外乱推定による連続時間モデル予測制御の オフセット補償*

櫻井 優太[†]・大塚 敏之[†]

Offset Compensation of Continuous Time Model Predictive Control by Disturbance Estimation*

Yuta SAKURAI[†] and Toshiyuki OHTSUKA[†]

In this paper, an offset compensation method for a continuous-time model predictive control (MPC) is proposed. To achieve offset-free control, additional disturbance states are introduced and the target for MPC is modified based on the estimate of disturbances. The property of steady-state deviation depends on the dimension of the additional disturbance states. An algorithm has already been proposed for discrete-time MPC to achieve zero offset when the model is augmented by disturbance states of the same dimension as tracked variables. We extend this algorithm to continuous-time MPC. A simulation result with the proposed algorithm for a nonlinear tank system is shown.

1. はじめに

モデル予測制御 (MPC) は、動的モデルに基づき各時刻で有限時間未来までの応答を最適化する制御手法である。制約を容易に扱うことが可能なため、近年、PID 制御に変わる高度な制御手法としてプロセス制御分野への導入が盛んである [1]。最適制御問題の評価区間が時間とともに移動していることになるので、Receding Horizon 制御 (RH 制御) とよばれる [2]。

プロセス制御分野に限らず、未知外乱が存在する場合や、モデル化誤差が存在する場合、フィードバック制御系に定常偏差が生じてしまうことがあるが、PID 制御においては積分動作によってこれを除去することができる。また、MPC においては、仮想外乱を新たな状態とみなしてモデルに組み込むことで除去できる。

MPC は、サンプリング時間ごとに計画問題を解く必要があり計算量が非常に多い。MPC の定常偏差除去の手法においては、外乱を新たな状態とみなすことで状態変数が増え、最適制御問題はより複雑となる。そこでモデルに組み込む外乱は少ないほうがよい。従来、定常偏

差を除去するためには、出力と同次元の外乱をモデルに組み込む必要があった [4]。それに対し Maeder らは、離散時間 MPC において定常偏差なしで追従したい制御変数と同次元の外乱のみの導入でオフセットを補償できるアルゴリズムを導いた [5]。本研究では、これを連続時間 MPC に拡張することを目的とし、非線形システムへ適用した場合の特性を検討する。連続時間 MPC においては離散時間 MPC の場合と異なり、評価区間上の時間軸と実時間の時間軸でサンプリング周期を独立に選ぶことができるという利点がある。すなわち、制御系を設計する段階でサンプリング周期を考慮する必要がない。また、連続時間 MPC における最適化計算を高速で行うアルゴリズムが存在するため、それを利用することもできる [2,3]。

産業プロセス制御において、プラントは非線形なものが非常に多い。本研究では、線形モデルを用いて MPC を定式化するが、定常偏差が問題となるのは定常状態においてであり、非線形プラントにおいても定常状態付近では線形近似することができるため、本研究の結果を適用することができる。その有効性については数値シミュレーションによって確認する。仮に、定常状態から離れた点での性能劣化が無視できない場合、たとえば、定常状態に到達するまでは通常非線形 MPC を用い、定常状態に到達後に制御方法を本研究の方法に切り替えることが考えられる。

* 原稿受付 2011 年 10 月 7 日

[†] 大阪大学 大学院 基礎工学研究科 Graduate School of Engineering Science, Osaka University; 1-3 Machikaneyamacho, Toyonaka city, Osaka 560-8531, JAPAN

Key Words: offset compensation, disturbance estimation, model predictive control.

2. 問題設定

2.1 プラントとモデル

2.1.1 プラント

連続時間の時不変システム

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = f(x_p(t), u(t)) \\ y_p(t) = g(x_p(t)) \\ z(t) = Hy_p(t) \end{cases} \quad (1)$$

を考える．ここで， $x_p(t) \in \mathbf{R}^n$ ， $u(t) \in \mathbf{R}^m$ ， $y_p(t) \in \mathbf{R}^p$ はそれぞれプラントの状態，入力，観測出力である．また， $z(t) \in \mathbf{R}^r$ は制御出力であり，観測出力の線形結合で表される．一般性を失うことなく，行列 H は行フルランクであるとする．拘束条件は

$$E_1 x_p(t) + E_2 u(t) \leq M \quad (2)$$

とし，定常状態において拘束はアクティブでないものとする．また， $r(t) \in \mathbf{R}^r$ は一定値に収束する参照信号とし， $z(t)$ が $r(t)$ に追従することを制御目標とする．

2.1.2 制御対象のモデル

MPC では (1) 式に対し，次の線形時不変システム

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3)$$

を用いる．ここで $x(t) \in \mathbf{R}^n$ ， $u(t) \in \mathbf{R}^m$ ， $y(t) \in \mathbf{R}^p$ はそれぞれ，状態，入力，出力であり，対 (A, B) は可制御，対 (C, A) は可観測であるとし，さらに， C は行フルランクであるとする．

2.1.3 拡大モデル

制御対象のモデル (3) は，プラントとの不整合を捉えるために仮想的な外乱を導入したモデル（以下，拡大モデル）に拡張される．ここでは参考文献 [4] のモデルに従う．

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_d \\ O & O \end{bmatrix}}_{A_m} \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_m} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & C_d \end{bmatrix}}_{C_m} \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4)$$

ここで， $d(t) \in \mathbf{R}^{n_d}$ は未知外乱であり，オブザーバによって，状態と外乱の両方を推定することを考える．

次の命題は，拡大モデル (4) が可観測性であるための必要十分条件を与えており，外乱モデルの B_d, C_d の選り方を制限する．

【命題 1】 拡大モデル (4) が可観測であるための必要十分条件は，対 (C, A) が可観測かつ

$$\begin{bmatrix} A & B_d \\ C & C_d \end{bmatrix} \quad (5)$$

が列フルランクであることである．

（証明）PBH (Popov–Belevitch–Hautus) テストから，(4) 式のシステムが可観測であるための必要十分条件は，任意の λ に対し，

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_d \\ O & -\lambda I \\ C & C_d \end{bmatrix} \quad (6)$$

が列フルランクであることである．

再び，PBH テストから，第 1 列が線形独立であるのは，対 (C, A) が可観測であるとき，かつそのときに限る．第 2 列は $\lambda = 0$ である場合を除いて第 1 列に対して線形独立である．すなわち，拡大モデルに対する PBH テストは $\lambda = 0$ のときのみチェックされる必要があり，それは (5) 式となる．

（注意 1）命題 1 より拡大モデルが可観測であるためには $n_d \leq p$ でなければならないことに注意する．

次の系が命題 1 より直接導かれる．

【系 1】 拡大モデル (4) において， $n_d = p$ かつ $C_d = I$ のとき，可観測であるための必要十分条件は，対 (C, A) が可観測かつ

$$\det \begin{bmatrix} A & B_d \\ C & I \end{bmatrix} = \det(A - B_d C) \neq 0 \quad (7)$$

が成り立つことである．

（注意 2）もし制御対象が積分器を持たないならば，行列 A は 0 を固有値に持たず， $\det A \neq 0$ より $B_d = 0$ と選ぶことができる．これは，観測外乱のみを考えることに相当する．もし，制御対象が積分器を持つならば， B_d は $\det(A - B_d C) \neq 0$ となるよう選ばなければならない．

以下で，状態方程式にのみ外乱を導入するモデル（状態外乱モデル）と，観測出力にのみ外乱を導入するモデル（出力外乱モデル）の等価性を証明する [6]．まず，相似変換

$$T = \begin{bmatrix} I & -T_{12} \\ O & I \end{bmatrix}$$

を導入する．すると，変換されたシステム行列は

$$\begin{aligned} T A_m T^{-1} &= \begin{bmatrix} A & A T_{12} + B_d \\ O & O \end{bmatrix} \\ C_m T^{-1} &= \begin{bmatrix} C & C T_{12} + C_d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．出力外乱モデル ($C_d \neq 0, B_d = 0$) が，状態外乱モデルへ変形されうるのは

$$C T_{12} = -C_d$$

を T_{12} について解くことによって簡単にわかる． C が行フルランクなので，解は常に存在する．

逆に，状態外乱モデル ($C_d = 0, B_d \neq 0$) は，

$$AT_{12} = -B_d$$

を T_{12} について解くことによって、純粋な出力外乱モデルへ変形されうる。解 T_{12} が存在するための必要十分条件は、 $\text{span}(-B_d) \subset \text{span}(A)$ であることであり、これは原点に固有値を持たないプラントでは明らかに真となる。

2.1.4 プラントとモデルに関する補足

プラントとモデルが共に定常状態であれば、その出力の差は一定であり、一定値外乱で補償できる。本研究では、プラントと拡大モデルの出力を等しいとみなして仮想外乱を導入した。とくに、一般の非線形システム (1) 式に対して、線形モデルを用いて定式化しており、さらに、モデルプラントミスマッチを想定する場合、モデルが定常状態に到達していても、プラントが定常状態となっていることは保証されない。次の命題は、プラントとモデルが共に定常状態となりうることを保証するための条件を提示している。

【命題 2】 任意の可能な $g(x_{p,\infty})$ に対し、次の 3 式を満たす $x_\infty, u_\infty, d_\infty, x_{p,\infty}$ が存在すれば、閉ループ系においてモデルとプラントは共に定常状態になりうる。ここで、添字 ∞ は定常状態での値を表す。

$$0 = Ax_\infty + Bu_\infty + B_d d_\infty \quad (8)$$

$$0 = f(x_{p,\infty}, u_\infty) \quad (9)$$

$$Cx_\infty + C_d d_\infty = g(x_{p,\infty}) \quad (10)$$

(証明) (8), (9) 式はそれぞれ、モデルとプラントが共通の一定値入力 u_∞ で定常状態となることを表し、(10) 式は定常状態での拡大モデルとプラントの出力が等しいことを表す。この 3 式が同時に成り立つことは、 $x_\infty, u_\infty, d_\infty, x_{p,\infty}$ で、モデルとプラントが共に定常状態となっていることを示す。

(注意 3) (8), (10) 式をまとめると

$$\begin{bmatrix} A & B_d \\ C & C_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\infty \\ d_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Bu_\infty \\ g(x_{p,\infty}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

となる。拡大モデルが可観測であれば、命題 1 によって左辺の行列は列フルランクなので、(11) 式を x_∞, d_∞ について解く場合、それは唯一解となる。

(注意 4) 拡大モデルが可観測で、(8)~(10) 式の解が存在する場合、モデルが定常状態ならば、プラントの出力も一定となる。

2.2 オブザーバの設計

オブザーバは次の式で構成される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{d}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_d \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{d}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ &+ \begin{bmatrix} L_x \\ L_d \end{bmatrix} \left(-y_p(t) + C\hat{x}(t) + C_d\hat{d}(t) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 L_x と L_d はオブザーバが漸近安定となるよう選ばれる。オブザーバで推定された状態と外乱の推定値は、MPC の初期化と目標状態の導出機構 (Steady State Target Optimizer; SSTO) に用いられる。

