未来の目標値を利用した多入出力離散時間 フィードバック誤差学習*

野口 慎†

MIMO Discrete Time Feedback Error Learning by Means of the Desired Value of the Future*

Makoto NOGUCHI†

This paper proposes an improved learning scheme for DTFEL (Discrete time feedback error learning). Although conventional DTFEL schemes based on the gradient method are easily implemented, these schemes are applied to only SISO systems and have drawbacks that assumptions of positive realness and PE condition for the convergence of the tracking error are required. Also, a class of feedforward (FF) controller is confined to biproper case, and the prefilter parameters, which is known, have to be learned as well as the plant parameters. On the other hand, the proposed scheme can relax two assumptions above, be applied to MIMO systems and improve the problems of both degree-of-freedom and redundancy of FF controller by using the desired value of the future. The paper verifies its effectiveness in terms of simulation.

1. はじめに

フィードバック誤差学習 (Feedback Error Learning: FEL) は, Kawato ら [1] によって提案された生体の運動制御における学習モデルである. FEL に基づく 2 自由度制御系の設計では, プラントの特性は未知でもよいが, フィードバック (FB) 制御器によって閉ループ系が安定化されているという仮定のもと, 学習型フィードフォワード (FF) 制御器を FB 誤差信号を用いて調整し, 追従性能を改善する. FEL では閉ループの安定性を仮定することから, FB 制御器を調整しながら系の安定化を達成する既存の適応制御と比較し, 過渡特性や安定性の面で大きな効果をもたらすものと期待できる.

Miyamura ら [2] がはじめて SISO (Single-Input Single-Output) 系に対する FEL を線形制御器の形で提案し, 正実性の仮定やある種の近似のもとで, 学習の収束性を解析した. また, Alali ら [4] はその手法を MIMO (Multi-Input Multi-Output) 系へ拡張した. さらに, 著

者ら [9] はプレフィルタの状態変数を FF 制御信号にも利用するプレフィルタ統合型 FEL (Prefilter-Integration-Type FEL :PIT-FEL) を提案し, FF 制御器が (既知の) プレフィルタの係数も一緒に学習してしまうという冗長性を改善した. これらとは別に, Muramatsu ら [3] は, 未知パラメータに対して線形となる誤差モデルを導き, 正実性の仮定やある種の近似によらずとも, PE (Persistently Exciting) 条件を満たすという仮定のもとで収束を保証できる学習則を導いた. さらに, 著者ら [10] は PIT-FEL において, 文献 [3] の手法を MIMO 系に拡張した. しかしながら, 上記の先行研究においては必ずしも, 実装を考慮しているわけではない.

その一方で, デジタルコントローラへの実装を考慮した離散時間フィードバック誤差学習 (Discrete Time FEL: DTFEL) [14–16] がある. ここで, DTFEL [15,16] はそれぞれ, FEL [2,3] を離散時間で議論したものに対応しており, 理論的な視点から大変重要な成果であるといえるが, DTFEL [15,16] には, 次のような課題がある.

- (1) MIMO 系に対して適用できない.
- (2) FF 制御器の設計の自由度をパイプロバなクラスに限定せざるを得なかったことから, プレフィルタを利用している. そのため (規範モデルとしての) プレフィルタの設計が必要となり, 目標値を直接与えることもできない. また, そのような構成で

* 原稿受付 2012 年 10 月 19 日

† 宇部工業高等専門学校 制御情報工学科 Department of Intelligent System Engineering, Ube National College of Technology (UNCT); Tokiwadai, Ube City, Yamaguchi 755-8555, JAPAN

Key Words: Feedback Error Learning (FEL), strictly proper plant, Multi-Input Multi-Output (MIMO) discrete time system, feedforward control.

あるため、FF制御器が(既知の)プレフィルタの係数をも冗長に学習を行わなければならない。

- (3) 誤差信号 $e(i)$ の収束のために、文献[15]では正実性の仮定が、また、文献[16]ではPE条件を満たすという仮定が必要である。

本論文では、まず、従来のDTFEL[15]のMIMO化を行うとともにFF制御器の設計の自由度を拡張し、また、学習パラメータの冗長性も改善する。設計の自由度や冗長性の問題点を改善するためには、未来の目標値を利用した学習型FF制御器を導入する。これは、PIT-FELにおけるFF制御器[11]の離散時間系としての別表現である。提案法では、結果的にプレフィルタを消去することができることから、制御系を構成するうえでの見通しがよくなるとともに、目標値の設計とFF制御器の設計を分離して扱うことができるという利点を持つ。つぎに、Alaliら[4]の学習則のアナロジーから離散時間版の学習則を導く。さらに、学習パラメータが最適値の近傍であるとの仮定のもと、誤差信号 $e(i)$ の収束性について解析する。すなわち、 $e(i)$ の収束に対して、PE条件を満たすという仮定を緩和でき、また、正実性の仮定をも必要としないことを示す。最後に、シミュレーションによって、本手法の有効性を検討する。

本論文の構成は次の通りである。2.では従来のDTFELの基本や問題点を説明した後、問題の定式化を行う。3.では提案法について、すなわち、学習型FF制御器の構成およびその学習則について説明する。4.では、学習則の収束性について検討を行う。5.では、シミュレーションにより本手法を検証する。

以下では、 m 次の単位行列は I_m と表すが、文脈から明らかなときは省略する場合もある。多項式 $\ell(z)$ がHurwitzであるとは、その零点が安定領域 $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ にのみ存在するときをいう。また、行列 A, B のKronecker積を $A \otimes B$ で表す。FF制御器の実際の構成は時変系となるが、各時刻における動特性を表すためにパルス伝達行列など時不変系の用語を流用する。

2. 準備

2.1 従来のDTFELと問題点

まず、従来の離散時間フィードバック誤差学習(Discrete Time FEL: DTFEL)[15,16]の構成をFig. 1に示す。

Fig. 1 Conventional DTFEL scheme

ここで、 $P(z)$ は未知のプラント、 $r(i)$ は外生信号、

$w(i)$ はプレフィルタ $W(z)$ の出力、 $Q_\theta(z)$ は調整パラメータ θ を含むFF制御器、である。また、閉ループ系はFB制御器 $K_{fb}(z)$ によって安定化されているが、目標値追従特性は十分でないと仮定している。

従来のDTFELの制御目的は、 $y(i)$ が $w(i)$ に追従するように入力信号 $u(i)$ を加えることである。そのため、FF制御器 $Q_\theta(z)$ を接続し、フィードバック誤差 $e(i)$ (もしくは $u_{fb}(i)$) に基づいて θ を調整することにより改善を図っていた。

しかしながら、従来のDTFEL[15,16]においては以下のような問題がある。

- (1) 従来のDTFELでは、SISO系に対してのみ議論がなされており、MIMO系に対する議論がなされていない(行列の積は非可換であるため、MIMO系に対する議論は決して自明ではない)。
- (2) DTFELでは、学習型FF制御器の設計の自由度をバイプロパなクラスに限定せざるを得なかったことから、プレフィルタが利用されている。つまり、プレフィルタはFF制御器がインプロパになるのを避けるために必要とされる。そのため(規範モデルとしての)プレフィルタの設計が必要となる。また、実際の目標値は外生信号をプレフィルタに通すことによって生成しており、目標値そのものを直接与えることはできない。さらに、プレフィルタをDTFEL制御系の構成要素としてもっているため、FF制御器が(既知の)プレフィルタ $W(z)$ の係数をも未知として一緒に学習をしてしまうという冗長性がある。
- (3) 誤差信号 $e(i)$ の収束のために、文献[15]では離散時間版の正実性の仮定が、文献[16]では離散時間版のPE条件を満たすという仮定(補足1を参照)が必要である。

【補足1】 手法[15]を改良したDTFEL[16]では、線形誤差モデル $\epsilon(i)$ ($e(i)$ の関数)を導入することで、離散時間版の正実性の仮定を除去することに成功している。しかしながら、 $\epsilon(i) \rightarrow 0$ からある種の逆システムを介して $e(i) \rightarrow 0$ を示していたため、この逆システムが安定となるとは限らない。ゆえに、文献[10]の議論と同様に、学習パラメータの真値への収束を保証しなければならず、離散時間版のPE条件を満たすという仮定が必要であった。

ゆえに、従来のDTFELにおいては、MIMO化、FF制御器の自由度の拡張、冗長性の改善、正実性の仮定の除去およびPE条件を満たすという仮定の緩和、が必要であると考えられる。

2.2 問題の定式化

本論文の目的は、上記(1)~(3)の問題点を解決するため従来のDTFELを改良することである。そのため、新しくFig. 2のような構成、すなわち、多入出力離

散時間フィードバック誤差学習 (MIMO-Discrete Time FEL : MIMO - DTFEL) を提案する。

Fig. 2 Proposed MIMO-DTFEL scheme

ここで、 $P(z)$ は行相対次数の最大値が $\bar{\rho}$ である未知のプラント (行相対次数については、定義 1 を参照)、 $w(i)$ は目標値、 $w(i+d) = z^d w(i)$ ($d=1, \dots, \bar{\rho}$) は未来の目標値¹、 $u(i)$ と $y(i)$ はプラントの入力および出力信号、 $e(i)$ は誤差信号、 $Q_\theta(z)$ は調整パラメータ θ を含む FF 制御器、 $u_{ff}(i)$ は $Q_\theta(z)$ からの出力信号、 $K_{fb}(z)$ (ここに $\det K_{fb}(z) \neq 0$) は閉ループ系を安定化するフィードバック (FB) 制御器で、 $u_{fb}(i)$ はその出力信号を表している。これらの信号はすべて、 m 次元ベクトル値をとる離散時間関数であるとする。

本論文を通じて、以下の仮定 (A1 ~ A3) をおく。

A1 $P(z)$ は正方 ($m \times m$) な多入出力線形時不変系

$$P(z) = (A, B, C) \quad (1)$$

であり、 n 次の最小実現である。行列 A, B, C は未知とする。

A2 $P(z)$ は安定でなくてもよいが [10]、最小位相、つまり、

$$\det \begin{bmatrix} A - zI & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \text{ for all } |z| \geq 1 \quad (2)$$

が成立する。

いま、 $P(z)$ が厳密にプロパなので、相対次数の扱いが重要となる。MIMO 系における相対次数の概念は次のように定義される [4]。

【定義 1】[10] 行列 C の行ベクトル c_k ($k=1, \dots, m$) に対して、

$$c_k A^{\rho_k-1} B \neq 0, \quad \rho_k \geq 1, \quad (k=1, \dots, m) \quad (3)$$

を満たす最小の整数 ρ_k を求める。 $\rho_1, \dots, \rho_m$ はパルス伝達行列 $P(z)$ の第 k 行における最小の相対次数であり、“行相対次数” とよばれる (SISO 系では通常の相対次数に一致)。

A3 上記の $\rho_1, \dots, \rho_m$ は既知であり、次の行列

¹ただし、片側 Z 変換 [8] で $w(i+d) = z^d w(i)$, ($i=0, \dots, d=1, \dots, \bar{\rho}$) を成立させるために、 $w(i)=0$, ($i=0, \dots, \bar{\rho}-1$) を仮定する。

$$\hat{A} := \begin{bmatrix} c_1 A^{\rho_1-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{\rho_m-1} B \end{bmatrix} \quad (4)$$

は可逆である (非干渉化可能条件)。

なお、(4) 式の可逆性により $P(z)^{-1}$ は存在するがプロパではない。

【定義 2】[10] 行相対次数の和および最大値を

$$\rho = \sum_{k=1}^m \rho_k, \quad \bar{\rho} = \max_{1 \leq k \leq m} \rho_k \quad (5)$$

とそれぞれ定める。

いま、 $P(z)$ が最小位相であることから、

$$P(z)Q(z) = I_m \quad (6)$$

を満たす安定な逆システム $Q(z)$ が存在する。本論文では、このような $Q(z)$ を、FF 制御器の真値とよぶことにする。(6) 式の関係から、 $Q(z)$ は安定インプロパであるが、これは未来の目標値 $w(i+d) = z^d w(i)$, ($d=1, \dots, \bar{\rho}$) を FF 制御器に取り込むことで等価的に達成されるものであり、FF 制御器の構成要素としてインプロパなシステムを実際に使用するわけではない (詳細は後述)。

したがって、Fig. 2 において、 $Q_\theta(z) = Q(z)$ のときは、どのような $w(i)$ に対しても出力誤差が

$$e(i) = w(i) - y(i) \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty) \quad (7)$$

となる。

いま、与えられた FB 制御器 $K_{fb}(z)$ によって系は安定化されているが、目標値追従特性は十分でないと仮定する。そのため、FF 制御器 $Q_\theta(z)$ を接続し、 θ を調整することによって改善を図る。したがって、制御目的は、 $y(i)$ が $w(i)$ に追従するように入力信号 $u(i)$ を加えることである。

以下では、まず、未来の目標値を用いた学習型 FF 制御器の構成を示す。つぎに、学習型 FF 制御器がプラントの逆システムとして動作するよう、Alali ら [4] による連続時間版 FEL の学習則のアナロジーから MIMO-DTFEL の学習則を導く。さらに、学習則の安定性について解析し、シミュレーションによって提案法の有効性を検討する。

3. 提案法

3.1 FF 制御器のパラメータ構成と真値

FF 信号の真値は、(6) 式の関係から、

$$u_0(i) = Q(z)w(i) = P(z)^{-1}w(i) \quad (8)$$

と与えられる。 $P(z)$ が未知であるためフィードバック誤差 $u_{fb}(i)$ を利用して学習パラメータ θ を調整したい。まず、

$$P(z)^{-1} = M(z) + \tilde{R}(z)$$

と分解し [10], $\tilde{R}(z)$ の McMillan 次数を ν とする (ここで, $M(z)$ は多項式行列, $\tilde{R}(z)$ は厳密にプロパな有理式行列である). このとき, 文献 [11] における連続時間系での FF 制御器の導出方法を援用し, 離散時間系としての議論を行うことにより, 以下の補題 1 を獲得できる. そしてこの補題によって, 未来の目標値を利用した FF 制御器の真値を与える. 提案法では, 未来の目標値を用いることにより, 逆システム $P(z)^{-1}$ を直接構成できる.

【補題 1】 ν 次モニック Hurwitz 多項式 $f(z) = z^\nu + f_1 z^{\nu-1} + \dots + f_\nu$ を設定し,

$$A_f = I_m \otimes \bar{A}_f \quad B_f = I_m \otimes \bar{B}_f, \quad (9)$$

$$\bar{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -f_\nu & \dots & -f_2 & -f_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおく. ただし, $\nu := n - \rho$, $A_f \in \mathbf{R}^{\nu m \times \nu m}$, $B_f \in \mathbf{R}^{\nu m \times m}$ である. このとき, 未来の目標値を用いた FF 制御器の真値は, 上記のフィルタ (A_f, B_f) を用いることで,

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(i+1) &= A_f \eta_1(i) + B_f w(i) \\ \eta_2(i+1) &= A_f \eta_2(i) + B_f u_0(i) \\ u_0(i) &= \Theta_0 \eta(i) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\Theta_0 = [F_0, G_0, E_0] \in \mathbf{R}^{m \times \kappa} \quad (11)$$

$$E_0 = [H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}] \quad (12)$$

$$\eta(i) = \begin{bmatrix} \eta_1(i) \\ \eta_2(i) \\ \xi_w(i) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^\kappa, \quad \kappa := (2\nu + \bar{\rho} + 1)m \quad (13)$$

$$\xi_w(i) = \begin{bmatrix} w(i) \\ w(i+1) \\ \vdots \\ w(i+\bar{\rho}) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{\bar{\rho}} \end{bmatrix} \otimes I_m \right) w(i) \quad (14)$$

と構成できる.

つまり, パラメータ $F_0, G_0, H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}$ が存在して, (10) 式の第 3 式が FF 制御器の出力の真値信号 $u_0(i) = Q(z)w(i) = P(z)^{-1}w(i)$ を実現できる.

(証明) まず,

$$V_F(z) := (zI - A_f)^{-1} B_f = G_F(z) \frac{1}{f(z)} \quad (15)$$

$$G_F(z) = I_m \otimes \begin{bmatrix} 1 & z & \dots & z^{\nu-1} \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

を定義する. つぎに, これを (10) 式に利用すると, $w(i)$ から $u_0(i)$ への関係は,

$$u_0(i) = \{I_m - G_0 V_F(z)\}^{-1} \{F_0 V_F(z) + H_0$$

$$+ J_{01}z + \dots + J_{0\bar{\rho}}z^{\bar{\rho}}\} w(i) \quad (17)$$

$$= [\tilde{X}(z)]^{-1} \tilde{Y}(z) w(i) \quad (18)$$

$$:= Q_{\Theta_0}(z) w(i) \quad (19)$$

$$\tilde{X}(z) = [f(z)I_m - G_0 G_F(z)] \quad (20)$$

$$\tilde{Y}(z) = [z^{\bar{\rho}} f(z) J_{0\bar{\rho}} + z^{\bar{\rho}-1} f(z) J_{0(\bar{\rho}-1)} + \dots + z f(z) J_{01} + f(z) H_0 + F_0 G_F(z)] \quad (21)$$

と表される. これが $P(z)^{-1}$ に一致するように, $F_0, G_0, H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}$ を求めればよい. これらのパラメータは, 極零相殺がなければ, SISO 系では, 分母, 分子の係数となる. よって, $w(i)$ から $u_0(i)$ へのパルス伝達行列は $P(z)^{-1}$ に一致し, これは FF 制御器の真値 $Q(z)$ に等しい. $\diamond$

3.2 学習則

パラメータ $F_0, G_0, H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}$ を適切に設定することで, FF 制御器の真値 $Q(z)$ を (18) 式の形式で得ることができる. しかしながら, $P(z)$ は未知となるため, 本節ではパラメータを調整するための学習則を導く. (10) 式では, FF 制御器の出力の真値信号 $u_0(i)$ を使っているが, これは未知なので, 代わりに実際の FF 制御器の出力 $u_{ff}(i)$ を用いると, 実際の FF 制御器 $Q_{\Theta}(z)$ の構成は, 以下ようになる.

