ロバスト UKF とそのパラメータ設計手法*

金田 泰昌^{†‡}・入月 康晴[‡]・山北 昌毅[†]

Robust UKF and Design Method of Its Parameters*

Yasuaki KANEDA^{†‡}, Yasuharu IRIZUKI[‡] and Masaki YAMAKITA[†]

1. はじめに

近年, 超音波センサやレーダ計測, 画像計測といった非接触型の計測手法を用いたシステムが注目を集めているが, これらの計測方法は外界の影響により外れ値が生じることが知られている. そして, これらの外れ値は状態推定精度や制御性能に悪影響を及ぼす.

外れ値の除去手法として, ロバストカルマンフィルタ(RKF)とよばれる, 非ガウスノイズに対応したカルマンフィルタがこれまでに提案されている. その中でも近年, l_1 正則化を用いた RKF が注目されている [1–3]. l_1 正則化はあるしきい値に従ってスパースな解を与える手法であり, 外れ値をスパースな解と見なすことでしきい値処理をすることができる. 文献 [1] では線形 RKF が提案されており, 文献 [2] ではそのパラメータ設計手法が提案されている. また, 文献 [3] では, l_1 ラプラス事前分布を用いた最大事後確率推定 (MAP 推定) を解くことで, 非線形ロバストフィルタを実現している.

本論文では, 文献 [1,2] を UKF [4] に拡張することで非線形 RKF を構築する. そして, そのパラメータ設計手法を提案する. 文献 [3] では状態の共分散行列が更新されず一定であったが, 提案手法を用いることで状態の共分散行列が更新されるという利点がある. また, 最適化問題の次元が低次元化される利点もある.

2. ロバスト UKF とその設計手法

2.1 l_1 正則化を用いたロバスト UKF の概要

l_1 正則化を用いた RKF は, 状態の更新則として以下の最適化問題を解く手法である [1,2].

$$\begin{aligned} \min_{x_k, z_k} & v_k^T R^{-1} v_k + (x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T P^{-1} (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \\ & + \sum_{i=1}^m \lambda_i |(z_k)_i| \\ \text{subject to} & y_k = h(x_k) + v_k + z_k, \\ & x_k = \hat{x}_{k|k-1} + L(e_k - z_k) \\ & e_k = y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, L はカルマンゲインを表す. また, $v_k \in \mathbb{R}^m$ は時刻 k における観測ガウスノイズを, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ および $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ はそれぞれ状態および観測ガウスノイズ v_k の共分散行列を表す. また, $z_k \in \mathbb{R}^m$ は時刻 k における外れ値を表し, (1) 式の解として与えられる. λ_i は正則化パラメータであり, 通常対象に合わせて試行錯誤的に決める必要がある.

更新則 (1) 式において, カルマンゲイン L の計算を UKF [4] で行ったものがロバスト UKF (RUKF) である.

2.2 RUKF のパラメータ設計手法

いま, 外れ値 z_k が次式で表される平均値 0, 共分散行列 R_l の l_1 ラプラス分布に従うと仮定する.

$$p_{z_k}(z_k) = \det(2R_l)^{-1/2} \exp \left[-\sqrt{2} \left\| R_l^{-1/2} z_k \right\|_1 \right]$$

この l_1 ラプラス分布を事前分布としたときの MAP 推定を考えると, MAP 推定から得られる最適化問題の構造の中に l_1 正則化項が現れる [3]. この性質を利用し, MAP 推定の枠組みから RKF を再導出する.

ベイズの公式より, 観測値 y_k が与えられたときの x_k の事後確率分布 $p(x_k|y_k)$ は次式で与えられる.

$$p(x_k|y_k) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k)}{p(y_k)} \propto p(y_k|x_k)p(x_k) \quad (2)$$

UKF の問題設定の仮定より, x_k は近似的に平均 $\hat{x}_{k|k-1}$, 共分散行列 P の正規分布 $p_{x_k}(x_k)$ に従う. また, 出力方程式が次式で非線形方程式で与えられるとする.

$$y_k = h(x_k) + v_k + z_k \quad (3)$$

ただし, v_k は平均 0, 共分散行列 R の観測ガウス分布 $p_{v_k}(v_k)$ に従う. v_k と z_k は互いに独立であると仮定すると, 状態 x_k が与えられたときの条件付き確率密度関数

* 原稿受付 2012 年 12 月 5 日

[†] 東京工業大学 大学院 理工学研究科 Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology; 2-12-1, Ohokayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, JAPAN

[‡] 東京都立産業技術研究センター Tokyo Metropolitan Industrial Technology Research Institute; 2-4-10, Aomi, Koutou-ku, Tokyo 135-0064, JAPAN

Key Words: robust Kalman filter, UKF, regularization parameter design, l_1 Laplace distribution.