次の補題 1 は、オブザーバが安定であるための必要条件であり、命題 3 と定理 1 の証明に用いられる。

【補題 1】 オブザーバ (12) が安定ならば、 $\text{rank} L_d = n_d$ が成り立つ。

(証明) (12) 式を変形すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{d}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + L_x C & B_d + L_x C_d \\ L_d C & L_d C_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{d}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) - \begin{bmatrix} L_x \\ L_d \end{bmatrix} y_p(t) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。オブザーバの漸近安定性より原点に極を持たないので、

$$\det \begin{bmatrix} A + L_x C & B_d + L_x C_d \\ L_d C & L_d C_d \end{bmatrix} \neq 0 \quad (14)$$

が成り立つ。(14) 式が成り立つためには、行列の第 2 行は、行フルランクでなければならない。そのための必要条件は、 L_d が行フルランクであることである。

2.3 MPC の設計

2.3.1 SSTO の設計

SSTO とは、MPC において、設定された指令値に到達するために状態と入力が到達すべき目標値を導出する機構のことである。ここで、設定された指令値とは、参照軌道 $r(t)$ のことを指す。SSTO を設計するに当たって次の命題を示す。

【命題 3】 $n_d = p$ と選び、オブザーバ (12) が安定ならば、オブザーバ (12) の定常状態は

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_d \hat{d}_\infty \\ y_{p,\infty} - C_d \hat{d}_\infty \end{bmatrix} \quad (15)$$

を満たす。ここで、 $y_{p,\infty}$ と u_∞ は、それぞれ定常状態での出力、定常状態でのシステム (1) への入力であり、 $\hat{x}_\infty$ と $\hat{d}_\infty$ は、それぞれオブザーバ (12) から得られる定常状態における状態の推定値と外乱の推定値である。

(証明) (12) 式より外乱の推定値 $\hat{d}$ は、 $L_d(-y_{p,\infty} + C\hat{x}_\infty + C_d\hat{d}_\infty) = 0$ のときのみ収束するということに注意する。仮定より L_d は正方行列で、補題 1 より正則であり、定常状態でも正則なので、オブザーバの推定値 (12) は

$$-y_{p,\infty} + C\hat{x}_\infty + C_d\hat{d}_\infty = 0 \quad (16)$$

を満たす。(12), (16) 式から直接 (15) 式が成り立つことがわかる。

定常状態における制御出力と参照信号を、それぞれ $z_\infty = Hy_{p,\infty}$ 、 r_∞ と表す。定常偏差ゼロは、 $z_\infty = r_\infty$

を意味する．オブザーバの条件 (15) より，定常状態において，MPC は

$$\begin{bmatrix} A & B \\ HC & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_d \hat{d}_\infty \\ r_\infty - HC_d \hat{d}_\infty \end{bmatrix} \quad (17)$$

を満たすべきとわかる．ここで， x_∞ は定常状態での MPC の評価区間上の状態である．(17) 式より SSTO は以下のように設計される．

$$\begin{bmatrix} A & B \\ HC & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_t \\ \bar{u}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_d \hat{d}(t) \\ r(t) - HC_d \hat{d}(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここで， $\bar{x}_t, \bar{u}_t$ は時刻 t での状態と入力目標値である．

(注意 5) (17) 式より，任意の $\hat{d}_\infty$ と r_∞ に対して， x_∞ と u_∞ が存在するためには，行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ HC & 0 \end{bmatrix}$ がフルランク，すなわち， $m \geq r$ でなければならない．

(注意 6) もし条件 (18) から $\bar{x}_t$ と $\bar{u}_t$ が一意に決まらないなら，(18) 式の制約のもと， $\bar{u}_t$ の大きさを最小化するような最適化問題を解くことによって $\bar{x}_t$ と $\bar{u}_t$ を決定することが考えられる．

2.3.2 MPC の設計

MPC は次のように設計される．

$$\begin{aligned} & \min_{u_M(\tau), t \leq \tau \leq t+T} \|x(t+T) - \bar{x}_t\|_P^2 \\ & + \int_t^{t+T} \{ \|x(\tau) - \bar{x}_t\|_Q^2 + \|u_M(\tau) - \bar{u}_t\|_R^2 \} d\tau \\ & \text{sub. to } E_1 x(\tau) + E_2 u_M(\tau) \leq M, \quad t \leq \tau \leq t+T \\ & \dot{x}(\tau) = Ax(\tau) + Bu_M(\tau) + B_d d(\tau), \quad t \leq \tau \leq t+T \\ & \dot{d}(\tau) = 0, \quad t \leq \tau \leq t+T \\ & x(t) = \hat{x}(t), \quad d(t) = \hat{d}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで， $\|x\|_M^2 = x^T M x$ ， $Q \geq 0$ ， $R > 0$ であり， P は Riccati 方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (20)$$

の正定解とする．ただし，評価関数における $\bar{x}_t$ と $\bar{u}_t$ は SSTO (18) 式で計算される．また， $\bar{x}_t$ と $\bar{u}_t$ は，時刻 t のみに依存し，評価区間上では一定値であることに注意する．さらに，時刻 t でのシステム (3) への入力 $u(t)$ と，最適化問題 (19) の最適化変数 $u_M(\tau)$ は区別することにも注意する．同様に， $x(t)$ は時刻 t での状態を表し，一方，変数 $x(\tau)$ ($t \leq \tau \leq t+T$) は状態 $x(t) = \hat{x}(t)$ からスタートし，システム (3) への入力 $u_M(\tau')$ ($t \leq \tau' \leq \tau$) を適用することによって得られる時刻 τ での予測状態を表す． $u_M^*(\tau)$ ($t \leq \tau \leq t+T$) を (18), (19) 式の最適解とすると， $u_M^*(\tau)$ の $\tau = t$ での値がシステム (1) に適用される．すなわち，時刻 t でのシステム (1) への入力は

$$u(t) = u_M^*(t) \quad (21)$$

である．

推定状態が $\hat{x}(t)$ ，推定外乱が $\hat{d}(t)$ のとき，制御則を $u_M^*(\hat{x}(t), \hat{d}(t), r(t))$ と表すものとする．(18), (19) 式の MPC, (12) 式のオブザーバで (1) 式のシステムを制御することによって得られる閉ループ系は，以下のように表される．

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u_M^*(\hat{x}(t), \hat{d}(t), r(t))) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= (A + L_x C) \hat{x}(t) + (B_d + L_x C_d) \hat{d}(t) \\ &\quad + B u_M^*(\hat{x}(t), \hat{d}(t), r(t)) - L_x y_p(t) \\ \dot{\hat{d}}(t) &= L_d C \hat{x}(t) + L_d C_d \hat{d}(t) - L_d y_p(t) \end{aligned} \quad (22)$$

(注意 7) MPC (19) では終端状態の重みに Riccati 方程式 (20) の正定解を用いているが，これに関しては次の命題 4 を参照のこと．

【命題 4】 (18), (19) 式の MPC を考える．また，定常状態では拘束を受けないとする．すると定常状態では

$$\delta u = K_{\text{MPC}} \delta x$$

となる．ここで， $\delta u = u_\infty - \bar{u}_\infty$ ， $\delta x = \hat{x}_\infty - \bar{x}_\infty$ ， $K_{\text{MPC}} = -R^{-1}B^T P$ とした． P は Riccati 方程式 (20) の正定解である． u_∞ ， $\bar{u}_\infty$ ， $\hat{x}_\infty$ ， $\bar{x}_\infty$ はそれぞれ定常状態における，システム (1) への入力，その目標値，状態の推定値，その目標値である．

(証明) (18), (19) 式の MPC は，目的関数が目標値との偏差で構成されているので， $\delta x(\tau) = x(\tau) - \bar{x}_t$ ， $\delta u_M(\tau) = u_M(\tau) - \bar{u}_t$ と変数変換をした偏差系を考える．評価区間上では外乱は一定なので，(18) 式において外乱推定値を評価区間での外乱に置き換えた式 ($\hat{d}(t) = d(\tau)$) を用いることで

$$\begin{aligned} Hy(\tau) - r(t) &= HCx(\tau) + HC_d d(\tau) - r(t) \\ &= HC\delta x(\tau) + HC\bar{x}_t + HC_d d(\tau) - r(t) \\ &= HC\delta x(\tau) \end{aligned}$$

となることがわかる．つまり， $\delta x(\tau)$ を小さくするような評価関数を設定すれば，制御出力が参照軌道に追従することを目的とした MPC が設計できる．また，ホライゾン内の時間軸 τ 上では $\dot{\hat{x}}_t = 0$ なので，状態方程式 (4) と $\hat{d}(t) = d(\tau)$ としたときの (18) 式より，

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(\tau) &= \dot{x}(\tau) - \dot{\hat{x}}_t \\ &= A(\delta x(\tau) + \bar{x}_t) + B(\delta u_M(\tau) + \bar{u}_t) + B_d d(\tau) \\ &= A\delta x(\tau) + B\delta u_M(\tau) + A\bar{x}_t + B\bar{u}_t + B_d d(\tau) \\ &= A\delta x(\tau) + B\delta u_M(\tau) \end{aligned}$$

となる．すると，偏差系の MPC は

$$\begin{aligned} & \min_{\delta u_M(\tau), t \leq \tau \leq t+T} \|\delta x(t+T)\|_P^2 \\ & + \int_t^{t+T} \{ \|\delta x(\tau)\|_Q^2 + \|\delta u_M(\tau)\|_R^2 \} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sub. to } E_1 \delta x(\tau) + E_2 \delta u_M(\tau) &\leq M' \\ \delta \dot{x}(\tau) &= A \delta x(\tau) + B \delta u_M(\tau), \quad t \leq \tau \leq t+T \\ \delta x(t) &= \hat{x}(t) - \bar{x}_t \end{aligned} \quad (23)$$

と定式化できる．ここで， M' は M とは異なる行列である．

(23) 式の MPC は区間 $[t, t+T]$ に関して最適化を行うが，終端条件を Riccati 方程式の解を用いて記述しているため，区間 $[t+T, \infty)$ においても最適レギュレータの意味で最適化されている．定常状態では $[t, \infty)$ で拘束を受けない．したがって，最適制御は Riccati 方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (24)$$

