部分線形化に基づく制御器の切り替え設計*

関口 和真[†]・三平 満司[‡]

Transition of Partial Feedback Linearization Based Controller*

Kazuma SEKIGUCHI[†] and Mitsuji SAMPEI[‡]

This paper considers a problem to transfer a trajectory from one zero dynamics submanifold to another one in finite time, for a time-invariant nonlinear system. In general, it is preferred to keep a trajectory on a zero dynamics submanifold when partial feedback linearization is applied to. