相補性制約をもつ非線形 2 次錐計画問題に対する 平滑化法とスマートハウス運転計画問題への適用*

高須 啓介[†]・田中 洋一[‡]・福島 雅夫[†]

Smoothing Method for Nonlinear Second-Order Cone Programs with Complementarity Constraints and Its Application to the Smart House Scheduling Problem*

Keisuke TAKASU[†], Yoichi TANAKA[‡] and Masao FUKUSHIMA[†]

In this paper, we consider an optimization problem with complementarity constraints and second-order cone constraints. The mathematical program with complementarity constraints (MPCC) has extensively been studied because MPCC has wide application such as engineering design, traffic equilibrium and game theory. Recently, second-order cone programming has also been studied intensively in relation to robust optimization under uncertainty. To the author's knowledge, however, theoretical and algorithmic results about problems that contain both complementarity and second-order cone constraints have yet to be reported. In this paper, we propose a method for solving nonlinear second-order cone programs with complementarity constraints, which uses a smoothing technique to deal with complementarity constraints, and show its convergence. Moreover, as an application, we formulate a mathematical model of smart house scheduling as a nonlinear second-order cone program with complementarity constraints, and give numerical results with the proposed method.

1. 序論

本論文では、相補性制約と 2 次錐制約をあわせもつ最適化問題を考える。相補性制約付きの数値計画問題 (Mathematical Program with Complementarity Constraints, MPCC) は、工学設計や交通流均衡問題、ゲーム理論など幅広い応用があるため、これまで多くの研究が行われてきた。理論面に関しては MPCC に対する最適性条件などの研究 [7,10,13] が、数値解法に関しては平滑化法や緩和法など様々なアプローチが提案されている [6,7]。一方、2 次錐計画問題 (Second-Order Cone Program, SOCP) [1,4] は、金融や制御などの分野に現れる不確実性のもとでのロバスト最適化に関連して近年非常に活発に研究されている。解法に関しては、特に線形

2 次錐計画問題に対して、内点法が効果的であるとされ、高速で実用的なソルバーも開発されている [9]。また、非線形 2 次錐計画問題についても様々なアルゴリズムが提案されている [8]。このように MPCC と SOCP のそれぞれに対して活発に研究が進められているものの、相補性制約と 2 次錐制約の両方を含む問題については理論あるいは数値解法に関する研究成果はほとんど報告されていない。

本論文では、次の相補性制約をもつ非線形 2 次錐計画問題 P を考える。

$$\begin{aligned} P: \min & f(x, y, z) \\ \text{s.t. } & (x, y, z) \in R^n \times R^m \times R^m \\ & y \geq 0, z \geq 0, y \perp z \\ & g_j(x, y, z) = 0, j = 1, \dots, p \\ & h_l(x, y, z) \in K^{q_l}, l = 1, \dots, s \end{aligned}$$

ここで、 $f: R^{n+2m} \rightarrow R$, $g_j: R^{n+2m} \rightarrow R$ ($j = 1, \dots, p$), $h_l: R^{n+2m} \rightarrow R^{q_l}$ ($l = 1, \dots, s$) は 2 回連続的の微分可能な関数である。また、 $y \perp z$ は $y^T z = 0$, すなわちベクトル y と z が直交することを意味する。ベクトル y と z に関する $y \geq 0$ かつ $z \geq 0$ かつ $y \perp z$ という制約は、相補性制約とよばれる。以下、 $w = (x, y, z) \in R^N$ と表す。ただし、 $N = n + 2m$ である。集合 $K^{q_l} = \{(\zeta_0, \bar{\zeta}) \in R \times R^{q_l-1} : \zeta_0 \geq \|\bar{\zeta}\|\}$ は、

* 原稿受付 2012 年 3 月 26 日

[†] 京都大学 大学院 情報学研究科 Graduate School of Informatics, Kyoto University; Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto city, Kyoto 606-8501, JAPAN

[‡] 東邦ガス (株) 商品開発部 技術グループ Technical Group, Product Development Department, Toho Gas Co., Ltd.; 19-18, Sakurada-cho, Atsuta-ku, Nagoya city, Aichi 456-8511, JAPAN

Key Words: second-order cone program, smoothing method, smart house scheduling.

q_l 次元の2次錐とよばれる。いま $h_l(w) = (h_{l0}(w), \bar{h}_l(w))^T \in R \times R^{q_l-1}$ とすると、 $h_l(x) \in K^{q_l}$ は $h_{l0}(w) \geq \|\bar{h}_l(w)\|$ を意味する。なお、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す。

相補性制約は等価な非線形等式制約に置き換えられることが知られている。しかし、その非線形等式制約に含まれる関数は微分不可能であるため、数値的に取り扱うことは容易ではない。そこで、その関数を微分可能な関数で近似する平滑化の手法が研究されている[6,7]。本論文では問題 P に対して平滑化法に基づく数値解法を提案し、適切な仮定のもとで問題 P の最適性条件を満たす解が得られることを示す。

さらに、問題 P の応用としてスマートハウス運転計画問題を取り扱う。スマートハウスとは燃料電池や太陽光発電といった複数のエネルギー供給源をもつ住宅のことであり、それらをうまく組み合わせた運転により、効率的なエネルギー供給を実現することができるため、省エネ意識が高まる昨今において、多くの関心を集めている[14]。スマートハウス運転計画問題とは、ある期間における運転費用が最小になるような計画を策定する問題であり、様々なモデル化と解法が提案されている[12]。とくに先行研究[11]では、家庭の電力需要量、熱需要量、太陽光発電量を確率変数と仮定し、2段階確率計画問題として定式化するアプローチを提案している。2段階確率計画法とは、確率変数の実現値に対して制約条件が満たされないときにそれを賄うためのリコースを考え、その費用の期待値を目的関数に付加して最適化を行う手法である。通常のモデルでは単位リコースあたりのコストは確定的に与えられる。しかし、スマートハウスは複数のエネルギー源をもつため、リコースの供給源も様々である。そのため、その供給源をあらかじめ定めず、不確実なものとして扱うモデルが望ましい。そこで本研究ではその不確実要素に対して、ロバスト最適化[2]の考え方を適用した定式化を行う。また、このモデルでは電力の売買に関する制度上の制約から相補性制約が現れるため、相補性制約と2次錐制約を含む問題 P の形に定式化できるので、本論文で提案するアルゴリズムを用いて解くことができる。

本論文の構成は以下の通りである。2節では問題 P に対する最適性条件を与える。3節では平滑化の手法を用いて問題 P の近似問題を構成し、それを逐次解くことで問題 P の最適性条件を満たす解が得られることを示す。4節では問題 P の具体例としてスマートハウス運転計画問題を定式化し、5節ではその問題に対する数値実験を行う。最後に6節において本論文の結論を述べる。

2. 問題 P の最適性条件

本節では、相補性制約付き非線形2次錐計画問題 P の最適性条件について議論する。代表的な最適性条件である Karush-Kuhn-Tucker 条件 (KKT 条件)[5] は制約想定とよばれる仮定のもとで、最適性の必要条件を与え

る。一般に非線形計画では KKT 条件を満たす点を求めることが目標となるが、相補性制約付きの数値計画問題 (MPCC) に対して直接、標準的な最適性条件を議論することは困難である。その理由として、標準的な制約想定が MPCC については成立しないことが挙げられる。たとえば、代表的な制約想定である Mangasarian-Fromovitz 制約想定は相補性制約を満たす点において成立しない[5]。そのため、MPCC において通常の KKT 条件を最適性条件として用いることはできない。

2次錐制約のない通常の MPCC に対して様々な停留点の概念が知られている[13]。その中でも B-停留点とよばれる停留点は、問題の実行可能集合に対して直接定義されているため MPCC においても議論が可能である。本論文では相補性制約付き非線形2次錐計画問題 P の B-停留点について考える。一般の制約付き最適化問題における B-停留点は次のように定義される。

【定義 1】 S を R^N の空でない閉部分集合とする。点 $\bar{w} \in S$ が問題

$$\min f(w) \quad \text{s.t. } w \in S$$

の B-停留点であるとは

$$-\nabla f(\bar{w}) \in N_S(\bar{w})$$

が成り立つことである。ここで、 $N_S(\bar{w})$ は点 $\bar{w}$ における S の接錐 $T_S(\bar{w})$ の極錐であり、法線錐とよばれる[5]。

