ハイブリッドオートマトンの形式的定義はそのままにして、実行の領域を $\mathbb{R}$ から ${}^*\mathbb{R}$ に置き換えることにより、非標準のハイブリッドオートマトン NHA を定義する。NHA は標準のハイブリッドオートマトンの拡大である。

NHA では時間、連続変数、実行回数はすべて ${}^*\mathbb{R}^+$, ${}^*\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{N}$ である。ただし、制御グラフ $\Gamma = (Q, E)$ の節点や枝は有限集合であるから同一のままである。すなわち、

$${}^*\mathcal{H} = (\Gamma, {}^*X, {}^*\mathcal{I}, {}^*D, {}^*\Pi, {}^*G, {}^*\Sigma)$$

である。

【定義 12】 NHA ${}^*\mathcal{H}$ の実行

NHA ${}^*\mathcal{H}$ において、実行 $\chi = (T, q, \hat{x}, \tilde{x})$ を以下のように定義する。

- (1) 初期値は標準の実数とする。すなわち、
 $(q(I_0), [\langle \hat{x}(I_0), \hat{x}(I_0), \dots \rangle]) \in {}^*\mathcal{I}$ 、ただし、 $\hat{x}(I_0) \in \mathbb{R}$ である。
- (2) 最終節点以外のすべての節点において、
 $e_i = (q(I_i), q(I_{i+1})) \in E$ である。
- (3) 節点 q に対する $n = [\langle n_1, n_2, \dots \rangle]$ 回目の入力を、
 $q_n, \hat{x}_n = [\langle \hat{x}_{n_1}, \hat{x}_{n_2}, \dots \rangle], \hat{\tau}_n = [\langle \hat{\tau}_{n_1}, \hat{\tau}_{n_2}, \dots \rangle]$ で定義する。 n が有限の場合は、 $n = [\langle n, n, \dots \rangle]$ であるから標準の場合と全く同じである。節点 q からの出力は、 $\tilde{x}_n = [\langle \tilde{x}_{n_1}, \tilde{x}_{n_2}, \dots \rangle], \tilde{\tau}_n = [\langle \tilde{\tau}_{n_1}, \tilde{\tau}_{n_2}, \dots \rangle]$ により定義する。 $x(t) = [\langle x_{n_1}(t), x_{n_2}(t), \dots \rangle]$ とすると、

$$x_{n_k}(t) = \hat{x}_{n_k} + \int_{\hat{\tau}_{n_k}}^t f(\phi(\hat{x}_{n_k}, s), q_n) ds$$

である。

- (4) すべての時区間において、 $\tilde{x}(I_i) = [\langle \tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}, \dots \rangle]$ とするとき、
 $H(e_i, \tilde{x}(I_i)) = [\langle H(e_i, \tilde{x}_{i_1}), H(e_i, \tilde{x}_{i_2}), \dots \rangle] = 0$ である。
- (5) 同様に
 $\hat{x}(I_{i+1}) = g(e_i, \tilde{x}(I_i)) = [\langle g(e_i, \tilde{x}_{i_1}), g(e_i, \tilde{x}_{i_2}), \dots \rangle]$ である。
- (6) すべての時区間において、 $t \in I_i$ なるすべての t に対して $x(t) \in {}^*D(q(I_i))$ である。

標準のハイブリッドオートマトンとは異なり、NHA ではドメインが無限大を含むことも許されるので、変数が有限の値をとる実行を特に区別する。

【定義 13】 有界な実行

すべての時区間 I_i において、ある標準の $M \in \mathbb{R}^n$ が存在して $\forall t \in I_i [|x(t)| < |M|]$ である場合に限り、実行 $\chi = (T, q, \hat{x}, \tilde{x})$ は有界であるという。

以下では、有界な実行のみを扱う。

【NHA の例】

Fig. 1(a) の NHA を考える。ボールを初速度 v で投げ上げたとする。 n 回バウンド ($n \in \mathbb{N}$) したときの位置と速度は、 $(\hat{x}_n, \hat{y}_n) = (0, \rho^{n-1}v)$ である。無限回 (たとえば ω 回) バウンドした後の挙動は、 $\omega = [1, 2, \dots]$ であるから、

$$\begin{aligned} (\hat{x}_\omega, \hat{y}_\omega) &= [\langle (0, v), (0, \rho v), \dots \rangle], \\ (\tilde{x}_\omega, \tilde{y}_\omega) &= [\langle (0, -v), (0, -\rho v), \dots \rangle], \\ \hat{\tau}_\omega &= [\langle 0, 2v/g, \dots \rangle], \tilde{\tau}_\omega = [\langle 2v/g, 2v\rho/g, \dots \rangle] \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} H(e, (\hat{x}_\omega, \hat{y}_\omega)) &= [\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots \rangle] = [\langle 0, 0, \dots \rangle] = 0, \\ g(e, (\hat{x}_\omega, \hat{y}_\omega)) &= [\langle (\tilde{x}_1, -\rho\tilde{y}_1), (\tilde{x}_2, -\rho\tilde{y}_2), \dots \rangle] = \\ &= [\langle (0, \rho v), (0, \rho^2 v), \dots \rangle] \end{aligned}$$