の正定解 P を用いて $\delta u_M^*(t) = -R^{-1}B^T P \delta x(t)$ と書ける．よって， $K_{\text{MPC}} = -R^{-1}B^T P$ とおくと $\delta u_M^*(t) = K_{\text{MPC}} \delta x(t)$ となる．

定常状態では， $\delta u_M^*(t) \rightarrow u_\infty - \bar{u}_\infty = \delta u$ ， $\delta x(t) \rightarrow \hat{x}_\infty - \bar{x}_\infty = \delta x$ が成り立つ．ゆえに， $\delta u = K_{\text{MPC}} \delta x$ となる．

(注意 8) $U^*(t) = \{\delta u_M^*(\tau) | t \leq \tau \leq t+T\}$ を偏差系の MPC(23) の最適解とすると，システム (1) に実際に適用される時刻 t での入力

$$u(t) = \bar{u}_t + \delta u_M^*(t) \quad (25)$$

である．

2.4 全体の構成

プラント，オブザーバ，MPC，SSTO を組み合わせた全体の構成図は Fig. 1 で表される．プラントは一般に非線形であるのに対し，オブザーバと MPC は（線形）拡大モデルを用いて設計される．モデル・プラントミスマッチが生じている場合，オブザーバで推定された状態 $\hat{x}$ はプラントの真の状態 x とは異なることに注意する．

オブザーバは，プラントの入出力から拡大モデルにおける状態と外乱の推定値を出し，SSTO は推定された外乱を用いて設定値に対する状態の入力の目標値を計算する．MPC では，オブザーバから得られた推定値を初期値とし，SSTO で計算された目標状態を状態と入力の目標値とした最適化問題が解かれ，プラントへの入力が導出される．

3. 定常偏差ゼロのための条件と提案アルゴリズム

外乱状態の数 n_d を観測出力の数 p と等しくすると，(18), (19) 式のように MPC を設計した場合，定常偏差がゼロとなることが示される [4]．しかし，観測出力と同次元の外乱を導入してしまうと MPC を解くうえで計算量が増加してしまう可能性があり，オブザーバの計算量も増加する．そこで，制御出力を参照信号に追従させるという制御目標のもと，モデルに組み込む外乱の次元を観

Fig. 1 Framework of the system

測出力より少なくすることを考える．内部モデル原理から，定常偏差ゼロで追従されるべきあらゆる出力に対し，少なくとも一つの外乱状態を加える必要があることは明らかである．したがって，加える外乱の数 n_d を制御出力の数 r に等しくなるよう選ぶ．すなわち， $n_d = r < p$ である．一般にこの選び方では，制御器を前章のように設計すると，命題 3 が保たれないので，定常偏差ゼロでの追従は保証されない．まず，定常状態における追従エラーの特徴付けを行う．つぎに，定常偏差がゼロとなる条件を導出し，定常偏差ゼロが得られるようなオブザーバの構成方法を示す．

3.1 定常偏差の特徴付け

$n_d = p$ とは限らない一般の場合，命題 3 は次の命題に置き換えられる．

【命題 5】 (12) 式のオブザーバの定常状態は

$$\begin{bmatrix} A + L_x C & B \\ L_d C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_x y_{p,\infty} - (B_d + L_x C_d) \hat{d}_\infty \\ L_d y_{p,\infty} - L_d C_d \hat{d}_\infty \end{bmatrix} \quad (26)$$

を満たす．ここで， $y_{p,\infty}$ と u_∞ は，それぞれシステム (1) における定常状態の観測出力，入力である．また $\hat{x}_\infty$ と $\hat{d}_\infty$ は，それぞれ定常状態において，オブザーバ (12) から得られる状態と外乱の推定値である．

(証明) (12) 式から定常状態では

$$\begin{aligned} 0 &= A \hat{x}_\infty + B_d \hat{d}_\infty + B u_\infty + L_x (C \hat{x}_\infty + C_d \hat{d}_\infty - y_{p,\infty}) \\ 0 &= L_d (-y_{p,\infty} + C \hat{x}_\infty + C_d \hat{d}_\infty) \end{aligned} \quad (27)$$

が成り立つ．(26) 式は (27) 式から直接導くことができる．

定常状態では拘束を受けないので，命題 4 より，MPC コントローラ (19), (18) は

$$u_\infty - \bar{u}_\infty = K_{\text{MPC}} (\hat{x}_\infty - \bar{x}_\infty) \quad (28)$$

を満たす．(18), (26), (28) 式を組み合わせ，偏差方程式 $\epsilon = H y_{p,\infty} - r_\infty$ を用いることによって，オブザーバと制御器の定常状態での値は次の方程式を満たすことがわ

かる．

$$M_1 v + M_2 \epsilon = 0 \quad (29)$$

ここで，

$$M_1 = \begin{bmatrix} A + L_x C & B & 0 & 0 & B_d + L_x C_d & -L_x \\ L_d C & 0 & 0 & 0 & L_d C_d & -L_d \\ 0 & 0 & A & B & B_d & 0 \\ 0 & 0 & HC & 0 & HC_d & -H \\ K_{\text{MPC}} & -I & -K_{\text{MPC}} & I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = [0 \ 0 \ 0 \ I \ 0]^T$$

である．すべての可能な偏差の集合は，部分空間 $\mathcal{K} := \{(v, \epsilon) | M_1 v + M_2 \epsilon = 0\}$ の偏差 ϵ の空間への射影（これを $\Pi_\epsilon(\mathcal{K})$ と表す）に属する．