通常非線形計画問題においては、B-停留点は適当な制約想定のもとで代数的な表現ができるので取り扱いやすい。しかし、先に述べたように、MPCC に対しては標準的な制約想定を用いた議論はできない。そこで、MPCC の緩和問題を考え、それに対する最適性条件を通して元の問題の B-停留点を特徴づける試みがなされている[5,7,10]。ここではそれらの結果を2次錐制約を含む問題に拡張することにより、問題 P の最適性条件を与える。

以下では、 $\bar{w} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ を問題 P の実行可能解とする。 $\bar{w}$ に対し次の添字集合を定義する。

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &\equiv \{i \mid \bar{y}_i = 0 < \bar{z}_i\}, \quad \bar{\beta} \equiv \{i \mid \bar{y}_i = 0 = \bar{z}_i\}, \\ \bar{\gamma} &\equiv \{i \mid \bar{y}_i > 0 = \bar{z}_i\} \end{aligned}$$

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ は添字集合 $i = \{1, \dots, m\}$ の分割になっている。 $\bar{w}$ に対して、次の緩和問題を定義する。

$$\begin{aligned} R(\bar{w}): \min & f(x, y, z) \\ \text{s.t. } & (x, y, z) \in R^n \times R^m \times R^m \\ & y_i = 0, z_i \geq 0, \quad i \in \bar{\alpha} \\ & y_i \geq 0, z_i \geq 0, \quad i \in \bar{\beta} \\ & y_i \geq 0, z_i = 0, \quad i \in \bar{\gamma} \\ & g_j(w) = 0, \quad j = 1, \dots, p \\ & h_l(w) \in K^{q_l}, \quad l = 1, \dots, s \end{aligned}$$

緩和問題 $R(\bar{w})$ は相補性制約を含まない非線形 2 次錐計画問題であり, その KKT 条件は次のように表される [4].

$$\nabla_x f(\bar{w}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla_x g_j(\bar{w}) - \sum_{l=1}^s \nabla_x h_l(\bar{w}) \nu_l = 0 \quad (1)$$

$$\nabla_y f(\bar{w}) - \xi + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla_y g_j(\bar{w}) - \sum_{l=1}^s \nabla_y h_l(\bar{w}) \nu_l = 0 \quad (2)$$

$$\nabla_z f(\bar{w}) - \eta + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla_z g_j(\bar{w}) - \sum_{l=1}^s \nabla_z h_l(\bar{w}) \nu_l = 0 \quad (3)$$

$$\xi_i = 0, \quad i \in \bar{\gamma} \quad (4)$$

$$\xi_i \geq 0, \eta_i \geq 0, \quad i \in \bar{\beta} \quad (5)$$

$$\eta_i = 0, \quad i \in \bar{\alpha} \quad (6)$$

$$g_j(\bar{w}) = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (7)$$

$$\nu_l \in K^q, h_l(\bar{w}) \in K^q, \nu_l^T h_l(\bar{w}) = 0, l = 1, \dots, s \quad (8)$$

ここで, $\xi \in R^m, \eta \in R^m, \lambda \in R^p, \nu \in R^q$ はラグランジュ乗数である. KKT 条件は問題 $R(\bar{w})$ に対する制約想定のもとで最適性の必要条件である. すなわち, $\bar{w}$ が問題 $R(\bar{w})$ の局所的最適解ならば, ある制約想定が成立するとき, KKT 条件 (1)–(8) を満たすラグランジュ乗数 $\xi \in R^m, \eta \in R^m, \lambda \in R^p, \nu \in R^q$ が存在する.

一方, 2 次錐制約を含まない通常の MPCC の最適性条件を議論するうえで, MPCC-1 次独立制約想定 (MPCC-LICQ) [5, 7] とよばれる制約想定が重要となる. たとえば, MPCC-LICQ のもとでは緩和問題の KKT 条件と MPCC の B-停留点の等価性が保証される. 次の MPCC 非退化制約想定 (MPCC-NCQ) は, MPCC-LICQ を 2 次錐制約を含む問題 P に拡張したものである.

【定義 2】 点 $\bar{w}$ を問題 P の実行可能解とする. $\bar{w}$ において MPCC-非退化制約想定 (MPCC-NCQ) が成立するとは,

$$\begin{aligned} e_{n+i}, & \quad i \in \bar{\alpha} \cup \bar{\beta} \\ e_{n+m+i}, & \quad i \in \bar{\beta} \cup \bar{\gamma} \\ \nabla g_j(\bar{w}), & \quad j = 1, \dots, p \\ \nabla h_l(\bar{w}) \nabla \psi_l(h_l(\bar{w})), & \quad l = 1, \dots, s \end{aligned}$$

を列にもつ行列がフルランクであることをいう. ここで, $e_k \in R^N$ は第 k 成分が 1 の単位ベクトルである.

各 $l = 1, \dots, s$ について, $t_l \in K^q$ が与えられたとき, 関数 ψ_l は以下になる [4].

$$\begin{aligned} \psi_l: R^q &\rightarrow R^q, \psi_l(t_l) := t_l, \text{ if } t_l = 0 \\ \psi_l: R^q &\rightarrow \emptyset, \psi_l(t_l) := \emptyset, \text{ if } t_{l0} > \|\bar{t}_l\| \\ \psi_l: R^q &\rightarrow R^1, \psi_l(t_l) := \|\bar{t}_l\| - t_{l0}, \text{ if } t_{l0} = \|\bar{t}_l\| \neq 0 \end{aligned}$$

よって, MPCC-NCQ における $\nabla h_l(w) \nabla \psi_l(h_l(w))$ は具体的に以下のように表される.

$$\nabla h_l(w) \nabla \psi_l(h_l(w)) = \nabla h_l(w), \text{ if } h_l(w) = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla h_l(w) \nabla \psi_l(h_l(w)) &= -\nabla h_{l0}(w) + \frac{\nabla \bar{h}_l(w) \bar{h}_l(w)}{\|\bar{h}_l(w)\|}, \\ &\text{if } h_{l0}(w) = \|\bar{h}_l(w)\| \neq 0 \\ \nabla h_l(w) \nabla \psi_l(h_l(w)) &= \emptyset, \text{ if } h_{l0}(w) > \|\bar{h}_l(w)\| \end{aligned}$$

MPCC-NCQ は緩和問題 $R(\bar{w})$ に対する非退化制約想定 [4] とみなすことができる. したがって, 点 $\bar{w}$ において MPCC-NCQ が成立すれば, KKT 条件 (1)–(8) を満たすラグランジュ乗数は一意に定まる.

次の定理は, 通常非線形 2 次錐計画問題である問題 $R(\bar{w})$ の KKT 条件を考えることで, 問題 P の B-停留点を特徴づけられることを示している (証明は付録参照).

【定理 1】 点 $\bar{w}$ を問題 P の実行可能解とする. $\bar{w}$ において問題 $R(\bar{w})$ の KKT 条件 (1)–(8) が満たされるならば, $\bar{w}$ は問題 P の B-停留点である. さらに, $\bar{w}$ において MPCC-NCQ が満たされるならば, $\bar{w}$ が問題 $R(\bar{w})$ の KKT 条件 (1)–(8) を満たすことと $\bar{w}$ が問題 P の B-停留点であることは等価である.

3. 平滑化法

本節では平滑化の考え方をを用いて, 問題 P を微分可能な非線形 2 次錐計画問題で近似する. さらに, 前節の結果を用いて, 近似問題と元の問題 P の関係を議論する.