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(i+1) &= A_f \xi_1(i) + B_f w(i) \\ \xi_2(i+1) &= A_f \xi_2(i) + B_f u_{ff}(i) \\ u_{ff}(i) &= \Theta(i) \xi(i) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\Theta(i) = [F(i), G(i), E(i)] \in \mathbf{R}^{m \times \kappa} \quad (23)$$

$$E(i) = [H(i), J_1(i), \dots, J_{\bar{\rho}}(i)] \quad (24)$$

$$\xi(i) = \begin{bmatrix} \xi_1(i) \\ \xi_2(i) \\ \xi_w(i) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^\kappa \quad (25)$$

ここで, 学習パラメータ $F_0, G_0, H_0, J_{01}, \dots, J_{0\bar{\rho}}$ を調整可能な係数行列 $F(i), G(i), H(i), J_1(i), \dots, J_{\bar{\rho}}(i)$ に置き換え, 調整パラメータ行列 $\Theta(i)$ としてまとめている. 提案法では, 文献 [9,10] と同様に, $P(z)$ が有限零点を持たない場合 (SISO では分子が定数の場合) には, $\nu = 0$ となり, フィルタ $V_F(z)$ は不要となる.

本論文で採用する学習則は, 誤差関数の瞬時値に対して勾配法を適用することによって導かれる連続時間版 FEL の学習則 [4]

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \alpha u_{fb}(t) \xi^T(t) \quad (26)$$

のアナロジーから次のように導出される. (26) 式の左辺を 1 階の前方差分にて近似すると,

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} \Big|_{t=ih} \cong \frac{\Theta(ih+h) - \Theta(ih)}{h} \quad (27)$$

となる ($h > 0$ は十分に小さいと仮定). ここで, $\Theta(\cdot)$ の

中の h を省略すると,

$$\left. \frac{d\theta(t)}{dt} \right|_{t=ih} \cong \frac{1}{h} \{\theta(i+1) - \theta(i)\} \quad (28)$$

となる．よって，離散時間版の学習則は，

$$\frac{1}{h} \{\theta(i+1) - \theta(i)\} = \alpha u_{fb}(i) \xi^T(i) \quad (29)$$

$$\theta(i+1) - \theta(i) = \tilde{\alpha} u_{fb}(i) \xi^T(i) \quad (30)$$

$$\theta(i+1) = \theta(i) + \tilde{\alpha} u_{fb}(i) \xi^T(i) \quad (31)$$

と求まる．ただし， $\tilde{\alpha} = h\alpha$ とおいている．また，このとき，(30) 式は， $\Delta\theta(i) = \theta(i+1) - \theta(i)$ より，以下のように表される．

$$\Delta\theta(i) = \tilde{\alpha} u_{fb}(i) \xi^T(i) \quad (32)$$

4. 安定性解析

まず，以下を定義する．

【定義3】(離散時間版のPE条件[12]) もしも，ある $\lambda > 0$, $L > 0$ に対して，

$$\lambda_{\min} \left[\sum_{i=i_0}^{i_0+L-1} \phi(i) \phi^T(i) \right] \geq \lambda, \quad \forall i_0 \geq 0 \quad (33)$$

が成立するならば¹，ベクトル信号列

$$\phi(i) = \begin{bmatrix} \phi_1(i) & \phi_2(i) & \cdots & \phi_p(i) \end{bmatrix}^T \quad (34)$$

はPE (Persistently Exciting) 条件を満たすといわれる[12]．ここで， $\lambda_{\min}[M_0]$ は行列 M_0 の最小固有値を表している．

FELの先行研究[2-4]においては，勾配法に基づく学習則の安定性をPE条件を満たすという仮定のもとで保証している．しかしながら，PE条件はしばしば満たされない．そこで，ここでは，PE条件を満たすという仮定を緩める．すなわち，文献[5,6]の考え方を援用し，最適パラメータ近傍において誤差信号 $e(i)$ の指数的な収束がPE条件を満たさない場合でも保証されることを示す．

まず，文献[2,3]と同様に，パラメータ誤差

$$\Psi(i) := \theta_0 - \theta(i) \quad (35)$$

を定義するところから始める．(35) 式の差分は，

$$\begin{aligned} \Delta\Psi(i) &= \Psi(i+1) - \Psi(i) \\ &= (\theta_0 - \theta(i+1)) - (\theta_0 - \theta(i)) \\ &= -\Delta\theta(i) \end{aligned} \quad (36)$$

となる．この(36) 式に(32) 式を代入することで，

$$\Delta\Psi(i) = -\tilde{\alpha} u_{fb}(i) \xi^T(i) \quad (37)$$

となる．Fig. 2 から $u(i) = u_{fb}(i) + u_{ff}(i)$ であり，以下の関係があることがわかる．

$$u_{fb}(i) = u(i) - u_{ff}(i) \quad (38)$$

ここで， $\Psi(i) \cong 0$ より， $u(i) \cong u_0(i)$ と仮定すると，

$$u_{fb}(i) = u_0(i) - u_{ff}(i) \quad (39)$$

となる．さらに，(39) 式に(10) 式と(22) 式のそれぞれ第3式を利用すると，以下の関係を得る(ただし， $\Psi(i) \cong 0$ より， $\theta_0 \eta(i) \cong \theta_0 \xi(i)$ と仮定している)．

$$\begin{aligned} u_{fb}(i) &= u_0(i) - u_{ff}(i) \\ &= \{\theta_0 - \theta(i)\} \xi(i) \end{aligned} \quad (40)$$

この(40) 式に(35) 式を代入することで， $\Psi(i)$ に関する以下のシステムを得る．

$$u_{fb}(i) = \Psi(i) \xi(i) \quad (41)$$

さらに，(37) 式に(41) 式を代入すると以下の関係を得る．

$$\Delta\Psi(i) = -\tilde{\alpha} \Psi(i) \xi(i) \xi^T(i) \quad (42)$$

ここで，(42) 式は，可変の係数 $\xi(i)$ を持った行列変数 $\Psi(i)$ に関する行列差分方程式である．

そして，(42) 式は次のようにも記述できる．

$$\Psi(i+1) = \Psi(i) (I - \tilde{\alpha} \xi(i) \xi^T(i)) \quad (43)$$

さらに，(43) 式の両辺の転置をとると

$$\Psi^T(i+1) = (I - \tilde{\alpha} \xi(i) \xi^T(i)) \Psi^T(i) \quad (44)$$

となる．

以上の準備のもと，以下ではまず，誤差信号 $e(i)$ の有界性について考え，つぎに， $e(i) \rightarrow 0$ の(指数的な)収束について考える．