次のアルゴリズムは，すべての可能な偏差 ϵ によって張られる最小の部分空間 $\mathcal{H} := \Pi_\epsilon(\mathcal{K}) \subset \mathbf{R}^{n_d}$ を決める標準的な手順を示す [5]．

【アルゴリズム 1】 (1) $\text{rank}(M_1) = \text{rank}([M_1, M_2])$

ならば， $\Pi_\epsilon(\mathcal{K})$ はフル次元である．すなわち， $\mathcal{H} = \mathbf{R}^{n_d}$ である．

(2) $\forall j (j=1, 2, \dots, n_d)$ に対し， $\text{rank}([M_1 \ M_2^{<j>}]) \neq \text{rank}([M_1 \ M_2])$ であれば，定常偏差は 0 であり， $\mathcal{H} = \{0\}$ である．ただし， $M^{<j>}$ は行列 M から第 j 列を除いた行列を表すものとする．

(3) そうでなければ， N を $M_1^T N = 0$ を満たす行列とし， $Z = N^T M_2$ とおくと， $\mathcal{H} = \mathcal{N}(Z)$ である．ただし $\mathcal{N}(\cdot)$ は零空間を表す．

（注意 9）定常偏差ゼロで MPC 制御器を構成することは容易な問題ではない．実際 Z （すなわち $\mathcal{H}$ ）は L_x ， L_d ， H ， K_{MPC} の関数である．

3.2 定常偏差ゼロのための条件

$e_\infty = y_{p,\infty} - C \hat{x}_\infty - C_d \hat{d}_\infty$ と定義することによって，(29) 式は次のように書き換えられる．

$$\tilde{M}_1 \tilde{v} + M_2 \epsilon = 0 \quad (30)$$

ここで，

$$\tilde{M}_1 = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & B_d & -L_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_d \\ 0 & 0 & A & B & B_d & 0 \\ -HC & 0 & HC & 0 & 0 & -H \\ K_{\text{MPC}} & -I & -K_{\text{MPC}} & I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

直接代入によって，(30) 式から次の式が得られる．

$$\begin{bmatrix} L_d \\ H(I + C(A + BK_{\text{MPC}})^{-1} L_x) \end{bmatrix} e_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \epsilon \quad (32)$$

(32) 式から，定常偏差ゼロを得るには，(32) 式を解くことで求まるすべての e_∞ で $\epsilon = 0$ となるという条件が満たされればよい，と結論づけることができる．この条件は， $L_d e_\infty = 0$ が満たされるすべての e_∞ で $H(I + C(A + BK_{\text{MPC}})^{-1} L_x) e_\infty = 0$ となる，と言い換えられる．このことは，次の零空間の条件に書き換えられる．

$$\mathcal{N}(L_d) \subset \mathcal{N}(H(I + C(A + BK_{\text{MPC}})^{-1} L_x)) \quad (33)$$

簡単のため，次の記号

$$\Phi = A + BK_{\text{MPC}} \quad (34)$$

を導入すると，制御出力が定常偏差ゼロを達成するための十分条件は

$$\mathcal{N}(L_d) \subset \mathcal{N}(H(I + C\Phi^{-1} L_x)) \quad (35)$$

とかける．

3.3 定常偏差ゼロの条件を満たすオブザーバゲインを求めるアルゴリズム

以下で， $n_d = r < p$ のとき，(35) 式の条件を満たす L_x ， L_d の構成法を提案する．MPC は (18)，(19) 式のように定義されているとし，定常状態では，拘束がアクティブでないとする．次の補題は，定理 1 の証明に用いる．

【補題 2】 行列 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ， $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ， $C \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ($n < m$) に対し，行列 A が正則ならば，

$$\mathcal{N}(AC) \subset \mathcal{N}(BC)$$

が成り立つ．

（証明） A が正則行列なので

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(AC) &= \{x \in \mathbf{R}^m | ACx = 0\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}^m | Cx = 0\} \\ &\subset \{x \in \mathbf{R}^m | BCx = 0\} \\ &= \mathcal{N}(BC) \end{aligned}$$

が成り立つ．

【定理 1】 $n_d = r$ とした拡大モデル (4) において，

$$L = \begin{bmatrix} L_x \\ L_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{L}_x \\ \bar{L}_d \end{bmatrix} \bar{H} \quad (36)$$

という形のオブザーバゲインを用いる場合を考える．ここで， $\bar{H} = H(I + C\Phi^{-1} \tilde{L}_x)$ である．閉ループのオブザーバダイナミクス $A_m + LC_m$ は安定であるとする．さらに，閉ループ系は定常状態に到達するとする．すると制御器 (19) ~ (21) は偏差のない追従特性をもつ．

（証明）(35) 式の両辺に (36) 式を代入することにより，

$$\begin{aligned} ((35) \text{ 式の左辺}) &= \mathcal{N}(\bar{L}_d \bar{H}) \\ ((35) \text{ 式の右辺}) &= \mathcal{N}(H(I + C\Phi^{-1}(\tilde{L}_x + \bar{L}_x \bar{H}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{N}(H(I+C\Phi^{-1}\tilde{L}_x+C\Phi^{-1}\bar{L}_x\bar{H})) \\
&= \mathcal{N}(\bar{H}+HC\Phi^{-1}\bar{L}_x\bar{H}) \\
&= \mathcal{N}((I+HC\Phi^{-1}\bar{L}_x)\bar{H})
\end{aligned}$$