パラメータ $\epsilon \geq 0$ を用いて

$$\phi^\epsilon(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + \epsilon}$$

で定義される関数 ϕ^ϵ を平滑化 Fischer-Burmeister 関数 [6] とよぶ. 関数 ϕ^ϵ は $\epsilon > 0$ のとき任意の点で微分可能であり, 偏微分係数は次式で与えられる.

$$\frac{\partial \phi^\epsilon(a, b)}{\partial a} = 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + \epsilon}} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi^\epsilon(a, b)}{\partial b} = 1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + \epsilon}} \quad (10)$$

さらに, 関数 ϕ^ϵ は次の性質をもつ.

$$\phi^\epsilon(a, b) = 0 \iff a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad ab = \epsilon/2$$

とくに $\epsilon = 0$ のとき, $\phi^0(a, b) = 0$ は $a \geq 0, b \geq 0, a \perp b$ と等価である. ここで, 関数 $\Phi^\epsilon: R^m \times R^m \rightarrow R^m$ を

$$\Phi^\epsilon(y, z) \equiv (\phi^\epsilon(y_1, z_1), \dots, \phi^\epsilon(y_m, z_m))^T$$

と定義し, 相補性制約 $y \geq 0, z \geq 0, y \perp z$ を非線形等式制約 $\Phi^\epsilon(y, z) = 0$ で置き換えることにより, 問題 P を次の非線形 2 次錐計画問題 $N(\epsilon)$ で近似できる.

$$\begin{aligned} N(\epsilon): \min & f(x, y, z) \\ \text{s.t. } & (x, y, z) \in R^n \times R^m \times R^m \\ & \Phi^\epsilon(y, z) = 0 \\ & g_j(x, y, z) = 0, \quad j = 1, \dots, p \\ & h_l(x, y, z) \in K^q, \quad l = 1, \dots, s \end{aligned}$$

関数 ϕ^ϵ の性質から, 問題 $N(0)$ と P は等価である. そ

ここで、平滑化パラメータ $\epsilon > 0$ を 0 に近づけながら、近似問題 $N(\epsilon)$ を解くことを考える。

以下では簡単のため、 $\Phi^\epsilon(w) \equiv \Phi^\epsilon(y, z)$ と書く。そのとき (9), (10) 式より、関数 $\Phi^\epsilon(w)$ の第 i 要素 $\Phi_i^\epsilon(w) \equiv \phi^\epsilon(y_i, z_i)$ の勾配は次式で表される。

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_i^\epsilon(w) = & \left(1 - \frac{y_i}{\sqrt{(y_i)^2 + (z_i)^2 + \epsilon}} \right) e_{n+i} \\ & + \left(1 - \frac{z_i}{\sqrt{(y_i)^2 + (z_i)^2 + \epsilon}} \right) e_{n+m+i} \quad (11) \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ のとき、問題 $N(\epsilon)$ は微分可能な非線形2次錐計画問題であり、KKT 条件は以下で表される。

$$\nabla_x f(w) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla_x g_j(w) - \sum_{l=1}^s \nabla_x h_l(w) \nu_l = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \nabla_y f(w) - \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial \phi_i^\epsilon}{\partial a} e_i^{(m)} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla_y g_j(w) \\ - \sum_{l=1}^s \nabla_y h_l(w) \nu_l = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_z f(w) - \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial \phi_i^\epsilon}{\partial b} e_i^{(m)} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla_z g_j(w) \\ - \sum_{l=1}^s \nabla_z h_l(w) \nu_l = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

$$\Phi^\epsilon(w) = 0 \quad (15)$$

$$g_j(w) = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (16)$$

$$\nu_l \in K^{q_l}, \quad h_l(w) \in K^{q_l}, \quad \nu_l^T h_l(w) = 0, \quad l = 1, \dots, s \quad (17)$$

ここで、 (μ, λ, ν) はラグランジュ乗数、 $e_k^{(m)} \in R^m$ は第 k 成分が 1 の単位ベクトルであり、

$$\frac{\partial \phi_i^\epsilon}{\partial a} \equiv \frac{\partial \phi_i^\epsilon}{\partial a}(y_i, z_i), \quad \frac{\partial \phi_i^\epsilon}{\partial b} \equiv \frac{\partial \phi_i^\epsilon}{\partial b}(y_i, z_i)$$

である。以下では $\pi = (\mu, \lambda, \nu)$ と表す。

次の条件は MPCC に関する議論においてしばしば仮定される。

【定義 3】 問題 P の実行可能解 $\bar{w}$ において、 $\bar{\beta} = \emptyset$ のとき、狭義相補性が成り立つという。

$\epsilon = 0$ のときでも関数 $\phi^\epsilon(a, b)$ は点 $(a, b) \neq (0, 0)$ において微分可能となるため、最適解 $\bar{w}$ において狭義相補性が成立するとき、問題 $N(0)$ すなわち問題 P は最適解 $\bar{w}$ の近傍において相補性制約 $y \geq 0, z \geq 0, y \perp z$ を等式制約 $y_i = 0 (i \in \bar{\alpha}), z_i = 0 (i \in \bar{\gamma})$ で置き換えた問題に帰着できる。そのとき、最適性条件が通常非線形2次錐計画問題に対する KKT 条件と等価になるため、アルゴリズムの収束性などの議論を行いやすい。しかし、現実の MPCC においては狭義相補性はしばしば成立しない。そこで、狭義相補性よりも弱い漸近的弱非退化性 [7] を考える。

【定義 4】 $k \rightarrow \infty$ のとき、 $\epsilon_k \rightarrow 0$ であり、 $w^k \rightarrow \bar{w}$ と

する。各 $i \in \bar{\beta}$ について、 $\{\nabla \Phi_i^{\epsilon_k}(w^k)\}$ の任意の集積点 $\bar{r}_i \in R^N$ は $(1 - \bar{u}_i)^2 + (1 - \bar{v}_i)^2 \leq 1$ を満たす $\bar{u}_i, \bar{v}_i \in R$ を用いて

$$\bar{r}_i = \bar{u}_i e_{n+i} + \bar{v}_i e_{n+m+i}$$

と表せる。すべての $i \in \bar{\beta}$ に対して、任意の集積点 $\bar{r}_i$ で $\bar{u}_i \neq 0$ かつ $\bar{v}_i \neq 0$ であるとき、 $\{w^k\}$ は漸近的弱非退化であるという。

上の条件は (11) 式における $\left(1 - \frac{y_i^k}{\sqrt{(y_i^k)^2 + (z_i^k)^2 + \epsilon_k}} \right)$

と $\left(1 - \frac{z_i^k}{\sqrt{(y_i^k)^2 + (z_i^k)^2 + \epsilon_k}} \right)$ がそれぞれ $\bar{u}_i, \bar{v}_i$ に収束し、そのどちらも 0 とならないこと、すなわち y_i^k と z_i^k が同程度のはやさで 0 に近づいていくことを意味している。また、 $\bar{w}$ において狭義相補性が成り立つとき、すなわち $\bar{\beta} = \emptyset$ のときは、漸近的弱非退化性は自動的に成り立つ。

問題 $N(\epsilon)$ に対するラグランジュ関数を次で定義する。

$$L^\epsilon(w, \pi) := f(w) - \Phi^\epsilon(w)^T \mu - g(w)^T \lambda - h(w)^T \nu$$

$\epsilon > 0$ のとき、問題 $N(\epsilon)$ は微分可能な非線形2次錐計画問題であるから、最適性の2次の十分条件は次のように表される [4]。

【定義 5】 (2 次の十分条件) $\epsilon > 0$ とし、 (w, π) が問題 $N(\epsilon)$ の KKT 条件 (12)–(17) に加えて、次式を満たすとき、最適性の2次の十分条件が成り立つという。

$$d^T \left(\nabla_w^2 L^\epsilon(w, \pi) + \sum_{l=1}^s H_l(w, \pi) \right) d \geq 0, \quad \forall d \in C^\epsilon$$

ここで、

$$C^\epsilon := \left\{ d \in R^N \left| \begin{array}{l} \nabla \Phi^\epsilon(w)^T d = 0 \\ \nabla g_j(w)^T d = 0, \\ \quad j = 1, \dots, p \\ \nabla h_l(w)^T d = 0, \\ \quad l: \nu_{l0} > \bar{\nu}_l \\ \nabla h_l(w)^T d \in \text{span}\{R_l \nu_l\}, \\ \quad l: \nu_{l0} = \|\bar{\nu}_l\| \neq 0, h_l(w) = 0 \\ d^T \nabla h_l(w) \nu_l = 0, \\ \quad l: \nu_{l0} = \|\bar{\nu}_l\| \neq 0, h_{l0}(w) = \|\bar{h}_l(w)\| \neq 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$H_l(w, \pi) := \begin{cases} -\frac{\nu_{l0}}{h_{l0}(w)} \nabla h_l(w) R_l \nabla h_l(w)^T, & \text{if } h_{l0}(w) = \|\bar{h}_l(w)\| \neq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

および、 $R_l := \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & -I_{q_l-1} \end{pmatrix} \in R^{q_l \times q_l}$ である。

最後に、平滑化パラメータを $\epsilon_k \rightarrow 0$ とし、各 ϵ_k に対する近似問題 $N(\epsilon_k)$ の最適解を求めることで問題 P の

B-停留点が得られることを示す（証明は付録参照）。

【定理 2】 $k \rightarrow \infty$ のとき, $\epsilon_k \rightarrow 0$ となるパラメータ列 $\{\epsilon_k\}$ を考える．各 k に対して (w^k, π^k) は問題 $N(\epsilon_k)$ の KKT 条件 (12)–(17) と 2 次の十分条件を満たし, $(w^k, \pi^k) \rightarrow (\bar{w}, \bar{\pi})$ が成り立つとする．さらに点 $\bar{w}$ において MPCC-NCQ が成り立ち, $\{w^k\}$ は漸近的弱非退化性を満たすとする．そのとき, $\bar{w}$ は問題 $R(\bar{w})$ の KKT 条件を満たす．すなわち, $\bar{w}$ は問題 P の B-停留点である．

点 $\bar{w}$ において狭義相補性が成り立つ場合, すなわち $\bar{\beta} = \emptyset$ となる場合は, 定理の証明（付録参照）において $i \in \bar{\beta}$ についての議論が不要であるため, 2 次の十分条件や MPCC-NCQ の仮定がなくても定理は成立する．

定理 2 の結果に基づいて, $\epsilon_k \rightarrow 0$ としながら, 各反復 k において近似的に問題 $N(\epsilon_k)$ を解くことにより, 問題 P の B-停留点を求めるアルゴリズムが得られる．

アルゴリズム 1

Step 0 初期点 $w^0 = (x^0, y^0, z^0)$ を選ぶ．定数 $\delta \in (0, 1)$, $\epsilon_0 > 0$ を選ぶ． $k := 0$ とする．

Step 1 問題 $N(\epsilon_k)$ の近似最適解 w^k を求める．

Step 2 ϵ_k が十分小さければ, 停止する．そうでなければ, $\epsilon_{k+1} := \delta \epsilon_k$, $k := k + 1$ として, Step 1 へ．

4. スマートハウス運転計画モデル

本節では, スマートハウス運転計画問題を相補性制約付き非線形 2 次錐計画問題に定式化する．スマートハウス運転計画問題とは, ある期間のスマートハウスの運転費用が最小となるような運転計画を求める問題である．この問題において考える期間を運転計画期間とよぶ．運転計画期間を H 個の等間隔の期間にわけ, その h 番目 ($h = 1, 2, \dots, H$) の期間を期間 h とよぶ．以下では, 期間の添字集合を $\mathcal{H} = \{1, 2, \dots, H\}$ と表す．

本論文で扱うスマートハウスは Fig. 1 のように, 燃料電池, 太陽電池, 蓄熱槽, ガス給湯器から構成される．燃料電池は, 燃料であるガスを電気化学的に反応させ, 電気および熱を取り出す装置であり, 作り出した熱を温水として蓄熱槽に蓄えることができる．太陽電池は, 太陽光エネルギーを電気エネルギーに変換する装置である．ガス給湯器は, ガスを燃焼させて温水を供給する装置である．このモデルでは, 電力会社から電力を購入（買電）することができ, また, 太陽光発電によって余剰電力が発生した場合は, 電力会社に売却（売電）することができる．ただし, 規定によって, 買電と売電を同時に行うことはできない．これが問題に相補性制約をもたらす要因である．

4.1 スマートハウスの数理モデル

4.1.1 燃料電池に関する制約条件

本節で述べるモデルは先行研究 [11] に基づく．期間 h における燃料電池へのガス投入量 $x(h)$ は, 0 以上かつ最大値 $x_{\max}$ 以下の値をとらなければならない．

Fig. 1 Model of smart house

$$0 \leq x(h) \leq x_{\max}, h \in \mathcal{H} \quad (18)$$

燃料電池へのガス投入量 $x(h)$ と発電量 $p_{FC}(h)$ の関係については, 投入量 $x(h)$ がある程度大きくないとそれに見合う発電量 $p_{FC}(h)$ が得られないという性質がある．そのため, $x(h) = 0$ のとき $p_{FC}(h) = 0$ となり, $x(h)$ が増加するにつれて $p_{FC}(h) \approx a(x(h) - \alpha)$ となるような関数, たとえば,

$$p_{FC}(h) = a\alpha \left(\sqrt{\frac{x(h)^2}{\alpha^2} + 1} - 1 \right), h \in \mathcal{H} \quad (19)$$

を考える．ここで, a と α は定数である．同様に, 燃料電池へのガス投入量 $x(h)$ と温水出力 $q_{FC}^{in}(h)$ の関係も, 定数 b, β を用いて

$$q_{FC}^{in}(h) = b\beta \left(\sqrt{\frac{x(h)^2}{\beta^2} + 1} - 1 \right), h \in \mathcal{H} \quad (20)$$

と表す．

期間 h の初めにおける燃料電池の蓄熱槽の蓄熱量を $Q_{FC}(h)$, 計画期間の終わりにおける蓄熱量を $Q_{FC}(H+1)$ とする．すべての期間において, 蓄熱量は 0 以上であり, 蓄熱可能量 $Q_{\max}^{FC}$ 以下でなければならない．

$$0 \leq Q_{FC}(h) \leq Q_{\max}^{FC}, h \in \mathcal{H} \cup \{H+1\} \quad (21)$$

また, 期間 h における蓄熱槽への蓄熱量を $q_{FC}^{in}(h)$, 蓄熱槽からの放熱量を $q_{FC}^{out}(h)$ とすると, 蓄熱量の推移に関して, 次の関係が成り立つ．

$$Q_{FC}(h+1) = Q_0^{FC} + \sum_{k=1}^h q_{FC}^{in}(k) - \sum_{k=1}^h q_{FC}^{out}(k), h \in \mathcal{H} \quad (22)$$

$$q_{FC}^{in}(h), q_{FC}^{out}(h) \geq 0, h \in \mathcal{H} \quad (23)$$

ただし, 初期蓄熱量を $Q_{FC}(1) = Q_0^{FC}$ とする．

4.1.2 給湯量と放熱量に関する制約条件

給湯量 $y^-(h)$ と外部への放熱量 $y^+(h)$ は, 少なくとも一方は 0 でなければならないから,

$$y^-(h) \cdot y^+(h) = 0, h \in \mathcal{H} \quad (24)$$

$$y^+(h), y^-(h) \geq 0, h \in \mathcal{H} \quad (25)$$

が満たされなければならない。しかし、後述する熱の需給バランスに関する制約 (31) を考慮すると、相補性制約 (24) を制約条件に陽に含めなくても、目的関数の性質から最適解において (24) 式は満たされることがわかる。

4.1.3 電力と熱の需給バランスの制約条件

期間 h における燃料電池の電気出力を $p_{FC}(h)$ 、電力会社から購入する電力を $z^-(h)$ 、売却する電力を $z^+(h)$ とする。さらに、 $s(h)$ を太陽光発電量を表す定数、 $E_H(h)$ を家庭内電力需要を表す定数とする。すべての期間において、電力の需給バランスが満たされなければならないから、次式が成り立つ。

$$p_{FC}(h) + s(h) + z^-(h) = z^+(h) + E_H(h), h \in \mathcal{H} \quad (26)$$

$$p_{FC}(h), z^+(h), z^-(h) \geq 0, h \in \mathcal{H} \quad (27)$$

期間 h における燃料電池の熱出力を $q_{FC}^{out}(h)$ 、ガス給湯量を $y^-(h)$ 、外部への排熱を $y^+(h)$ とする。さらに、 $\Theta(h)$ を家庭内の熱需要量を表す定数とする。すべての期間において、熱の需給バランスが満たされなければならないから、次式が成り立つ。

$$q_{FC}^{out}(h) + y^-(h) = \Theta(h) + y^+(h), h \in \mathcal{H} \quad (28)$$

しかし、家庭内電気需要量 $E_H(h)$ 、熱需要量 $\Theta(h)$ および太陽光発電量 $s(h)$ は現実には不確実な量と考えられるため、確率変数として取り扱うのが望ましい。そこで、電力需要量 $E_H(h)$ 、家庭内熱需要量 $\Theta(h)$ および太陽光発電量 $s(h)$ は有限個の値をとる離散確率分布に従うと仮定する。具体的には、 $E_H(h), \Theta(h), s(h)$ の組

$$(E_H(1), \dots, E_H(H), \Theta(1), \dots, \Theta(H), s(1), \dots, s(H))$$

は、確率 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ で実現値

$$(E_{Hi}(1), \dots, E_{Hi}(H), \Theta_i(1), \dots, \Theta_i(H), s_i(1), \dots, s_i(H))$$