$p(y_k|x_k)$ は、以下の畳み込み積分で与えられる．

$$p(y_k|x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{z_k}(h(x_k) - y_k - v_k) p_{v_k}(v_k) dv_k$$

よって、

$$p(y_k|x_k) p_{x_k}(x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{z_k}(h(x_k) - y_k - v_k) p_{v_k}(v_k) p_{x_k}(x_k) dv_k \quad (4)$$

また、確率密度関数は常に正である．そのため、(2) 式を最大化することは (4) 式の被積分関数を最大化することと等価である．そして、この最大化問題は次式の最小化問題と等価である．

$$\min_{x_k, z_k} v_k^T R^{-1} v_k + (x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T P^{-1} (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) + 2\sqrt{2} \left\| R_l^{-1/2} z_k \right\|_1 \quad (5)$$

一方、 $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ とすると、(1) 式を次式のよう書き直すことができる．

$$\min_{x_k, z_k} v_k^T R^{-1} v_k + (x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T P^{-1} (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) + \|Az_k\|_1 \quad (6)$$

よって、(5)、(6) 式を比較すると、(6) 式は l_1 ラプラス分布の共分散行列 R_l の対角成分のみを考慮した MAP 推定とみなすことができる．したがって、 $R_l^{-1/2}$ の対角成分を r_i とすると、正規化パラメータは次式で与えられる．

$$\lambda_i = 2\sqrt{2}r_i \quad (7)$$

これは、 l_1 ラプラス分布の共分散行列 R_l が推定できれば、正規化パラメータが自動的に決まることを意味する．

R_l の最も簡単な推定方法は、出力のサンプル点から出力の共分散行列を計算する方法である．そこで、本研究ではシグマポイントを用いて R_l を推定する．すなわち、

$$R_l = R + \sum_{i=0}^{2n} W_i (\mathcal{Y}_i - \hat{y})(\mathcal{Y}_i - \hat{y})^T \quad (8)$$

ただし、 W_i はシグマポイントの重み、 $\mathcal{Y}_i$ はシグマポイントからの推定出力、そして $\hat{y}$ はその平均値である．

(注意 1) 提案手法では l_1 ラプラス分布の共分散行列をシグマポイントを用いて推定し、(7) 式でパラメータを計算する．これは、通常の UKF の設計を行えば RUKF のパラメータが自動的に決定されることを意味する．

(注意 2) 提案手法では UKF と最小化問題を組み合わせることでロバストフィルタを実現している．一方、(5) 式を直接解くことで、UKF を用いずに非線形ロバストフィルタを実現できる．事実、文献 [3] では、MAP 推定から得られた最小化問題を直接解いている．しかしながら、UKF を用いることで、(5) 式内の共分散行列を更新することができる．そのため、提案手法はパラメータ変動に対して適応的になっているといえる．

Fig. 1 Model of a two-link manipulator

(注意 3) 提案手法では最小分散推定値が $x_k = \hat{x}_{k|k-1} + L(e_k - z_k)$ の形として与えられるという事実から、これを x_k に関する拘束条件として用いている．そのため、(1) 式は実際には z_k のみに関する最小化問題となる．つまり、(5) 式を直接解く手法に比べ、提案手法の最小化問題は状態の数だけ低次元化されていることになる．

3. 数値シミュレーション

3.1 モデル

Fig. 1 に示した 2 リンクマニピュレータの状態推定問題を考える．いま、一般化座標を $q = [\theta_1, \theta_2]^T$ とし、質量中心はリンク先端にあるとする．また、慣性モーメントおよびリンクの粘性はゼロとする．このとき 2 リンクマニピュレータの動特性は次式で与えられる．