となる．補題 1 で示したように， $L_d = \bar{L}_d\bar{H}$ は行フルランク，すなわち $\bar{L}_d$ は行フルランクである．いま $n_d = r$ なので， $\bar{L}_d$ は正方形行列であり，すなわち正則行列である．補題 2 より，(35) 式の定常偏差ゼロの条件が成り立つことがわかる．

定理 1 に基づくオブザーバの設計法は以下のようにまとめられる．

【アルゴリズム 2】 拡大モデル (4) を考える．対 (C_m, A_m) が可検出であるとする．

- (1) $A + \tilde{L}_x C$ が安定で， $(\bar{H}C_m, \bar{A})$ が可検出であるように $\tilde{L}_x$ を選ぶ．ここで， $\bar{H} = H(I + C\Phi^{-1}\tilde{L}_x)$ で， $\bar{A} = A_m + [\tilde{L}_x^T 0]^T C_m$ である．
- (2) $\bar{A} + \bar{L}\bar{H}C_m$ が安定であるように $\bar{L}$ ($\bar{L} = [\bar{L}_x^T \bar{L}_d^T]^T$) を選ぶ．
- (3) 最終的に，オブザーバゲイン L を

$$L = \begin{bmatrix} \tilde{L}_x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{L}_x \\ \bar{L}_d \end{bmatrix} \bar{H}$$

と選ぶ．

4. シミュレーション

アルゴリズムの有効性を検証するため，プラントが非線形システムである 2 連結タンクシステムを用いて，モデル誤差を想定したシミュレーションを行う．シミュレーションは，一般のパーソナルコンピュータ (Pentium 4 CPU 2.60GHz) 上で，AutoGenU[7] (非線形モデル予測制御のシミュレーションプログラムの自動生成ツール) を用いて生成した C 言語のプログラムで行った．

4.1 問題設定

Fig. 2 で表されるような 2 連結タンク系を考える [8] ．

Fig. 2 Tank system

システムは非線形状態方程式

$$\dot{x}_1(t) = -c_1\sqrt{x_1} + c_0u \quad (37)$$

$$\dot{x}_2(t) = c_3\sqrt{x_1} - c_2\sqrt{x_2} \quad (38)$$

で表される．ここで， x_1, x_2 はそれぞれ第 1 タンク，第 2 タンクの液レベル [m]， u は第 1 タンクへの流入量 [m³/s] である．また， c_0, c_1, c_2, c_3 はタンクの断面積や流出口の抵抗などにより決まる定数であり， $c_0 = 1, c_1 = c_2 = c_3 = 0.02$ とする．入力拘束条件として $0 \leq u \leq 0.030$ が課されるものとする．

平衡点を (x_{10}, x_{20}, u_0) とし，平衡点近傍で非線形状態方程式 (37), (38) を線形化すると，

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_1}{2\sqrt{x_{10}}} & 0 \\ \frac{c_3}{2\sqrt{x_{10}}} & -\frac{c_2}{2\sqrt{x_{20}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u \quad (39)$$

となる．ここで， $\Delta x_1 = x_1 - x_{10}, \Delta x_2 = x_2 - x_{20}, \Delta u = u - u_0$ とおいた．線形化されたシステム (39) は偏差系であり，非線形システム (37), (38) も偏差系に直すと，

$$\Delta\dot{x}_1 = -0.02\sqrt{x_{10} + \Delta x_1} + (u_0 + \Delta u) \quad (40)$$

$$\Delta\dot{x}_2 = 0.02\sqrt{x_{10} + \Delta x_1} - 0.02\sqrt{x_{20} + \Delta x_2} \quad (41)$$

となる．今後，偏差系を考え，状態方程式 (40), (41) で表される非線形プラントに対し，線形化モデル (39) を用いて推定と制御入力計算を行うものとする．さらに，モデルのパラメータのうち， c_1 と c_3 がプラントの値より 10 % 大きいことを想定し， $c'_1 = c'_2 = 0.022$ とする．

4.2 シミュレーション結果

ここでは，第 2 タンクの液レベル x_2 (Δx_2) のみに目標値 $r(t)$ を与え，その目標値に定常偏差なく追従することを要求する．平衡点を $(x_{10}, x_{20}, u_0) = (1.3, 1.573, 0.022\sqrt{1.3})$ ，初期状態を $[\Delta x_1 \Delta x_2]^T = [-0.2 -0.2]^T$ とした．ここで，平衡点はミスマッチモデルから計算したものであり，真のプラントの平衡点 $(x_{10p}, x_{20p}, u_{0p}) = (1.3, 1.3, 0.02\sqrt{1.3})$ とは異なることに注意する．さらに， Δx_2 の目標値を 0.1 と設定した．目標値は平衡点から少しずれた値であることに注意する．また，シミュレーションのパラメータは Table 1 のように設定した．

Table 1 Simulation parameters of the tank system

パラメータの説明	記号	値
状態の重み	Q	$\text{diag}[0.1 \ 1]$
入力の重み	R	100
評価区間の長さ	T	1 [s]
サンプリング周期 (t 軸)	Δt	0.01 [s]
サンプリング周期 (τ 軸)	$\Delta \tau$	0.1 [s]