をとると仮定する。ただし、 i はシナリオの添字であり、 n はシナリオの数である。シナリオの添字集合を $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。

このときの電力の需給バランス制約条件 (26) について考える。 $s(h), E_H(h)$ の実現値はシナリオ i ごとに異なるため、すべてのシナリオについて (26) 式が成り立つように計画をたてることはできない。そこで、電力需給バランスを満たすため、 $s(h)$ と $E_H(h)$ の値が確定した時点で需給の過不足をリコースによって補うと考え、それにかかる費用をリコース費用とよぶ。(26) 式において、左辺のほうが小さくなる場合は供給不足であり、リコースとして、たとえば、買電する、燃料電池からの発電を増やす、売電を減らす等が考えられる。これらの方法の中からいずれかを選択し、電力の不足分を賄うことになる。シナリオ i における需給バランスの不足分を賄う量を表すリコース変数を $e_i^-(h)$ とする。逆に供給過剰の場合、過剰分を処理する量を表すリコース変数を $e_i^+(h)$ と

する。

以上から、リコースを考慮した電力の需給バランスに関する制約条件は次のように書ける。

$$e_i^-(h) - e_i^+(h) = z^+(h) + E_{Hi}(h) - p_{FC}(h) - s_i(h) - z^-(h), h \in \mathcal{H}, i \in \mathcal{I} \quad (29)$$

$$e_i^-(h), e_i^+(h) \geq 0, h \in \mathcal{H}, i \in \mathcal{I} \quad (30)$$

熱需給バランス (28) についても同様にシナリオ i において不足分を賄う量を表すリコース変数を $\theta_i^-(h)$ 、過剰分を処理する量を表すリコース変数を $\theta_i^+(h)$ とすると、次の制約条件が満たされなければならない。

$$\theta_i^-(h) - \theta_i^+(h) = \Theta_i(h) + y^-(h) - q_{FC}^{out}(h) - y^+(h), h \in \mathcal{H}, i \in \mathcal{I} \quad (31)$$

$$\theta_i^-(h), \theta_i^+(h) \geq 0, h \in \mathcal{H}, i \in \mathcal{I} \quad (32)$$

4.1.4 買電と売電に関する制約条件

制度上、電力会社から電力を購入している場合、電力の売却はできない。よって、 $z^-(h)$ と $z^+(h)$ の少なくとも一方は 0 でなければならない。すなわち、

$$z^-(h) \cdot z^+(h) = 0, h \in \mathcal{H} \quad (33)$$

を満たさなければならない。また、制度上、太陽光発電量を超えた売電はできないから、

$$z^+(h) \leq s(h), h \in \mathcal{H} \quad (34)$$

が満たされなければならない。しかし、 $s(h)$ は確率変数であるから、需給バランス条件と同様、リコースを考える。シナリオ i における売電量 $z^+(h)$ の過剰分を処理するリコース変数を $\zeta_i(h)$ とすると、次の制約式を得る。

$$z^+(h) - \zeta_i(h) \leq s_i(h), h \in \mathcal{H}, i \in \mathcal{I} \quad (35)$$

$$\zeta_i(h) \geq 0, h \in \mathcal{H}, i \in \mathcal{I} \quad (36)$$

4.1.5 目的関数

最小化すべき目的関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & C_1 \sum_{h=1}^H x(h) + C_2 \sum_{h=1}^H z^-(h) - C_3 \sum_{h=1}^H z^+(h) + C_4 \sum_{h=1}^H y^-(h) \\ & + \sum_{i=1}^n p_i \left\{ \sum_{h=1}^H C_{e-}(h) e_i^-(h) + \sum_{h=1}^H C_{e+}(h) e_i^+(h) \right. \\ & \left. + \sum_{h=1}^H C_{\theta-}(h) \theta_i^-(h) + \sum_{h=1}^H C_{\theta+}(h) \theta_i^+(h) + \sum_{h=1}^H C_{\zeta}(h) \zeta_i(h) \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

定数 C_1 はガスの購入単価、 C_2 は電気の購入単価、 C_3 は電気の売却単価、 C_4 は給湯単価を表す。また、 $C_{e-}(h)$ 、 $C_{e+}(h)$ はそれぞれ期間 h におけるリコース変数 $e^-(h)$ 、 $e^+(h)$ に対するリコース費用の単価、同様に $C_{\theta-}(h)$ 、 $C_{\theta+}(h)$ はリコース変数 $\theta^-(h)$ 、 $\theta^+(h)$ に対するリコース費用の単価、 $C_{\zeta}(h)$ はリコース変数 $\zeta(h)$ に対するリコー

ス費用の単価である．したがって (37) 式の各項は，第 1 項から順にガスの購入費用，電気購入費用，電気の売却利益，給湯費用，リコース費用の期待値を表す．ただし，第 3 項の売却利益は， -1 をかけて費用に換算している．

4.2 ロバスト最適化

前節ではリコース係数は定数として扱っていた．しかし現実には，たとえばエネルギーに不足が生じたとき，そのリコースを賄う手段は，そのときの状況に応じて，買電する，売電を減らす，燃料電池からの発電を増やす等様々であり，さらにそれらを混合して用いる場合も考えられる．これらの理由からリコース費用係数を単一の値として確定的に扱うのではなく，期間ごとに異なる不確定な値をとるものとする．

リコースは需給バランスの過不足を調整するためのペナルティとして扱うため，ロバスト最適化 [2] の考え方を採用する．ロバスト最適化とは不確実性集合とよばれる不確定なデータの生じ得る範囲をあらかじめ設定し，その中で最も都合の悪い状況が生じた場合を想定して最適化を行うモデル化の手法である．以下ではリコース変数 $e^-(h)$ に対する係数 $C_{e^-}(h)$ を例にとって説明する．他のリコース係数についても同様である．リコース費用係数 $C_{e^-}(h)$ のとりうる最大値と最小値をそれぞれ $C_{e^-}^{\max}, C_{e^-}^{\min}$ とする．そのとき，リコース費用の不確実性集合として，直方体 $C_{e^-}^{\min} \leq C_{e^-}(h) \leq C_{e^-}^{\max}, h \in \mathcal{H}$ を採用すると，結果として各期間で $C_{e^-}(h) = C_{e^-}^{\max}$ あるいは $C_{e^-}^{\min}$ となるような極端な場合を想定する傾向が強くなり，得られる方策は過度に保守的になりがちと考えられるので，不確実性集合を楕円体で表す手法がよく用いられる [3]．例として，不確実性集合を直方体で表した場合と楕円体で表した場合を Fig. 2 で示す．後者では各期間のリコース費用がすべて上限値や下限値に等しくなるような極端な場合は含まれないことがわかる．

ここで， $C_{e^-} = (C_{e^-}(1), \dots, C_{e^-}(H))^T$ を不確定ベクトルとし， C_{e^-} はある点 $k_{e^-} \in R^H$ を中心とする楕円体

Fig. 2 Rectangular and ellipsoidal uncertainty set

$$\Omega_{e^-} = \{k_{e^-} + A_{e^-}u : \|u\| \leq 1\} \quad (38)$$

のなかに存在すると仮定する．ただし， $u \in R^H, A_{e^-} \in R^{H \times H}$ とする．とくに， $\delta \in R$ を正の定数， $I \in R^{H \times H}$ を単位行列とし， $A_{e^-} = \delta I \in R^{H \times H}$ とすれば， Ω_{e^-} は半径 δ ，中心 k_{e^-} の球となる． $C_{e^+}, C_{\theta^-}, C_{\theta^+}, C_{\zeta}$ についても同様の不確実性集合を考える．そのとき，前節の目的関数 (37) のリコース費用に関する部分

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \left\{ \sum_{h=1}^H C_{e^-}(h) e_i^-(h) + \sum_{h=1}^H C_{e^+}(h) e_i^+(h) \right. \\ \left. + \sum_{h=1}^H C_{\theta^-}(h) \theta_i^-(h) + \sum_{h=1}^H C_{\theta^+}(h) \theta_i^+(h) \right. \\ \left. + \sum_{h=1}^H C_{\zeta}(h) \zeta_i(h) \right\} \end{aligned}$$