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau \quad (9)$$

ただし、

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} \alpha + \gamma + 2\beta \sin \theta_2 & \gamma + \beta \sin \theta_2 \\ \gamma + \beta \sin \theta_2 & \gamma \end{bmatrix}, \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} \beta(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & -\beta\dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}^T, \\ G(q) &= \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 + m_2 gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}, \\ \alpha &= m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2, \quad \beta = m_2 l_1 l_2, \quad \gamma = m_2 l_2^2 \end{aligned}$$

また、出力は手先の x, y 座標とする．すなわち、

$$y = \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (10)$$

モデルのパラメータは、 $l_1 = 1.0$ 、 $l_2 = 2.0$ 、 $m_1 = 0.5$ 、 $m_2 = 0.5$ である．また、初期値は $x_0 = [1.4, 0, 0, 0]^T$ であり、各リンクの入力はゼロとする．

観測ガウスノイズのパラメータは以下の通りである．

$$E[v] = 0, \quad E[vv^T] = 0.25I$$

ここで、 I は単位行列を表す．また、ごくまれにセンサに異常値が混入する場合を考え、外れ値のモデルは裾の広い分布を持つコーシー分布を仮定する．コーシー分布の確率密度関数は次式で表され、インパルス的なセンサノイズを表す際にしばしば用いられる [5]．

Fig. 2 Measurements of position outputs

Table 1 Mean squared error of estimates

	θ_1	θ_2	$\dot{\theta}_1$	$\dot{\theta}_2$
UKF	2.36×10^{-1}	6.76×10^{-1}	21.1	57.7
robust filter	9.98×10^{-1}	9.92×10^{-1}	19.4	34.8
RUKF	3.97×10^{-2}	1.23×10^{-1}	2.13	6.32

$$p_c(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (x - x_0)^2}$$

ただし, $x_0 = 0$, $\delta = 1.0 \times 10^{-2}$ とする.

UKF および RUKF に用いる観測ノイズの共分散行列は既知とし, 他のパラメータは以下のように設定する.

$$P_{0|0} = 10I, \quad Q = 10^{-4}, \quad \kappa = 1$$

3.2 結果

Fig. 2 に観測値を, Fig. 3 および Fig. 4 に UKF および RUKF による推定結果を示す. また, Table 1 に推定結果の二乗平均誤差を示す. なお, 表の値は各シミュレーションを 10 回行ったときの平均値を示す. さらに, Table 1 では文献 [3] のロバストフィルタの結果も合わせて示している. これらの結果より, UKF は外れ値を完全に除去できず, 推定結果に外れ値の影響が生じていることがわかる. また, 文献 [3] のロバストフィルタは推定値に突発的な誤差は生じないものの, 推定値との誤差は大きくなっている. 一方, RUKF は外れ値を除去し, 最も誤差が少ないことがわかる.

4. おわりに

本研究では, l_1 正則化を UKF に適用することで外れ値にロバストな UKF を提案した. また, そのパラメータ設計問題が l_1 ラプラス分布の共分散推定問題に帰着できることを示し, シグマポイントを用いて推定した. そして, これらの有効性を数値シミュレーションで示した.

謝 辞

本研究は科学研究費助成事業基盤研究 (B) 24360166 から研究費の一部の支援を得ました. ここに感謝の意を表します.

参 考 文 献

- [1] J. Mattingley and S. Boyd: Real-time convex optimization in signal processing – Recent advances that

Fig. 3 Estimates using UKF. The solid lines are true signals and dashed lines are estimates.

Fig. 4 Estimates using RUKF. The solid lines are true signals and dashed lines are estimates.

make it easier to design and implement algorithms –; *IEEE Signal Processing Magazine* (2010)

- [2] Y. Kaneda, et al.: Design method of robust Kalman filter via l_1 regression and its application for vehicle control with outliers; *Proc. of IECON*, pp. 2210–2215 (2012)
- [3] A. Y. Aravkin, et al.: An l_1 -laplace robust Kalman smoother; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 56, No. 12, pp. 2898–2911 (2011)
- [4] S. Julier, et al.: A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 45, No. 3, pp. 477–482 (2000)
- [5] M. Idan and J. L. Speyer: Cauchy estimation for linear scalar system; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 55, No. 6, pp. 1329–1342 (2010)