Fig. 3 がそのシミュレーション結果である． $n_d = 1$ の外乱モデルを導入し，拡大モデル (4) における B_d, C_d は

$$B_d = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とした．アルゴリズム 2 を用いて求めたオブザーバゲイ

ン L_1 と、同じ外乱モデルを導入したうえで、オブザーバゲインを、Riccati 方程式の重みを単位行列とした定常カルマンフィルタの解 L_2 としたものを比較した．ここで、アルゴリズム 2 において、 $\tilde{L}_x$, $\tilde{L}$ は単位行列を重みとした定常カルマンフィルタの解とした． L_1 , L_2 の値は、それぞれ次のように得られた．

$$L_1 = \begin{bmatrix} -10.421 & -47.112 \\ -10.026 & -51.048 \\ -9.784 & -48.872 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} -3.1918 & -2.2105 \\ -2.2105 & -3.2022 \\ -0.70678 & -0.70744 \end{bmatrix}$$

Fig. 3 Simulation result of the tank system (deviation system)

Fig. 3 において、上段と中段のグラフは、それぞれ偏差系における第 1 タンクの液レベル Δx_1 ，第 2 タンクの液レベル Δx_2 をプロットしたものであり、アルゴリズムを用いたシミュレーション結果を実線で、定常カルマンフィルタの解を用いたシミュレーション結果を破線で示している．また、中段のグラフにおける点線は目標値を表す．定常カルマンフィルタゲインの方が定常偏差を示しているのに対し、提案アルゴリズムでシミュレーションした方は、定常偏差が除去できていることが確認できる． Δx_1 に関しては、目標値を陽に与えていないが、SSTO(18) 式から計算された値が目標値となり、評価関数に組み込まれるため、発散することなくある一定値に収束していることに注意する．下段のグラフは偏差系への入力 Δu であり、拘束の上限を一点鎖線で示している．拘束の下限はグラフの範囲外のため示していない．

5. おわりに

本研究は Maeder らの離散時間 MPC における定常偏差除去理論を連続時間に拡張することを目的とした．まず、仮想外乱をモデルに付加した拡大モデルを定義し、それに基づいてオブザーバを設計した．オブザーバで推定された仮想外乱により MPC における状態と入力の目標値が修正される．また、状態と外乱の推定値は MPC を初期化するためにも用いられる．

つぎに、導入する仮想外乱の次元がシステムの出力の次元より少ない場合の定常偏差の特徴付けを行い、制御出力が定常偏差ゼロとなるための十分条件を導いた．そして、その条件を満たすオブザーバゲインを求めるアルゴリズムを提案した．

最後に、提案アルゴリズムを用いたシミュレーションを行い、実際に定常偏差がゼロとなることを確認した．とくに、非線形システムにおいても、線形化を行うことで本論文の結果が適用できることを示した．本研究では、モデルプラントミスマッチによる定常偏差を除去するため、外乱モデルとして一定外乱を採用した．そのため、プラントに一定の外乱が加わっている場合にも定常偏差を除去することができる．一方、一定でない外乱が加わる場合は、MPC が本来持つ外乱除去特性によりある程度の外乱抑制が期待できるが、SSTO が外乱の影響を多少受けるため、定量的な評価は今後の課題である．

提案アルゴリズムを用いることにより、制御出力のうち偏差なし追従が要求される出力に対して、定常偏差を除去することができた．しかし、他の制御出力の定常偏差がアルゴリズムを適用しない場合と比べて大きくなってしまっていることがある．この点についてさらに考察する必要がある．また本研究では、参照信号が一定値であることを仮定したが、参照信号がランプ信号や正弦波信号などの場合でも定常偏差なしで追従できるように、外乱モデルを一般化することが考えられる．

参考文献

- [1] J. M. Maciejowski: モデル予測制御 制約のもとでの最適制御, 東京電機大学出版局 (2005)
- [2] 大塚: 非線形 Receding Horizon 制御の計算方法について; 計測と制御, 41 巻, 5 号, pp. 366–371 (2002)
- [3] T. Ohtsuka: A continuation/GMRES method for fast computation of nonlinear receding horizon control; *Automatica*, Vol. 40, No. 4, pp. 563–574 (2004)
- [4] G. Pannocchia and J. B. Rawlings: Disturbance models for offset-free model-predictive control; *AIChE Journal*, Vol. 49, No. 2, pp. 426–437 (2003)
- [5] U. Maeder and M. Morari: Linear offset-free model predictive control; *Automatica*, Vol. 45, No. 10, pp. 2214–2222 (2009)
- [6] U. Maeder and M. Morari: Offset-free reference tracking for predictive controllers; *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5252–5257 (2007)
- [7] T. Ohtsuka: AutoGenU, <http://www-sc.sys.es.osaka-u.ac.jp/~ohtsuka/code/index-j.htm> (2000)
- [8] 竹川, 青木, 仲矢, 大谷, 大塚: C/GMRES 法に基づく非線形モデル予測制御のスタートアップ方法; 第 10 回計測自動制御学会制御部門大会, 172-1-5 (2010)

著者略歴

さくら い ゆう た
櫻井 優太

2011 年 3 月大阪大学基礎工学部システム科学科卒業，同年 4 月同大学大学院基礎工学研究科システム創成専攻博士前期課程に進学し，現在に至る。

おお つか とし ゆき
大塚 敏之 (正会員)

論文誌 Vol. 25, No. 5, p. 133 参照