は，ロバスト最適化の考え方から不確実性集合の中でリコース費用が最悪，すなわち最大となる場合を考えることにより，次のようになる．

$$\begin{aligned} \max_{C_{e^-} \in \Omega_{e^-}} C_{e^-}^T \sum_{i=1}^n p_i e_i^- + \max_{C_{e^+} \in \Omega_{e^+}} C_{e^+}^T \sum_{i=1}^n p_i e_i^+ \\ + \max_{C_{\theta^-} \in \Omega_{\theta^-}} C_{\theta^-}^T \sum_{i=1}^n p_i \theta_i^- + \max_{C_{\theta^+} \in \Omega_{\theta^+}} C_{\theta^+}^T \sum_{i=1}^n p_i \theta_i^+ \\ + \max_{C_{\zeta} \in \Omega_{\zeta}} C_{\zeta}^T \sum_{i=1}^n p_i \zeta_i \quad (39) \end{aligned}$$

ここで， e_i^- は $e_i^-(h), h \in \mathcal{H}$ を要素とするベクトルであり， $e_i^+, \theta_i^-, \theta_i^+, \zeta_i$ も同様である．さらに，(39) 式は次のように陽に書くことができる．

$$\begin{aligned} k_{e^-}^T t_{e^-} + \|A_{e^-}^T t_{e^-}\| + \bar{k}_{e^+}^T t_{e^+} + \|A_{e^+}^T t_{e^+}\| + k_{\theta^-}^T t_{\theta^-} \\ + \|A_{\theta^-}^T t_{\theta^-}\| + \bar{k}_{\theta^+}^T t_{\theta^+} + \|A_{\theta^+}^T t_{\theta^+}\| + k_{\zeta}^T t_{\zeta} + \|A_{\zeta}^T t_{\zeta}\| \end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned} t_{e^-} = \sum_{i=1}^n p_i e_i^-, t_{e^+} = \sum_{i=1}^n p_i e_i^+, t_{\theta^-} = \sum_{i=1}^n p_i \theta_i^-, \\ t_{\theta^+} = \sum_{i=1}^n p_i \theta_i^+, t_{\zeta} = \sum_{i=1}^n p_i \zeta_i \quad (40) \end{aligned}$$

である．ここで人為変数 $s_{e^-}, s_{e^+}, s_{\theta^-}, s_{\theta^+}, s_{\zeta}$ を導入して目的関数を書き換えると，解くべき問題は以下の相補性制約をもつ非線形 2 次錐計画問題として表される．

$$\begin{aligned}
SH: \min & C_1 \sum_{h=1}^H x(h) + C_2 \sum_{h=1}^H z^-(h) \\
& - C_3 \sum_{h=1}^H z^+(h) + C_4 \sum_{h=1}^H y^-(h) \\
& + k_{e-}^T t_{e-} + s_{e-} + \bar{k}_{e+}^T t_{e+} + s_{e+} + k_{\theta-}^T t_{\theta-} + s_{\theta-} \\
& + k_{\theta+}^T t_{\theta+} + s_{\theta+} + k_{\zeta}^T t_{\zeta} + s_{\zeta} \\
\text{s.t. } & \text{2次錐制約 } \|A_{e-}^T t_{e-}\| \leq s_{e-}, \|A_{e+}^T t_{e+}\| \leq s_{e+}, \\
& \|A_{\theta-}^T t_{\theta-}\| \leq s_{\theta-}, \|A_{\theta+}^T t_{\theta+}\| \leq s_{\theta+}, \|A_{\zeta}^T t_{\zeta}\| \leq s_{\zeta} \\
& \text{線形制約 (18), (21) - (23), (25), (27), (29) - (32),} \\
& \text{(35), (36), (40)} \\
& \text{相補性制約 (33)} \\
& \text{非線形等式制約 (19), (20)}
\end{aligned}$$

5. 数値実験

前節で定式化したスマートハウス運転計画問題 SH に対して、アルゴリズム 1 を適用した数値実験の結果を報告する．実験は、CPU が Core 2 Duo (1.2GHz × 2)、メモリが 2GB、OS が Windows Vista の計算機上で行った．アルゴリズム 1 の Step 1 では、問題 $N(\epsilon_k)$ を SQP 型アルゴリズム [8] を用いて解いた．また、SQP 型アルゴリズムにおいて部分問題を解く際にはソルバー SDPT3 [9] を使用し、プログラムは Matlab 7.10.0 を用いて実装した．

問題 SH の定数は Table 1 のように与える．リソース $e_i^- = (e_i^-(1), \dots, e_i^-(H))^T$ の単価 $C_{e-} = (C_{e-}(1), \dots, C_{e-}(H))^T$ に対する不確実性集合 Ω_{e-} は、(38) 式で

$$k_{e-} = \frac{1}{2}(C_{e-}^{\max} + C_{e-}^{\min}) \mathbf{1} \quad (41)$$

$$A_{e-} = \delta_{e-} I \quad (42)$$

$$\delta_{e-} = \frac{1}{2}(C_{e-}^{\max} - C_{e-}^{\min})$$

とおいて得られる球とする．ここで $\mathbf{1}$ はすべての成分が 1 であるようなベクトルである．他のリソース単価の不確実性集合も同様に与える．また、2007 年の 11 月 1 日から 3 日までの 3 日間におけるある家庭の電力需要量、温水需要量、太陽光発電量の実測値を用いて、3 通りのシナリオを作成し (Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5 参照)、それぞれの生起確率を $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/3$, $p_3 = 1/3$ とする．

以上のデータに対して得られた最適解における目的関数値は -219.0056 であった．とくに、買電量 $z^+(h)$ と売電量 $z^-(h)$ の最適解を Fig. 6 に示す．図より、相補性制約 (33) が満たされていることが確認できる．

つぎに、不確実性集合の大きさが解にどのような影響を与えるかを調べる．そのためにパラメータ r を用いて、たとえば、リソース単価 $C_{e-} = (C_{e-}(1), \dots, C_{e-}(H))^T$ の不確実性集合 Ω_{e-} の半径を

$$\delta_{e-}(r) = \frac{1}{2}r(C_{e-}^{\max} - C_{e-}^{\min})$$

とし、不確実性集合の大きさを変化させる．他のすべてのリソース単価の不確実性集合にも同様の操作をし、問題 SH の最適解のふるまいを調べた．パラメータ r のさまざまな値に対する問題 SH の最適値を Fig. 7 に示す．

Table 1 Constants used in the experiments

constant	explanation	Value
H	The number of subperiods	6
C_1	Unit cost of gas [yen/Wh]	0.006997
C_2	Unit cost of purchased electricity [yen/Wh]	0.0191
C_3	Unit cost of sold electricity [yen/Wh]	0.049
C_4	Unit cost of heat [yen/Wh]	0.00897
$C_{e-}^{\max}$	Maximum value of the unit cost of e^- [yen/Wh]	0.02865
$C_{e-}^{\min}$	Minimum value of the unit cost of e^- [yen/Wh]	0.013032
$C_{e+}^{\max}$	Maximum value of the unit cost of e^+ [yen/Wh]	-0.002895
$C_{e+}^{\min}$	Minimum value of the unit cost of e^+ [yen/Wh]	-0.006365
$C_{\theta-}^{\max}$	Maximum value of the unit cost of θ^- [yen/Wh]	0.013455
$C_{\theta-}^{\min}$	Minimum value of the unit cost of θ^- [yen/Wh]	0
$C_{\theta+}^{\max}$	Maximum value of the unit cost of θ^+ [yen/Wh]	0
$C_{\theta+}^{\min}$	Minimum value of the unit cost of θ^+ [yen/Wh]	-0.00299
$C_{\zeta}^{\max}$	Maximum value of the unit cost of ζ [yen/Wh]	0.060468
$C_{\zeta}^{\min}$	Minimum value of the unit cost of ζ [yen/Wh]	0.04485
$x_{\max}$	Upper bound of gas input [Wh]	2300
Q_0^{FC}	Upper bound of stored heat [Wh]	10467
Q_0^{FC}	Stored heat at the beginning of the scheduling period [Wh]	0
a	Slope of power output of the fuel cell [Wh/W]	1.254
b	Slope of heat output of the fuel cell [Wh/W]	2.26
α	Constant of power output of the fuel cell [W]	13.66411
β	Constant of heat output of the fuel cell [W]	308.4071