となるから、 $\omega + 1 = [2, 3, \dots]$ に対し、

$$(\hat{x}_{\omega+1}, \hat{y}_{\omega+1}) = [\langle (0, \rho v), (0, \rho^2 v), \dots \rangle]$$

Fig. 2 An extended-Zeno hybrid automaton

となる． $\mathbb{R}$ 上の議論では，有限の n に対し $(\hat{x}_n, \hat{y}_n) = (0, \rho^{n-1}v)$ であるから， $\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{x}_n, \hat{y}_n) = (0, 0)$ となる．他方，NHA では $(\hat{x}_\omega, \hat{y}_\omega) \approx (0, 0)$ であり，無限回のバウンドを繰り返すと速度も変位も無限小になる．したがって，無限回の節点の遷移を，極限の概念を用いることなく取り扱うことができる．

3. 拡張 Zeno 現象と *cycle 軌道

3.1 Zeno 現象

Zeno 現象は有限時間内に無限回の状態遷移が生起する現象，すなわち，状態遷移の時間の無限列 $\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1, \dots$ が有界であることとして定義される．

【定義 14】 Zeno 実行

実行 $\chi = (T, q, \hat{x}, \hat{x})$ において， $T = \{I_0, I_1, \dots, I_m, \dots\}$ とする．このとき，ある標準の T が存在し，任意の無限大の m に対して $\hat{\tau}_m \approx \tilde{\tau}_m \approx T$ である場合に， χ は Zeno 実行であるという．また，この時刻 T を Zeno 時間といい，Zeno 時刻の状態を Zeno 状態という．Zeno 実行の場合，状態遷移の時間の無限列 $\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1, \dots$ は単調増大かつ有界であるから，

$$\forall m \in \mathbb{N} - \mathbb{N} [\tilde{\tau}_m - \hat{\tau}_m \approx 0]$$

が成り立つ．すなわち，Zeno 時間の近くでは，節点内部の連続的なダイナミクスに支配される時間が限りなく 0 に近くなって時間の進行が停止し，離散的なダイナミクスのみが繰り返される．これが Zeno 現象の大きな特徴と考えられるので，ここでは有限時間内という条件をはずし，数列 $(\hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_1, \dots)$ が 0 に収束する現象を拡張 Zeno 現象とよぶことにする．

【定義 15】 拡張 Zeno

実行 $\chi = (T, q, \hat{x}, \hat{x})$ において， $T = \{I_0, I_1, \dots, I_m, \dots\}$ とするとき， $\forall m \in \mathbb{N} - \mathbb{N} [\tilde{\tau}_m - \hat{\tau}_m \approx 0]$ である場合に， χ は拡張 Zeno 実行であるという．Zeno 現象はすべて拡張 Zeno 現象である．

拡張 Zeno 実行のシステムの例を Fig. 2 に示す．各節点の入力回数を n とすると，それぞれの節点における連続ダイナミクスにかかる時間は $\tilde{\tau} - \hat{\tau} = \frac{1}{2n}$ となる．したがって， $i \in \mathbb{N} - \mathbb{N}$ なる i に対して $\tilde{\tau}_i - \hat{\tau}_i \approx 0$ となって拡張 Zeno 軌道であることが示せるが，このときの時刻は

$t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty$ となるので Zeno 現象ではない．さらに，下に示すように，変数 w の値は y の値によって異なる．

$$\begin{cases} y = [1, 3, 5, \dots] \rightarrow w = 1 \\ y = [2, 4, 6, \dots] \rightarrow w = -1 \end{cases}$$

$\tilde{\tau}_i - \hat{\tau}_i \approx 0$ となった場合の w の値は，フィルタ $\mathcal{F}$ の取り方で決まる．

3.2 *cycle 軌道

Zeno 現象の解析には，制御グラフ $\Gamma = (Q, E)$ が有限周期を持つ cycle，すなわち

$$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}, E = \{(q_0, q_1), \dots, (q_m, q_0)\}$$

であるハイブリッドオートマトンが広く使われている [5, 11]．文献 [5] ではこの限定されたオートマトン上で，以下のような Zeno 平衡軌道の概念を導入している．

【定義 16】 Zeno 平衡軌道

cycle $\{q_0, q_1, \dots, q_m\}$ 上のハイブリッドオートマトンに対し，以下の条件を満たす集合，

$$z = \{z_0, z_1, \dots, z_m\} \quad (z_0, \dots, z_m \in \mathbb{R})$$

を Zeno 平衡軌道という．

$k = 0, 1, \dots, m-1$ に対し，

- (1) $q_0 = q_m, z_0 = z_m$
- (2) $H((q_k, q_{k+1}), z_k) = 0$
- (3) $z_{k+1} = g((q_k, q_{k+1}), z_k)$
- (4) $f(z_k, q_k) \neq 0$

$\chi = (T, q, \hat{x}, \hat{x})$ を Zeno 実行， $z = \{z_0, z_1, \dots, z_m\}$ を Zeno 平衡軌道とする．各節点 q_k に対し， $z_k \in W_k$ である任意の近傍 $\{W_0, W_1, \dots, W_{m-1}\}$ を取ったとき，あるときより先では，各節点内で $x(t) \in W_k$ が常に成り立つとき，実行 χ は Zeno 平衡軌道 z に収束すると定義する．この前提のもとで，A.D. Ames らは Zeno 現象が起こるための十分条件を与えている [5]．

しかしながら，Fig. 1(b) のハイブリッドオートマトンのように，Zeno 現象は必ずしも有限周期の節点の遷移の繰り返しになるとは限らない．また，Zeno 平衡軌道のように有限周期の軌道に収束するとは限らない．

ここでは， $\Gamma = (Q, E)$ は一般の制御グラフとし，NHA

において, $\ast$ cycle 軌道とよぶ無限周期の軌道を導入する. これにより有界な拡張 Zeno 実行は $\ast$ cycle 軌道に収束し, 逆に, $\ast$ cycle 軌道に収束する実行は, 有界な拡張 Zeno 実行であることを示すことにより, 有界な拡張 Zeno 実行を特徴付ける.

【定義 17】 $\ast$ cycle 軌道

$k \in \ast\mathbb{N}$ とする. 節点の列 $(p_0, p_1, \dots, p_k)$ と, 標準の実数列 $(z_0, z_1, \dots, z_k)$ ($z_0 \in \mathbb{R}^n, z_1 \in \mathbb{R}^n, \dots, z_k \in \mathbb{R}^n$) が, 以下の条件をすべて満たすとき,

$$\zeta = \{(p_0, z_0), (p_1, z_1), \dots, (p_k, z_k)\}$$

を $\ast$ cycle 軌道とよぶ.

すべての $r \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ に対し,

- (1) $p_0 = p_k, z_0 = z_k$
- (2) $e_r = (p_r, p_{r+1}) \in E$
- (3) $H(e_r, z_r) = 0$
- (4) $z_{r+1} = g(e_r, z_r)$
- (5) $f(z_r, p_r) \neq 0$

【定義 18】 収束

$\chi = (\mathcal{T}, q, \hat{x}, \tilde{x})$ を実行, $\zeta = \{(p_0, z_0), (p_1, z_1), \dots, (p_k, z_k)\}$ を $\ast$ cycle 軌道とする. 以下の条件を満たす場合, 実行 χ は時区間 I_j ($j \in \ast\mathbb{N}$) から始まる $\ast$ cycle 軌道 ζ に収束するという.

- (1) $q(I_j) = p_0$
- (2) $\hat{x}(I_j) \approx z_0$
- (3) $r = 0, 1, \dots, k-1$ に対し, すべての $t \in I_{j+r}$ について, $\hat{x}(I_{j+r}) \approx z_r$ ならば $x(t) \approx z_r$ である.

【定理 1】 実行 $\chi = (\mathcal{T}, q, \hat{x}, \tilde{x})$ が有界でかつ拡張 Zeno 実行ならば, χ は $\ast$ cycle 軌道に収束する.

(証明) 有界な無限集合 $\{\hat{x}(I_1), \hat{x}(I_2), \dots\}$ は少なくとも一つの集積点を含むので, $i_1 < i_2 < \dots$ である $\{i_1, i_2, \dots\} \subseteq \ast\mathbb{N} - \mathbb{N}$ が存在して, $\hat{x}(I_{i_1}) \approx \hat{x}(I_{i_2}) \approx \dots$ である. さらに, Q は有限集合なので, 実行の中に含まれる節点の集合は有限であるから, $q(I_j) = q(I_{j'})$, $x(I_j) \approx x(I_{j'})$ である j, j' が存在する. したがって, 次のような状態遷移列が実行 χ 上に存在する. ただし, $j' = j + k$ とする.

$$(q(I_j), \hat{x}(I_j)), (q(I_{j+1}), \hat{x}(I_{j+1})), \dots, (q_{j+k}, \hat{x}(I_{j+k}))$$

各節点に入ると有限時間で次の節点に遷移し, 平衡点に停留することはないから,

$$f((q(I_j), x(t)) \neq 0, \dots, f((q(I_{j+k}), x(t)) \neq 0$$

が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned} p_0 &= q(I_j), p_1 = q(I_{j+1}), \dots, p_k = q(I_{j+k}) = p_0, \\ z_0 &= \hat{x}(I_j), z_1 = \hat{x}(I_{j+1}), \dots, z_k = \hat{x}(I_{j+k}) = z_0 \\ (\because \hat{x}(I_j) \approx \hat{x}(I_{j+k})) e_0 &= (p_0, p_1), \dots, e_k = (p_{k-1}, p_0) \end{aligned}$$

とおく.

実行 χ は拡張 Zeno であり, $r = 0, 1, \dots, k-1$ に対し, $\tilde{\tau}(I_{j+r}) - \hat{\tau}(I_{j+r}) \approx 0$ である.