4.1 誤差信号 $e(i)$ の有界性

いま，Lyapunov 関数を

$$V(i) = \frac{1}{2} \text{tr} [\Psi^T(i) \Psi(i)] \quad (45)$$

とすると，上式の(43) 式に沿った差分 $\Delta V(i)$ は，

$$\Delta V(i) = V(i+1) - V(i) \quad (46)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \text{tr} [\Psi^T(i+1) \Psi(i+1)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} [\Psi^T(i) \Psi(i)] \end{aligned} \quad (47)$$

$$= -\frac{1}{2} \tilde{\alpha} (2 - \tilde{\alpha} \|\xi(i)\|^2) \cdot \|\Psi(i) \xi(i)\|^2 \quad (48)$$

と計算される．ここで，もしも， $(2 - \tilde{\alpha} \|\xi(i)\|^2) \geq 0$ と仮定すると， $\Delta V(i) \leq 0$ となる．このことは， $\Psi(i)$ が有界であることを示している．もしも， $\xi(i)$ が有界であれば，

¹ スカラ不等式(33)を用いたPEの定義は，文献[13]の行列不等式を用いた定義と等価である．

このとき (41) 式を $e(i) = K_{fb}^{-1} u_{fb}(i)$ に代入することで,

$$e(i) = K_{fb}^{-1} \Psi(i) \xi(i) \quad (49)$$

となり, これより誤差 $e(i)$ も有界であることがわかる.

4.2 誤差信号 $e(i)$ の指数的な収束

前項では $e(i)$ が有界であることを示しているのみであり, $e(i) \rightarrow 0$ の (指数的な) 収束を保証しているわけではない. そこで本項では, 最適パラメータの近傍 ($\Psi(i) \cong 0$) において, $e(i) \rightarrow 0$ の指数的な収束を保証できるかどうかについて考える.

いま, 文献 [5,6] に従い, PE 条件を満たさない $\xi(i)$ に対して, 相関行列

$$M = \sum_{i=i_0}^{\infty} \xi(i) \xi^T(i) \geq 0 \quad (50)$$

を定義する ($\xi(i)$ が PE 条件を満たせば定数行列 M は正定となるが, PE 条件を満たさない場合には M は準正定となる). だから, 固有値分解

$$M = R \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^T, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) > 0 \quad (51)$$

が存在する [7]. ここで, R は $\ell \times \ell$ の直交行列, すなわち, $R^T = R^{-1}$ であり, また, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ である. 以上の準備のもと, 文献 [5,6] における連続時間系での解析手法を援用し, 離散時間系として議論を行うことにより, $\xi(i)$ が PE 条件を満たさない条件下での $e(i) \rightarrow 0$ の指数的な収束に関する以下の定理を得る.

【定理 1】 FF 制御器 (22) ~ (25) を設けた MIMO-DTFEL に対して, 学習則 (32) を用いるとき, $\xi \equiv 0$, $e \equiv 0$ でない限り最小の非零固有値 λ_p がいつも存在する. このため相関行列 M に対する固有値分解が存在し, $\Psi(i)$ に関するシステム (41) 式と (42) 式を低次元化できる. そのうえ, 誤差信号 $e(i)$ は指数的に 0 へ収束する. このとき, (32) 式のベクトル $\xi(i)$ は有界であるものとするが, $\xi(i)$ に対する PE 条件は不要である. ただし, 学習率 $\tilde{\alpha}$ は, $0 < \tilde{\alpha} < \frac{2}{\|\xi(i)\|^2}$ を満たしているものとする.

(証明) もしも, $M = 0$ ならば, このとき, (50) 式から $\xi \equiv 0$, さらにこれを (49) 式に代入することで, 誤差 $e \equiv 0$ である. だから, $M \neq 0$ であり, $\lambda_p > 0$ が存在する.

(51) 式に適合するブロックサイズで

$$\rho(i) = R^T \xi(i) \in \mathbf{R}^{\kappa}, \quad \Omega(i) = \Psi(i) R \in \mathbf{R}^{m \times \kappa} \quad (52)$$

$$\rho(i) = \begin{bmatrix} \rho_1(i) \\ \rho_2(i) \end{bmatrix}, \quad \Omega(i) = \begin{bmatrix} \Omega_1(i) & \Omega_2(i) \end{bmatrix} \quad (53)$$

を定義することで, 誤差システム (41) 式は, 以下のよう表される.

$$u_{fb}(i) = \Psi(i) I \xi(i) = \Psi(i) (R R^T) \xi(i)$$

$$= (\Psi(i) R) (R^T \xi(i))$$

$$= \Omega(i) \rho(i) = \begin{bmatrix} \Omega_1(i) & \Omega_2(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1(i) \\ \rho_2(i) \end{bmatrix}$$

$$= \Omega_1(i) \rho_1(i) + \Omega_2(i) \rho_2(i) \quad (54)$$

(51) 式から, $\rho(i)$ の相関行列は, 次のように計算できる.

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \rho(i) \rho^T(i) = \sum_{i=i_0}^{\infty} (R^T \xi(i)) (R^T \xi(i))^T \quad (55)$$

$$= R^T \sum_{i=i_0}^{\infty} \xi(i) \xi^T(i) R \quad (56)$$

$$= R^T M R \quad (57)$$

$$= \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

そして, それは (53) 式から次のことを示している.

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_0}^{\infty} \rho(i) \rho^T(i) &= \sum_{i=i_0}^{\infty} \begin{bmatrix} \rho_1(i) \\ \rho_2(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1^T(i) & \rho_2^T(i) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=i_0}^{\infty} \begin{bmatrix} \rho_1(i) \rho_1^T(i) & \rho_1(i) \rho_2^T(i) \\ \rho_2(i) \rho_1^T(i) & \rho_2(i) \rho_2^T(i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

上式の第 1 行 1 列ブロックを比較すると,

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \rho_1(i) \rho_1^T(i) = \Lambda > 0 \quad (60)$$

となるため, $\lambda_{\min}[\Lambda] = \lambda_p \geq \lambda > 0$ を満たす λ が存在する. よって, $\rho_1(i)$ が PE 条件を満たすことになる. また, 第 2 行 2 列ブロックを比較すると,

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \rho_2(i) \rho_2^T(i) = 0, \quad \rho_2(i) \equiv 0 \quad (61)$$

であることが示される. (61) 式を (54) 式に代入することで以下を得る.

$$u_{fb}(i) = \Omega_1(i) \rho_1(i) \quad (62)$$

これは, $\rho \rightarrow \rho_1$ へ低次元化したことを示している.

同様の低次元化は, $\Omega(i)$ に対しても次のように行える. R を (42) 式の両辺の右側から掛けることによって, 次の式を得る.

$$\Delta \Psi(i) R = -\tilde{\alpha} \Psi(i) \xi(i) \xi^T(i) R \quad (63)$$

いま,

$$\Delta \Omega(i) = \Omega(i+1) - \Omega(i) \quad (64)$$

$$\Delta \Psi(i) = \Psi(i+1) - \Psi(i) \quad (65)$$

の関係をを用い, (52) 式の第 2 式の差分を求めると,

$$\begin{aligned}
\Delta\Omega(i) &= \Omega(i+1) - \Omega(i) \\
&= \Psi(i+1)R - \Psi(i)R \\
&= \Delta\Psi(i)R
\end{aligned}
\tag{66}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \rho_1^T(i) & \rho_2^T(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1(i) \\ \rho_2(i) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \rho_1^T(i)\rho_1(i) & \rho_2^T(i)\rho_2(i) \end{bmatrix} \equiv \rho_1^T(i)\rho_1(i)
\end{aligned}$$

となるが、これに (63) 式を代入すると、

$$\Delta\Omega(i) = -\tilde{\alpha}\Psi(i)\xi(i)\xi^T(i)R \tag{67}$$

となる．また、これに (41) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
\Delta\Omega(i) &= -\tilde{\alpha}u_{fb}(i)\xi^T(i)R \\
&= -\tilde{\alpha}u_{fb}(i)(R^T\xi(i))^T
\end{aligned}
\tag{68}$$

を得る．さらに、(68) 式に (52) 式の第 1 式を代入すると、

$$\Delta\Omega(i) = -\tilde{\alpha}u_{fb}(i)\rho^T(i) \tag{69}$$

となり、これに (62) 式を代入することで、

$$\Delta\Omega(i) = -\tilde{\alpha}\Omega_1(i)\rho_1(i)\rho^T(i) \tag{70}$$

となる．(70) 式は、(53) 式を使うことで、以下のように分割される．

$$\begin{aligned}
\Delta\Omega(i) &= \begin{bmatrix} \Delta\Omega_1(i) & \Delta\Omega_2(i) \end{bmatrix} \\
&= -\tilde{\alpha}\Omega_1(i)\rho_1(i) \begin{bmatrix} \rho_1^T(i) & \rho_2^T(i) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{71}$$

まず、(71) 式の第 2 列ブロックを取り出すと、

$$\Delta\Omega_2(i) = -\tilde{\alpha}\Omega_1(i)\rho_1(i)\rho_2^T(i) \tag{72}$$

となり、さらにこれに、(61) 式を用いることで、

$$\Delta\Omega_2(i) = -\tilde{\alpha}\Omega_1(i)\rho_1(i) \cdot 0 = 0 \tag{73}$$

を得る．つぎに、(71) 式の第 1 列ブロックを取り出すと、

$$\Delta\Omega_1(i) = -\tilde{\alpha}\Omega_1(i)\rho_1(i)\rho_1^T(i) \tag{74}$$

となり、また、 $\Delta\Omega_1(i) = \Omega_1(i+1) - \Omega_1(i)$ から、(74) 式は別の表現として次のようにも記述できる．

$$\Omega_1(i+1)^T = (I - \tilde{\alpha}\rho_1(i)\rho_1^T(i))\Omega_1(i)^T \tag{75}$$

ここで、文献 [13] の Lemma1 (付録 1 を参照) より、 $\rho_1(i)$ が PE 条件を満たし、かつ、 $\tilde{\alpha}\|\rho_1(i)\|^2 < 2$ であるならば (注意 1 を参照)、行列差分方程式 (75) は指数安定である．

すなわち、 $\Omega_1(i) \rightarrow 0$ である．よって、(62) 式より、 $u_{fb}(i) \rightarrow 0$ である．このことは、 $e(i) = K_{fb}^{-1}u_{fb}(i)$ より、 $e(i)$ の指数的な収束 ($e(i) \rightarrow 0$) を保証する．◇

【注意 1】 条件 $\tilde{\alpha}\|\rho_1(i)\|^2 < 2$ は、 $\tilde{\alpha}\|\xi(i)\|^2 < 2$ が満たされれば成立する．なぜならば、 $\xi(i) = R\rho(i)$ より、

$$\xi^T(i)\xi(i) = \rho^T(i)R^TR\rho(i) = \rho^T(i)\rho(i)$$

と計算でき、 $\|\xi(i)\|^2 = \|\rho_1(i)\|^2$ となるからである．つまり、 $\tilde{\alpha}\|\xi(i)\|^2 = \tilde{\alpha}\|\rho_1(i)\|^2$ であるから、 $\tilde{\alpha}\|\xi(i)\|^2 < 2$ のとき $\tilde{\alpha}\|\rho_1(i)\|^2 < 2$ は満たされる．◇

【注意 2】 学習パラメータが平衡点 ($\theta(i) = \theta_0$) 回りの値であれば (すなわち、近似 $\theta(i) \cong \theta_0$ が成立する範囲であれば)、DTFEL 制御系の局所安定性が保証され、誤差信号 $e(i)$ の指数的な収束の目的に対して、 $\theta(i) \equiv \theta_0$ である必要はない．むしろ、 $\xi(i)$ の partial excitation、すなわち $\rho_1(i)$ の excitation は、 $e(i)$ の指数的な収束のために十分である．また、定理 1 では文献 [15] で要求されていた正実性の仮定を必要としていないこともわかる．◇

5. シミュレーション

本節では、学習パラメータ削減の点から、提案法にて特に有利となる有限零点を持たない MIMO プラントに対するシミュレーションを行う．また、目標値としては、PE 性を満たさない典型的な例である単一周波数の正弦波を用いる．