Fig. 3 Scenarios of electricity demand $E_H(h)$

Fig. 4 Scenarios of heat demand $\theta(h)$

Fig. 5 Scenarios of solar power $s(h)$ Fig. 6 Purchased electricity $z^-(h)$ and sold electricity $z^+(h)$ at the solution

パラメータ r を大きくとるほど、問題の最適値が上昇することがわかる。不確実性集合を大きくとると、その中で最悪の場合を考えたときのコストも大きくなるので、これは妥当な結果といえる。

さらに詳しく調べるため、パラメータ r を変化させたときのリコース量のふるまいを観測する。たとえば、リコース e^- の期待値は

$$\sum_{i=1}^n p_i \sum_{h=1}^H e_i^-(h)$$

で与えられる。他のリコースについても同様である。リコース e^- , e^+ , ζ についての結果を Fig. 8 に示す。図より、不確実性集合の半径を大きくとるほど、各々のリコース量は減少しているのがわかる。この現象は、リコース単価が大きくなる可能性が増えれば、リコースを利用することを避けるために生じると考えられる。

6. 結論

本論文では相補性制約をもつ非線形 2 次錐計画問題に対して、平滑化法を用いた解法を提案し、適当な仮定のもとで最適性条件を満たす点が得られることを示した。さらに、応用としてスマートハウス運転計画モデルにおいてリコースの単価が不確実である場合を想定したモデルを構築し、平滑化法に基づくアルゴリズムにより解を求めることにより、そのモデルの妥当性を示した。

Fig. 7 Behavior of the optimal value for various values of parameter r Fig. 8 Behavior of the total amount of recourse e^- , e^+ and ζ for various values of parameter r

参考文献

- [1] F. Alizadeh and D. Goldfarb: Second-order cone programming; *Mathematical Programming*, Vol. 95, No. 1, pp. 3–51 (2003)
- [2] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui and A. Nemirovski: *Robust Optimization*, Princeton University Press (2009)
- [3] A. Ben-Tal and A. Nemirovski: Robust convex optimization; *Mathematics of Operations Research*, Vol. 23, No. 4, pp. 769–805 (1998)
- [4] J. F. Bonnans and H. Ramírez: Perturbation analysis of second-order cone programming problems; *Mathematical Programming*, Vol. 104, No. 2, pp. 205–227 (2005)
- [5] 福島: 非線形最適化の基礎, 朝倉書店 (2001)
- [6] M. Fukushima, Z. Q. Luo and J. S. Pang: A globally convergent sequential quadratic programming algorithm for mathematical programs with linear complementarity constraints; *Computational Optimization and Applications*, Vol. 10, No. 1, pp. 5–34 (1998)
- [7] M. Fukushima and J. S. Pang: Convergence of a smoothing continuation method for mathematical programs with complementarity constraints; *Ill-posed Variational Problems and Regularization Techniques*, M. Théra, R. Tichatschke (eds), Springer, pp. 99–110 (1999)
- [8] H. Kato and M. Fukushima: An SQP-type algorithm for nonlinear second-order cone programs; *Optimization*

- tion Letters, Vol. 1, No. 2, pp. 129–144 (2007)
- [9] R. H. Tütüncü, K. C. Toh and M. J. Todd: Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3; *Mathematical Programming*, Vol. 95, No. 2, pp. 189–217 (2003)
- [10] Z. Q. Luo, J. S. Pang and D. Ralph: *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press (1996)
- [11] 尾添, 田中, 福島: リコース付き確率混合整数計画法によるスマートハウスの運用最適化; 電学論 B, Vol. 131, No. 11, pp. 885–895 (2011)
- [12] M. A. A. Pedrasa, T. D. Spooner and I. F. MacGill: Coordinated scheduling of residential distributed energy resources to optimize smart home energy services; *IEEE Transactions on Smart Grid*, Vol. 1, No. 2, pp. 134–142 (2010)
- [13] H. Scheel and S. Scholtes: Mathematical programs with complementarity constraints: stationarity, optimality, and sensitivity; *Mathematics of Operations Research*, Vol. 25, No. 1, pp. 1–22 (2000)
- [14] 経済産業省: 平成 21 年度スマートハウス実証プロジェクト報告書 (2010)

付 録

定理 1 の証明

添字集合 $\bar{\beta}$ の任意の分割 $\bar{\beta}_1 \cup \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}$, $\bar{\beta}_1 \cap \bar{\beta}_2 = \emptyset$ に対して, 問題 P の限定問題 $Q(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} Q(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2): \min & f(x, y, z) \\ \text{s.t. } & (x, y, z) \in R^n \times R^m \times R^m \\ & y_i = 0, z_i \geq 0, i \in \bar{\alpha} \\ & y_i = 0, z_i \geq 0, i \in \bar{\beta}_1 \\ & y_i \geq 0, z_i = 0, i \in \bar{\beta}_2 \\ & y_i \geq 0, z_i = 0, i \in \bar{\gamma} \\ & g_j(x, y, z) = 0, j = 1, \dots, p \\ & h_l(x, y, z) \in K^q, l = 1, \dots, s \end{aligned}$$

問題 $Q(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ は相補性制約を含まない通常非線形 2 次錐計画問題である. 添字集合 $\bar{\beta}$ の分割全体の集合を

$$\mathcal{P}(\bar{\beta}) = \{(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \mid \bar{\beta}_1 \cup \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}, \bar{\beta}_1 \cap \bar{\beta}_2 = \emptyset\}$$

と表す. 問題 P の実行可能領域を S とし, 問題 $Q(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ の実行可能領域を $S(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ とすると, 十分小さい任意の $r > 0$ に対して,

$$S \cap B(\bar{w}, r) = \bigcup_{(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \in \mathcal{P}(\bar{\beta})} (S(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \cap B(\bar{w}, r))$$

が成り立つ. なお, $B(\bar{w}, r) = \{w \in R^N \mid \|w - \bar{w}\| \leq r\}$ は $\bar{w}$ を中心とする半径 $r > 0$ の球を表す. ここで点 $\bar{w}$ における接錐は $\bar{w}$ の近傍の集合の形によって定まるので,

$$T_S(\bar{w}) = \bigcup_{(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \in \mathcal{P}(\bar{\beta})} T_{S(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)}(\bar{w})$$

と表せる.

一方, 緩和問題 $R(\bar{w})$ の実行可能集合を S_R とすると, 十分小さい任意の $r > 0$ に対して,

$$S \cap B(\bar{w}, r) \subseteq S_R \cap B(\bar{w}, r)$$

が成立する. 以上より,

$$\bigcup_{(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \in \mathcal{P}(\bar{\beta})} T_{S(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)}(\bar{w}) = T_S(\bar{w}) \subseteq T_{S_R}(\bar{w})$$

となるので, 法線錐の間には

$$N_{S_R}(\bar{w}) \subseteq N_S(\bar{w}) = \bigcap_{(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \in \mathcal{P}(\bar{\beta})} N_{S(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)}(\bar{w}) \quad (\text{A1})$$

の関係が成立する. よって, $-\nabla f(\bar{w}) \in N_{S_R}(\bar{w})$ のとき, $-\nabla f(\bar{w}) \in N_S(\bar{w})$ となる. すなわち, $\bar{w}$ が問題 $R(\bar{w})$ の B-停留点ならば, $\bar{w}$ は問題 P の B-停留点である. 問題 $R(\bar{w})$ は通常非線形 2 次錐計画問題であるから, $\bar{w}$ が問題 $R(\bar{w})$ の KKT 条件を満たすならば, $\bar{w}$ は $R(\bar{w})$ の B-停留点であり, さらに P の B-停留点である. よって, 定理の前半が示された.

(A1) 式より, $\bar{w}$ が任意の分割 $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ に対する限定問題 $Q(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ の B-停留点であることと問題 P の B-停留点であることは等価である. また, MPCC-NCQ が点 $\bar{w}$ において成立しているならば, $\bar{w}$ が問題 $R(\bar{w})$ の KKT 条件を満たすことと B-停留点であることは等価である. よって, 定理の後半を示すには, $\bar{w}$ が任意の分割に対する限定問題 $Q(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ の KKT 条件を満たすことと, $\bar{w}$ が緩和問題 $R(\bar{w})$ の KKT 条件を満たすことが等価であることを示せばよい. ここで, $\bar{w}$ が問題 $Q(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ の KKT 条件を満たすとは, 次式を満たすラグランジュ乗数 $(\xi, \eta, \lambda, \nu)$ が存在することである.

$$\nabla_x f(\bar{w}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla_x g_j(\bar{w}) - \sum_{l=1}^s \nabla_x h_l(\bar{w}) \nu_l = 0 \quad (\text{A2})$$

$$\nabla_y f(\bar{w}) - \xi + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla_y g_j(\bar{w}) - \sum_{l=1}^s \nabla_y h_l(\bar{w}) \nu_l = 0 \quad (\text{A3})$$

$$\nabla_z f(\bar{w}) - \eta + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla_z g_j(\bar{w}) - \sum_{l=1}^s \nabla_z h_l(\bar{w}) \nu_l = 0 \quad (\text{A4})$$

$$\xi_i = 0, i \in \bar{\gamma} \quad (\text{A5})$$

$$\xi_i \geq 0, i \in \bar{\beta}_2 \quad (\text{A6})$$

$$\eta_i \geq 0, i \in \bar{\beta}_1 \quad (\text{A7})$$

$$\eta_i = 0, i \in \bar{\alpha} \quad (\text{A8})$$

$$g_j(\bar{w}) = 0, j = 1, \dots, p \quad (\text{A9})$$

$$\nu_l \in K^q, h_l(\bar{w}) \in K^q, \nu_l^T h_l(\bar{w}) = 0, l = 1, \dots, s \quad (\text{A10})$$

点 $\bar{w}$ が問題 $R(\bar{w})$ の KKT 条件を満たすとき、任意の分割 $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ に対して問題 $Q(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ の KKT 条件を満たすことは、それぞれの KKT 条件の (1)–(8) 式と (A2)–(A10) 式の比較より明らかである。次に逆を示す。 $\bar{w}$ が任意の分割に対する $Q(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ の KKT 条件を満たすとする。いま、MPCC-NCQ が成立しているため、(A2)–(A4)、(A10) 式を満たすラグランジュ乗数 $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\lambda}, \bar{\nu})$ は分割によらず一意に定まる。また、 $(\bar{w}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\lambda}, \bar{\nu})$ は任意の分割 $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ に対する KKT 条件 (A2)–(A10) 式を満たすため、すべての $i \in \bar{\beta}$ について $\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i \geq 0$ が成り立つ。よって、 $\bar{w}$ とラグランジュ乗数 $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\lambda}, \bar{\nu})$ は問題 $R(\bar{w})$ の KKT 条件 (1)–(8) を満たす。

定理 2 の証明

各 $i \in \bar{\beta}$ に対して、 $\bar{r}_i$ を $\{\nabla \Phi_i^{\epsilon_k}(w^k)\}$ の任意の集積点とする。 $\{w^k\}$ の漸近的弱非退化性より、すべての $i \in \bar{\beta}$ に対して $(1 - \bar{u}_i)^2 + (1 - \bar{v}_i)^2 \leq 1$ を満たす $\bar{u}_i > 0, \bar{v}_i > 0$ が存在して

$$\bar{r}_i = \bar{u}_i e_{n+i} + \bar{v}_i e_{n+m+i}$$

と書ける。一方、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla \Phi_i^{\epsilon_k}(w^k) &= e_{n+i}, \quad i \in \bar{\alpha} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla \Phi_i^{\epsilon_k}(w^k) &= e_{n+m+i}, \quad i \in \bar{\gamma} \end{aligned}$$

であるから、問題 $N(\epsilon_k)$ の KKT 条件 (12)–(17) 式において (w^k, π^k) とおき、極限を考えることにより、

$$\begin{aligned} \nabla_x f(\bar{w}) + \sum_{j=1}^p \bar{\lambda}_j \nabla_x g_j(\bar{w}) - \sum_{l=1}^s \nabla_x h_l(\bar{w}) \bar{\nu}_l &= 0 \\ \nabla_y f(\bar{w}) - \sum_{i \in \bar{\alpha}} \bar{\mu}_i e_i^{(m)} - \sum_{i \in \bar{\beta}} \bar{\mu}_i \bar{u}_i e_i^{(m)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \bar{\lambda}_j \nabla_y g_j(\bar{w}) - \sum_{l=1}^s \nabla_y h_l(\bar{w}) \bar{\nu}_l = 0 \\ \nabla_z f(\bar{w}) - \sum_{i \in \bar{\gamma}} \bar{\mu}_i e_i^{(m)} - \sum_{i \in \bar{\beta}} \bar{\mu}_i \bar{v}_i e_i^{(m)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \bar{\lambda}_j \nabla_z g_j(\bar{w}) - \sum_{l=1}^s \nabla_z h_l(\bar{w}) \bar{\nu}_l = 0 \end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$\bar{\xi}_i \equiv \bar{\mu}_i \bar{u}_i \geq 0, \quad i \in \bar{\beta} \quad (\text{A11})$$

$$\bar{\eta}_i \equiv \bar{\mu}_i \bar{v}_i \geq 0, \quad i \in \bar{\beta} \quad (\text{A12})$$

を示せば、集積点 $\bar{w}$ が問題 $R(\bar{w})$ の KKT 条件 (1)–(8) 式を満たすことがいえる。これを背理法で示す。

ある $i' \in \bar{\beta}$ に対し $\bar{\xi}_{i'} < 0$ であると仮定する。そのとき漸近的弱非退化性の仮定より $\bar{u}_{i'}, \bar{v}_{i'} > 0$ であるから、(A11) 式より $\bar{\mu}_{i'} < 0$ であり、さらに (A12) 式より $\bar{\eta}_{i'} < 0$ となる。ここで、次式を満たすようなベクトル $d^k \in R^N$, $\|d^k\| = 1$ を選ぶ。

$$\begin{aligned} (d^k)_{n+i} &= 0, \quad i \in \bar{\alpha} \cup \bar{\beta} \setminus \{i'\} \\ (d^k)_{n+m+i} &= 0, \quad i \in \bar{\gamma} \cup \bar{\beta} \setminus \{i'\} \\ (d^k)_{n+i'} &= \frac{\partial}{\partial b} \phi^{\epsilon_k}(y_{i'}, z_{i'}^k) \\ (d^k)_{n+m+i'} &= -\frac{\partial}{\partial a} \phi^{\epsilon_k}(y_{i'}, z_{i'}^k) \\ \nabla g_j(w^k)^T d^k &= 0, \quad j = 1, \dots, p \\ \nabla h_l(w^k)^T d^k &= 0, \quad l: h_l(w^k) = 0 \\ \left(-\nabla h_{l_0}(w^k) + \frac{\nabla h_{l_0}(w^k) \bar{h}_{l_0}(w^k)}{\|\bar{h}_{l_0}(w^k)\|} \right)^T d^k &= 0, \\ l: h_{l_0}(w^k) &= \|\bar{h}_{l_0}(w^k)\| \neq 0 \end{aligned}$$

k が十分大きいとき、 $\bar{w}$ において MPCC-NCQ が成立しているため、上式を満たす d^k が存在することは保証される。また、 $d^k \in C^\epsilon$ であることも確かめられる。以降は [7] の Theorem 3.1 の証明と同様の議論を行うことにより、(A11), (A12) 式がいえる。よって、 $\bar{w}$ は問題 $R(\bar{w})$ の KKT 条件を満たす。さらに定理 1 より、 $\bar{w}$ は問題 P の B-停留点である。

著者略歴

たかす けいすけ
高須 啓介

1987年2月2日、奈良県生駒市生。2010年3月京都大学工学部情報学科卒業、2012年3月京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻修士課程修了。

たなか よういち
田中 洋一 (正会員)

1973年8月15日生。1999年3月早稲田大学大学院理工学研究科修士課程修了。同年4月東邦ガス(株)入社。2009年3月京都大学大学院情報学研究科博士後期課程修了。おもに、エネルギーシステムに関する研究開発に従事。

ふくしま まさお
福島 雅夫 (正会員)

京都大学大学院工学研究科修士課程修了。三菱化成工業(株)勤務、京都大学工学部助手、講師、助教授、奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科教授を経て、1996年京都大学大学院工学研究科教授。1998年より同大学院情報学研究科教授となり現在に至る。その間 Waterloo 大学、Namur 大学、New South Wales 大学客員。数理計画、特に非線形計画、変分不等式などに関する研究に従事。工学博士、日本 OR 学会業績賞、日本 OR 学会文献賞、システム制御情報学会論文賞受賞。日本 OR 学会、MOS、INFORMS、SIAM 各会員。ISI Highly Cited Researcher。