したがって, $t \in [\hat{\tau}(I_{j+r}), \tilde{\tau}(I_{j+r})]$ に対して, $t - \hat{\tau}(I_{j+r}) \approx 0$ であるから,

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{x}(I_{j+r}) + \int_{\hat{\tau}(I_{j+r})}^t f(\phi(\hat{x}, s), q(I_{j+r})) ds \\ &\approx \hat{x}(I_{j+r}) + f(\phi(\hat{x}, s), q(I_{j+r}))(t - \hat{\tau}(I_{j+r})) \approx \hat{x}(I_{j+r}) \end{aligned}$$

が成り立つ. $t = \tilde{\tau}$ とすることにより,

$$\tilde{x}(I_{j+r}) \approx \hat{x}(I_{j+r}) \approx z_r$$

が成り立ち, $H(e, x)$, $g(e, x)$ の連続性から,

$$H(e_r, z_r) \approx H(e_r, \tilde{x}(I_{j+r})) = 0$$

$$g(e_r, z_r) \approx g(e_r, \tilde{x}(I_{j+r})) = \hat{x}((I_{j+r+1})) \approx z_{r+1}$$

であるが, $H(e_r, z_r)$, $g(e_r, z_r)$ は標準的な関数値をとることから,

$$H(e_r, z_r) = 0, g(e_r, z_r) = z_{r+1}$$

が成立する.

【定理 2】 決定性ハイブリッドオートマトンにおいて, 標準の値を持つ初期状態から始まる実行 $\chi = (\mathcal{T}, q, \hat{x}, \tilde{x})$ が, 時区間 I_j から始まる $\ast$ cycle 軌道 $\{(p_0, z_0), (p_1, z_1), \dots, (p_k, z_k)\}$ に収束するとき, 実行 χ は有界な拡張 Zeno 実行である.

(証明) まず, $r = 0, 1, \dots, k-1$ に対し, $q(I_{j+r}) = p_r$, $\hat{x}(I_{j+r}) \approx z_r$ であることを示す.

$a_r = (q(I_r), q(I_{r+1}))$ と記す. 収束条件より, $q(I_j) = p_0, \hat{x}(I_j) \approx z_0$ であるから, $t \in I_j$ に対して $x(t) \approx z_0$ である. したがって, $\tilde{x}(I_j) \approx z_0$ である.

$H(a_0, \tilde{x}(I_j)) = 0$ であるが, $H(e, x)$ は標準的な値を与える連続関数であることから, $H(a_0, z_0) \approx H(a_0, \tilde{x}(I_j)) = 0$ により, $H(a_0, z_0) = 0$. 他方, $\ast$ cycle 軌道の条件から, $H((p_0, p_1), z_0) = 0$. 決定性ハイブリッドオートマトンであるから, $a_0 = (p_0, p_1)$ となり, $q(I_{j+1}) = p_1$. さらに, $g(e, x)$ の連続性より,

$$\hat{x}(I_{j+1}) = g(a_0, \tilde{x}(I_j)) \approx g((p_0, p_1), z_0) = z_1$$

同じ議論を繰り返して,

$$q(I_{j+2}) = p_2, \hat{x}(I_{j+2}) \approx z_2$$

が得られる. したがって, $r = 0, 1, \dots, k-1$ に対し, $q(I_{j+r}) = p_r$, $\hat{x}(I_{j+r}) \approx z_r$ が成り立つ ($\because k$ は一般に無限大であるが, 移行原理により $\ast\mathbb{N}$ に対しても数学的帰納法が成り立つ).

以上のことから, 実行 χ は周期 k の軌道に接近することがいえる.

つぎに, $r = 0, 1, \dots, k-1$ に対し, $\tilde{\tau}(I_{j+r}) - \hat{\tau}(I_{j+r}) \approx 0$ であることを示す.

$\tilde{\tau}(I_{j+r}) - \hat{\tau}(I_{j+r}) \neq 0$ と仮定する. $f(x, q)$ はリプシッツ条件を満たすので, $t \in I_{j+r}$ なるすべての t において $|f(x(t), p_r) - f(z_r, p_r)| < M|x(t) - z_r|$. $x(t) \approx z_r$ より, $f(x(t), p_r) \approx f(z_r, p_r)$. $\ast$ cycle 軌道の条件から, $f(z_r, p_r) \neq 0$ である. したがって, $f(x(t), p_r) \neq 0$ である

から，標準の実数の区間 $[t_1, t_2] \subseteq I_{j+r}$ ($t_1, t_2 \in \mathbb{R}$) と，標準の正の実数 a をうまく取って $t \in [t_1, t_2]$ に対し，

$$f(x(t), p_r) > a \text{ または } f(x(t), p_r) < -a$$

とすることができる．しかし， $f(x(t), p_r) > a$ とすると， $t \in I_{j+r}$ に対し $x(t) \approx z_r$ であるから，

$$\begin{aligned} z_r &\approx x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(\phi(x(t_1)), s, p_r) ds \\ &\approx z_r + a(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