5.1 MIMO プラント 1 (安定なプラント)

離散時間プラントとして、有限零点が存在しない例

$$\begin{aligned}
P(z) &= \begin{bmatrix} z+0.5 & 0.5z \\ 0.5 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{d(z)} \begin{bmatrix} z+1 & -0.5z \\ -0.5 & z+0.5 \end{bmatrix}, \\
d(z) &= z^2 + 1.25z + 0.5
\end{aligned}$$

を考える．なお、サンプリング周期は $h = 0.001$ [s] であるとする．このとき、 $n = 2$ 、 $\rho_1 = \rho_2 = 1$ 、 $\rho = 2$ 、 $\bar{\rho} = 1$ であり、また、 $n - \rho = 2 - 2 = 0$ であるから、フィルタ $V_F(z)$ は不要となる．このため、現在および 1 ステップ未来の目標値のみによって FF 制御が可能である．ここで FB 制御器としては、 $K_{fb} = \text{diag}[0.25, 0.25]$ を用いる．

いま、PE 性を満たさない典型的な例である正弦波を目標値として与えることを考える．つまり、周期と振幅が異なる 2 種類の正弦波 (連続時間の正弦波をサンプリング周期 $h = 0.001$ で零時ホールドした信号) を利用する．すなわち、本シミュレーションでは、システム $V_g(z)$ ：

$$\begin{aligned}
V_g(z) &:= (A_g, B_g, C_g), \\
A_g &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -f_g^3 & -3f_g^2 & -3f_g \end{bmatrix}, \quad B_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
C_g &= I_3, \quad f_g = 0.0005
\end{aligned}$$

を用いて生成される正弦波状の離散時間信号を目標値として用いる (このシステムを利用することで、最大で 2 ステップ未来の目標値を生成できる)．よって、プラン

トに対する目標値 $w(i)$ および未来の目標値 $w(i+1)$ を,

$$\begin{aligned} w(i) &= [w_1(i), w_2(i)]^T \\ w(i+1) &= [w_1(i+1), w_2(i+1)]^T \\ w(i+2) &= [w_1(i+2), w_2(i+2)]^T \\ [w_1(i), w_1(i+1), w_1(i+2)]^T &= V_g(z)r_1(i) \\ [w_2(i), w_2(i+1), w_2(i+2)]^T &= V_g(z)r_2(i) \\ r_1(i) &= \sin(2\pi(1/5)(ih)) \\ r_2(i) &= 0.8\sin(2\pi(1/4)(ih)) \end{aligned}$$

で与えることとする（次項でも同じ信号発生器を用いるため、 $w(i+2)$ も導入しているが、ここでは $w(i+1)$ までしか用いない）。

はじめに、FB 制御器 K_{fb} のみで閉ループ系を安定化させたときの目標値追従特性（FEL なし）を Fig. 3 に示す。目標値に追従できていないことがわかる。

Fig. 3 Tracking properties without FEL

つぎに、学習型 FF 制御器を接続し、提案法を用いた際の目標値追従誤差を Fig. 4 に示す。このとき、学習パラメータの初期値は $\Theta(0) = 0$ ($\Psi(0) \neq 0$) であり、また、学習率（固定ゲイン）を $\tilde{\alpha} = h\alpha = 0.002$ と設定している。

Fig. 4 Tracking errors by the proposed scheme without the feedforward filter ($\Psi(0) \neq 0$)

提案法における学習パラメータ $\Theta(i)$ の収束を確認しよう。まず、提案の FF 制御器の真値 $Q(z)$ を求める。FF 制御の真値信号 $Q(z)w(i)$ は、

$$\begin{aligned} Q(z)w(i) &= P(z)^{-1}w(i) = \begin{bmatrix} z+0.5 & 0.5z \\ 0.5 & z+1 \end{bmatrix} w(i) \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} w(i) + \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} zw(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} w(i) + \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w(i+1) \\ &= H_0 w(i) + J_{01} w(i+1) \\ &= \begin{bmatrix} H_0 & J_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(i) \\ w(i+1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (76)$$

と計算できる。よって、パラメータの真値が、

$$\Theta_0 = [H_0, J_{01}], \quad H_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と求まる。

つぎに、提案法の上記シミュレーションにおける学習パラメータ $\Theta(i)$ の時間発展を Fig. 5 に示す（各ラインにはそれぞれ 2 種類のデータが重なっていることに注意）。学習パラメータが一定値に収束していることがわかる。

Fig. 5 Time evolution of $\Theta(i)$ by the proposed scheme

学習パラメータ $\Theta(i)$ は確かに収束しているが、真値には収束していない。これは $w(i)$ が正弦波状の離散時間信号のため $\xi(i)$ が PE 条件を満たさないことの帰結である。それにもかかわらず、 $e(i) \rightarrow 0$ となっている。したがって、提案法が非 PE の条件下でも有効に機能していることを確認できる。また、本例題は、定理 1 によっては保証されない $\Psi(0) \neq 0$ の場合であるにもかかわらず、提案法は十分な性能を示していることがわかる。

5.2 MIMO プラント 2 (不安定なプラント)

プラントとして、不安定かつ有限零点が存在しない例

$$P(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.5}{z^2 - 0.5z} & \frac{0.1}{z^2 - 0.5z} \\ \frac{0.2}{z^2 - z} & \frac{0.4}{z^2 - z} \end{bmatrix}$$

を考える。なお、サンプリング周期は $h = 0.001$ [s] であるとする。 $P(z)$ の四つの極は、 $[0, 0, 0.5, 1.0]$ である。このとき、 $n = 4$, $\rho_1 = \rho_2 = 2$, $\rho = 4$, $\bar{\rho} = 2$ であり、また $\nu = n - \rho = 0$ からフィルタ $V_F(z)$ は不要となる。FB 制御器は $K_{fb} = \text{diag}[1.6, 1.6]$ を用いる。目標値は前の例題と同じ正弦波状の離散時間信号（2 種類）を用いることとする。ただし、 $\bar{\rho} = 2$ から 2 ステップ未来の目標値 $w(i+2)$ までを用いる。