となり， $a(t_2 - t_1) \not\approx 0$ であることから，この式は矛盾である．さらに $f(x(t), p_r) < -a$ としても同じく矛盾となるので， $r = 0, 1, \dots, k-1$ に対し， $\tilde{\tau}(I_{j+r}) - \hat{\tau}(I_{j+r}) \approx 0$ が成り立つ．したがって，実行 χ は拡張 Zeno 実行である．また， $r = 0, 1, \dots, k-1$ に対し， $z_r \in \mathbb{R}$ であるので，実行 χ は有界である．

4. Fuller のダイナミクスの解析

4.1 Fuller 問題の Zeno 現象

4.1.1 Fuller 問題と解

Fuller 問題は古典的な最適制御の問題であり，

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \text{ where } u \in [-1, 1] \end{cases}$$

の制約と，初期条件 $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ ，終了条件 $x(t_f) = x_f$, $y(t_f) = y_f$ の設定のもとで

$$I = \int_{t_0}^{t_f} x^2 dx$$

を最小化する問題である．Fuller はポントリヤギンの最大原理を用いて，Zeno 現象および逆 Zeno 現象を含む解を与えている [13]．この解は，以下のように，無限回の制御のスイッチングにより Zeno 状態 $(x, y) = (0, 0)$ に至り，有限時間の間停留した後，Zeno を時間的に反転した形の軌道により Zeno 状態から脱出するものである (Figs. 3, 5)．

$$c \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ とし，関数 } H_1(x, y), H_2(x, y) \text{ を}$$

$$H_1(x, y) = x + cy^2, H_2(x, y) = -x + cy^2$$

とおく． $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を二つの領域

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \{(x, y) | H_1(x, y) \geq 0 \wedge y \geq 0 \vee H_2(x, y) \leq 0 \wedge y < 0\} \\ \pi_2 &= \{(x, y) | H_1(x, y) \leq 0 \wedge y \geq 0 \vee H_2(x, y) \geq 0 \wedge y < 0\} \end{aligned}$$

に分ける．Fuller の解の前半部 (Zeno により $(x, y) = (0, 0)$ に至る) は，

$$u = -1 \text{ at } \pi_1; \quad u = 1 \text{ at } \pi_2$$

で与えられる制御のスイッチングを繰り返すものである (Fig. 3)．

4.2 NHA による記述

つぎに，NHA を用いて Fuller の解を記述する． $X = (x, y) \in {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R}$ とする．また， (x, y) が領域 π_1 にあると

Fig. 3 Fuller's solution (1)

きを節点 q_1 ，領域 π_2 にあるときを節点 q_2 とする．また，

$$\begin{aligned} f_1(q_1, (x, y)) &= y, \quad f_2(q_1, (x, y)) = -1 \\ f_1(q_2, (x, y)) &= y, \quad f_2(q_2, (x, y)) = 1 \end{aligned}$$

とする．このとき，NHA $\mathcal{H}$ は以下で定義される．

【定義 19】 Fuller の解に対する NHA

- $$\begin{aligned} \mathcal{H} &= (\Gamma, X, \mathcal{I}, D, \Pi, G, \Sigma) \\ (1) \Gamma &= (Q, E), Q = \{q_1, q_2\}, E = \{e_1: (q_1, q_2), e_2: (q_2, q_1)\} \\ (2) X &= (x, y), \mathcal{I} = \{(q_1, (x_0, y_0))\} \\ (3) D &= \{D(q_1): \pi_1, D(q_2): \pi_2\} \\ (4) \Pi &= \{(\dot{x}, \dot{y}) = (f_1, f_2)\} \\ (5) G &= \{H(e_1, (x, y)) = -H_2(x, y), \\ &\quad H(e_2, (x, y)) = -H_1(x, y)\} \\ (6) \Sigma &= \{g(e_1, (x, y)) = (x, y), g(e_2, (x, y)) = (x, y)\} \end{aligned}$$
- この NHA を Fig. 4 に示す．

Fig. 4 The NHA of Fuller's solution

4.2.1 Zeno 現象の存在

まず *cycle 軌道を求める．節点 $p_0 = q_1$ で $z_0 = (\xi_0, \eta_0)$ とする． e_1 により $p_1 = q_2$ に遷移するとき， $H(e_1, z_0) = 0$ から $-\xi_0 + c\eta_0^2 = 0$ となる． $z_1 = g(e_1, z_0) = z_0 = (\xi_0, \eta_0)$ ． e_2 により $p_1 = q_2$ から $p_2 = q_1$ に遷移するとき， $H(e_2, z_1) = 0$ となるので， $\xi_0 + c\eta_0^2 = 0$ となる．これより， $(\xi_0, \eta_0) = (0, 0)$ ．以上のことから， $z_0 = z_1 = z_2 = (0, 0)$ とすると $\zeta = \{(p_0, z_0), (p_1, z_1), (p_2, z_2)\}$ は以下の条件を満たすので，*cycle 軌道となる．

- $$\begin{aligned} (1) p_0 &= p_2 = q_1, \quad p_1 = q_2; \quad z_0 = z_2 = (0, 0) \\ (2) e_1 &= (p_0, p_1) = (q_1, q_2) \in E, \\ &\quad e_2 = (p_1, p_2) = (p_1, p_0) = (q_2, q_1) \in E \\ (3) H(e_1, (0, 0)) &= 0, \quad H(e_2, (0, 0)) = 0 \\ (4) z_1 &= g(e_1, z_0) = (0, 0), \quad z_2 = g(e_2, z_1) = (0, 0) \end{aligned}$$

$$(5) f_2(p_0, (0,0)) = -1 \neq 0, f_2(p_1, (0,0)) = 1 \neq 0$$

つぎに、任意の初期状態からスタートした軌道はすべてこの *cycle 軌道に収束することを示す。 $\chi = (T, q, \hat{x}, \check{x})$ を $(q_1, (x_0, y_0))$ からスタートする実行とする。まず以下の二つの関数

$$V_1(x, y) = x + \frac{1}{2}y^2, \quad V_2(x, y) = -x + \frac{1}{2}y^2$$

を導入する。 q_1 において、 $\dot{V}_1(x, y) = \dot{x} + y\dot{y} = y - y = 0$ であるから、 $V_1(x, y) = V_1(\hat{x}, \hat{y}) = V_1(\check{x}, \check{y})$ である。 $H_1(\hat{x}, \hat{y}) = 0, H_2(\check{x}, \check{y}) = 0$ が成り立つから、

$$V_1(x, y) = x + \frac{1}{2}y^2 = \left(\frac{1}{2} - c\right)\hat{y}^2 = \left(\frac{1}{2} + c\right)\check{y}^2$$

である。したがって、 $\rho = \frac{1-2c}{1+2c}$ とすると

$$\check{y} = -\sqrt{\rho}\hat{y}, \quad \check{x} = -\rho\hat{x}$$

が成り立つ。同様に、 q_2 において $\dot{V}_2(x, y) = -\dot{x} + y\dot{y} = -y + y = 0$ であるから、

$$V_2(x, y) = -x + \frac{1}{2}y^2 = \left(\frac{1}{2} - c\right)\hat{y}^2 = \left(\frac{1}{2} + c\right)\check{y}^2$$

これより、

$$\check{y} = -\sqrt{\rho}\hat{y}, \quad \check{x} = -\rho\hat{y}$$

が成り立つ。一般に、

$$\begin{aligned} \check{x}(I_n) &= -\rho\hat{x}(I_n) = (-\rho)^2\check{x}(I_{n-1}) \\ \check{y}(I_n) &= -\sqrt{\rho}\hat{x}(I_n) = (-\sqrt{\rho})^2\check{x}(I_{n-1}) \end{aligned}$$

であるから、

$$\check{x}(I_n) = (-\rho)^{n+1}\hat{x}_0, \quad \check{y}(I_n) = (-\sqrt{\rho})^{n+1}\hat{y}_0$$

である。 $\rho < 1$ であるから、 $j \in \mathbb{N} - \mathbb{N}$ を偶数にとると、

$$q(I_j) = q_1, \quad \check{x}(I_j) \approx 0, \quad \check{y}(I_j) \approx 0$$

が成り立つ。つぎに、 q_1 において $\dot{y} < 0$ であるから、 $t \in I_j$ に対して $-\sqrt{\rho}\hat{y}(I_j) \leq y(t) \leq \hat{y}(I_j)$ が成り立ち、 $y(t) \approx 0$ となる。また、

$$V_1(x, y) = x + \frac{1}{2}y^2 = \left(\frac{1}{2} - c\right)\hat{y}^2$$

より、 $\hat{x}(I_j) \leq x(t) \leq \left(\frac{1}{2} - c\right)\hat{y}^2$ であるから、 $x(t) \approx 0$ となる。 q_2 においても同様の議論が成り立つので、 $r = 0, 1$ に対し、すべての $t \in I_{j+r}$ について

$$(\hat{x}(I_{j+r}), \hat{y}(I_{j+r})) \approx (0, 0) \text{ ならば } (x(t), y(t)) \approx (0, 0)$$

が成り立つ。したがって、実行 χ は *cycle 軌道 $\zeta = \{(p_0, z_0), (p_1, z_1), (p_2, z_2)\}$ に収束するので、拡張 Zeno 実行である。

つぎに、この拡張 Zeno 実行が Zeno 実行であること、すなわち Zeno 時間が有限であることを示す。

Fig. 5 Fuller's solution (2)

q_1 において、 $\dot{y} = -1$ であるから

$$\check{y} = \hat{y} + \int_{\hat{\tau}}^{\check{\tau}} -1 ds$$

となる。したがって、 $\check{\tau} - \hat{\tau} = \hat{y} - \check{y} = (1 + \sqrt{\rho})\hat{y}$ となる。同様に、 q_2 において、 $\dot{y} = 1$ であるから

$$\check{y} = \hat{y} + \int_{\hat{\tau}}^{\check{\tau}} 1 ds$$

したがって、 $\check{\tau} - \hat{\tau} = \check{y} - \hat{y} = -(1 + \sqrt{\rho})\hat{y}$ となる。すなわち、 $\check{\tau}(I_n) - \hat{\tau}(I_n) = (1 + \sqrt{\rho})|\hat{y}(I_n)|$ であるから

$$\begin{aligned} \check{\tau}(I_j) &= \sum_{k=0}^j (\check{\tau}(I_k) - \hat{\tau}(I_k)) \\ &= (1 + \sqrt{\rho})(1 + \sqrt{\rho} + \dots + \sqrt{\rho}^j) \approx \frac{(1 + \sqrt{\rho})}{(1 - \sqrt{\rho})} < \infty \end{aligned}$$

となり、有限時間内に無限回のスイッチングが起こるので Zeno 現象である。

5. Zeno ダイナミクスの正則化

Fuller の解は、Zeno 実行により Zeno 点 $(x, y) = (0, 0)$ に入り、そこに一定時間停留して、逆 Zeno 実行 (無限小よりスタートして、有限時間内にスイッチングを無限回繰り返すこと) により、目標に到達するものである。このために、Zeno 点から抜け出す手段が必要になる。Johansson らは、Zeno 点に入るのを回避するために、オートマトンの正則化 (regularization) を提案している [3]。正則化とは、well-defined でない微分方程式を取り扱う場合によく用いられる手法であるが、ハイブリッドオートマトンでも同様の手法を用いてダイナミクスの近似を行うことができる。文献 [3] では、連続変数や時間に対してできるだけ小さい量 ϵ により摂動を行い、Zeno 現象を起こさないハイブリッドオートマトンにより近似している。

本論文では、非標準の述語を用いた別の方法を用いて、Zeno 時間の前と後でダイナミクスが自然につながって

Fig. 6 NHA for regularized Fuller phenomenon

いる形で Fuller ダイナミクスを扱う方法を提案する．

5.1 *NHA

先に定義した NHA に対し，ジャンプ条件の形式 $H(e, x) = 0$ に加えて， $H(e, x) \approx 0$ の形式も許されるように拡大したオートマトンを *NHA とよぶ．

定理 1 により，実行 χ が拡張 Zeno 実行のときは，*cycle 軌道に収束するので，これを $\zeta = \{(p_0, z_0), (p_1, z_1), \dots, (p_k, z_k)\}$ とする．各節点 $p_i; i=0, 1, \dots, k-1$ に新たな節点 r_i と枝 $e_i = (p_i, r_i)$ を追加し，ジャンプ条件を $H(e_i, x) \equiv |x - z_i|^2 \approx 0$ とする．ここで， $|u|$ はベクトル u の大きさを表す．これにより，実行 χ は，*cycle 軌道に入ることを回避し，新たな状態に遷移する．

Fuller の解を表す正則化された *NHA を Fig. 6 に示す．この *NHA では，軌道が *cycle 軌道に限りなく近くなったときに， e_3 もしくは e_4 によって節点 q_5 に遷移し，Zeno 時間以降にシステムの時間が進展する．

5.2 Zeno 点における振る舞い

Fuller の解の軌道は Zeno 状態に至った後， $(x, y) = (0, 0)$ の点に一定時間停留する．この時間を z_c で表す． z_c は最終の到達点と到達時間 $(x, y, z) = (x_f, y_f, t_f)$ に依存する．ここで z は時間を表す変数である．

5.3 逆 Zeno の軌道

逆 Zeno は基本的には Zeno の時間進行を逆にしたものを見ることができ，はじめの状態における変数 $(x, y) = (x_f, y_f)$ と $t = t_f$ から解析を始める．簡単のため，はじめの状態において変数の値は $H_2(x, y)$ 上にある $(-x_f + cy_f^2 = 0)$ とする．また， $(x, y, z) = (x_c, y_c, z_c)$ から逆 Zeno 軌道がスタートし， $n \in \mathbb{N} - \mathbb{N}$ 回のスイッチングで最終状態に至ったとする．節点の遷移 $q_3 \leftrightarrow q_4$ が起こるときの変数の値の変化は

$$x_{n-1} = -\rho x_n, \quad y_{n-1} = -\sqrt{\rho} y_n, \quad t_n = (1 + \sqrt{\rho}) y_n$$

となるので， $0 \leq i \leq n$ に対し，

$$x_{n-k} = (-\rho)^k x_n, \quad y_{n-k} = (-\sqrt{\rho})^k y_n$$

となる．これより，逆 Zeno 開始時点の変数 $(x, y, z) = (x_c, y_c, z_c)$ を求めると次のようになる．

$$z_c = t_f - (t_n + t_{n-1} + \dots + t_0) =$$

$$t_f - (1 + \sqrt{\rho})(1 + \sqrt{\rho} + \dots) y_n \approx t_f - \frac{1 + \sqrt{\rho}}{1 - \sqrt{\rho}} y_f,$$

$$x_c = \rho^n x_f, \quad y_c = \sqrt{\rho}^n y_f$$

この (x_c, y_c, z_c) は，繰り返し回数 n に依存し，しかも $x_c \approx 0$, $y_c \approx 0$ であるが，無限の回数 n が少し違ったり，無限小の量 x_c, y_c が少し変わるだけで，最終状態は大きく変化する．すでに知られていることであるが，このように逆 Zeno は無限小や無限大に大きく依存する不確定性を必ず含んでいる [13]．実際のシステムでは，最終状態が与えられれば，センサの精度やサンプリング時間などの条件から，Zeno 点直後の状態や，逆 Zeno の繰り返し回数が決定される．たとえば，最終の x の値と Zeno 点直後の x の値が定められた場合は，逆 Zeno の実行回数は $\log_{\rho} \left(\frac{x_c}{x_f} \right)$ となる．

6. おわりに

Zeno 現象は有限時間内に無限回の離散的な変化が生起する現象として定義されるが，連続的なダイナミクスに支配される時間が次第に 0 になり，時間の進行が停止し離散的なダイナミクスのみが繰り返される点に特徴がある．本論文では，ハイブリッドオートマトンを非標準の実数 ${}^*\mathbb{R}$ のもとで解釈したオートマトン (NHA) を用いて，有限時間内という条件をはずして少し拡張した Zeno 現象 (拡張 Zeno 現象) が，非周期軌道を含む離散的な軌道に収束すること，逆に離散的な周期軌道に収束する実行は拡張した Zeno 現象の軌道を描くことを示し，これに基づいて Fuller 問題の解析を行った．ダイナミクスの正則化に関しては，文献 [3] ではオートマトンの構成に際して特別な変数を導入し，制御グラフも変更しているが，NHA を用いることで，より自然な形で Zeno 現象を回避するオートマトンが構成できることを示した．

参考文献

- [1] R. Goldblatt: *Lecture on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis*, Springer (1988)
- [2] T. A. Henzinger: *The theory of hybrid automata; Verification of Digital and Hybrid Systems* (M. K.

- Inan, R. P. Kurshan, eds.), NATO ASI Series F: Computer and Systems Sciences, Vol.170, Springer-Verlag, pp.265-292 (2000)
- [3] K. H. Johansson, M. Egerstedt, J. Lygeros and S. Sastry: On the regularization of Zeno hybrid automata; *Proc. of System Control Letters, Special Issue on Hybrid Systems*, Vol.39, pp.141-150 (1999)
- [4] K. H. Johansson, J. Lygeros, et al.: Hybrid automata: A formal paradigm for heterogeneous modeling; *Proc. of IEEE Intl.Sympo. on Computer-Aided Control System Design Anchorage*, pp.123-128 (2000)
- [5] A. Lamperski and A. D. Ames: Lyapunov-like conditions for the existence of Zeno behavior in hybrid and Lagrangian hybrid systems; *46th IEEE Conference on Decision and Control*, pp.115-120 (2007)
- [6] K. Nakamura and A. Fusaoka: On transfinite hybrid automata; *Proc. of the 8th International Workshop, HSCC 2005*, LNCS3414, Springer-Verlag, pp.495-510 (2005)
- [7] 中村, 房岡: 非標準モデルに基づくハイブリッドシステムの記述と推論について; システム制御情報学会論文誌, Vol.21, No.6, pp.176-184 (2008)
- [8] K. Nakamura and A. Fusaoka: An analysis of the Fuller phenomenon on transfinite hybrid automata; *Proc. of the 12th International Workshop, HSCC 2009*, LNCS5469, Springer-Verlag, pp.450-454 (2009)
- [9] A. Robinson: *Non-Standard Analysis*, North Holland (1974)
- [10] 潮, 金澤: ハイブリッドシステムの非線形現象; *Fundamentals Review*, Vol.1, No.1, pp.41-50 (2007)
- [11] J. Zhang, K. H. Johansson, J. Lygeros and S. Sastry: Dynamical systems revisited: Hybrid systems with Zeno executions; *Proc. of the 3rd International*

Workshop, HSCC2000, LNCS1790, Springer-Verlag, pp.451-464 (2000)

- [12] J. Zhang, K. H. Johansson, J. Lygeros and S. Sastry: Zeno hybrid systems; *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol.11, Issue 5, John Wiley & Sons Ltd., pp.435-451 (2001)
- [13] M. I. Zelikin and V. F. Borisov: *Theory of Chattering Control with applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering*, Birkhäuser Boston (1994)

著者略歴

なかむら かつのり
中村 勝則 (正会員)

2005年立命館大学理工学研究科博士課程前期課程修了, 2008年同後期課程単位取得退学。2005年より平安女学院大学短期大学部講師。

ふさおか あきら
房岡 璋 (正会員)

1967年京都大学工学部数理工学科卒業, 1972年同大学院数理工学専攻博士課程修了。三菱電機(株)勤務を経て, 1994年より立命館大学教授。知識表現, 自動検証に関心を持つ。工学博士。情報処理学会, 電子情報通信学会, 人工知能学会, AAAI各会員。