Fig. 6 Tracking errors by the proposed scheme

提案の固定ゲイン型の学習則を利用した際の目標値追従誤差を Fig. 6 に示している．このとき，学習パラメータの初期値は $\theta(0) = 0 (\psi(0) \neq 0)$ であり，また，学習率（固定ゲイン）を $\tilde{\alpha} = h\alpha = 0.0005$ と設定している．この結果より，提案法は不安定プラントに対しても有効であることがわかる．また，上記シミュレーションにおける学習パラメータ $\theta(i)$ の時間発展を Fig. 7 に示している（各ラインにはそれぞれ 3 種類のデータが重なっていることに注意）．学習パラメータが一定値に収束していることがわかる．ただし， $w(i)$ が正弦波状の離散時間信号であり， $\xi(i)$ が PE 条件を満たさないため， $\theta(i)$ は真値には収束していない．

Fig. 7 Time evolution of parameter $\theta(i)$ by the proposed scheme

6. おわりに

本論文では，従来の DTFEL[15] の MIMO 化を行うとともに，未来の目標値を利用した学習型 FF 制御器を導入することで，FF 制御器の設計の自由度や学習パラメータの冗長性の問題を改善した．また，Alali ら [4] の学習則のアナロジーから MIMO-DTFEL のための学習則（固定ゲイン型の離散時間版学習則）を導いた．さらに，学習パラメータが最適値の近傍であるとの仮定のもと，誤差信号 $e(i)$ が非 PE の条件下で，しかも正実性の仮定も必要とせず，指数的に零へ収束することを示した（つまり，PE 条件を緩和し，正実性の条件も排除した）．従来の DTFEL では，正実性または PE 条件の仮定のどちらかを必要としていたが，提案法では二つの条件をともに必要としない点新しい．

なお，学習パラメータが最適値の近傍であるとの仮定が満たされない場合でも，非 PE の条件下で誤差信号 $e(i)$ は零へ収束すると考えられるが，その証明については今後の課題にしたい．

参考文献

- [1] M. Kawato, K. Furukawa and R. Suzuki: A hierarchical neural-network model for control and learning of voluntary movement; *Biol. Cybern.*, Vol. 57, No. 3, pp. 169–185 (1987)
- [2] A. Miyamura and H. Kimura: Stability of feedback error learning scheme; *Systems & Control Letters*, Vol. 45, No. 4, pp. 303–316 (2002)
- [3] E. Muramatsu and K. Watanabe: Feedback error learning control without recourse to positive realness; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 49, No. 10, pp. 1762–1767 (2004)
- [4] B. Alali, K. Hirata and K. Sugimoto: Generalization of Feedback Error Learning (FEL) to MIMO Systems; *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers(SICE)*, Vol. 43, No. 4, pp. 293–302 (2007)
- [5] K. Sugimoto, B. Alali and K. Hirata: Feedback error learning with insufficient excitation; *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 714–719 (2008)
- [6] B. Alali, K. Hirata and K. Sugimoto: Feedback error learning with insufficient excitation; *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol. E91-A, No. 10, pp. 3071–3075 (2008)
- [7] 児玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会 (1978)
- [8] 美多，原，近藤：基礎デジタル制御，コロナ社 (1988)
- [9] 野口，杉本：プレフィルタの状態を利用したフィードバック誤差学習；システム制御情報学会論文誌，Vol. 23, No. 5, pp. 105–110 (2010)
- [10] 野口，杉本：正実性によらない多入出力フィードバック誤差学習—プレフィルタ統合型学習則の改善；システム制御情報学会論文誌，Vol. 24, No. 3, pp. 61–72 (2011)
- [11] 野口，杉本：逆システムの直列結合による仮想フィードバック誤差学習；計測自動制御学会論文集，Vol. 48, No. 2, pp. 93–101 (2012)
- [12] S. S. Ge, G. Y. Li and T. H. Lee: Adaptive NN control for a class of strict-feedback discrete-time nonlinear systems; *Automatica*, Vol. 39, No. 5, pp. 807–819 (2003)
- [13] N. Sadegh: Model-free learning control of nonlinear discrete-time systems; *2011 American Control Conference* (2011)
- [14] S. Wongsura and W. Kongprawechnon: Discrete-time feedback error learning; *Suranaree J. Sci. Technol.*, Vol. 12, No. 4, pp. 266–275 (2005)
- [15] S. Wongsura and W. Kongprawechnon: Robust discrete-time feedback error learning; *Science Asia*,

Vol. 32, pp. 241–251 (2006)

- [16] S. Wongsura and W. Kongprawechnon: New theoretical analysis for the discrete-time feedback error learning method; *Thammasat Int. J. Sc. Tech.*, Vol. 12, No. 4 (2007)

付 録

付録 1. PE と離散時間線形時変系の指数安定性

【Lemma1】[13] 離散時間線形時変系:

$$\tilde{x}(i+1) = A(i)\tilde{x}(i), A(i) = I_n - c_i\Phi(i)\Phi^T(i) \quad (A1)$$

を考える．ここで， $\tilde{x}(i) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ， $A(i) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ， $\Phi(i) \in \mathbf{R}^n$ ， $c_i \in \mathbf{R}$ である．もしも， $c_i > 0$ ， $c_i \|\Phi(i)\|^2 < 2$ であり，かつベクトル信号列 $\Phi(i)$ が (定義 3 の) PE 条件を満たすならば，(A1) 式は指数安定である．このとき，

$$\|\tilde{x}(i+L)\| \leq \sigma \|\tilde{x}(i)\|, \forall i \geq 0 \quad (A2)$$

を満たすか，もしくは，等価的に

$$\|L_{(i+L, i)}\| \leq \sigma, \forall i \geq 0 \quad (A3)$$

を満たす $0 \leq \sigma < 1$ が存在する．ここで，

$$\|L_{(i+L, i)}\| := A(i+L-1) \cdots A(i+1) \cdot A(i) \quad (A4)$$

は，離散時間線形時変系 (A1) の状態遷移行列を表し，また， $L > 0$ は定義 3 で導入されたものに等しい．

(証明) 省略．詳細は文献 [13] を参照．

著 者 略 歴

の ぐち
野 口

まこと
慎 (正会員)

2006 年米子工業高等専門学校専攻科生産システム工学専攻修了，同年大学評価・学位授与機構より学士を授与，2008 年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士前期課程情報システム学専攻修了（修士），2011 年同研究科博士後期課程修了（博士）．2011 年 4 月～2012 年 3 月まで鳥取県産業技術センター研究員，2012 年 4 月から宇部工業高等専門学校制御情報工学科助教となり現在に至る．フィードバック誤差学習の研究などに従事．計測自動制御学会の会員．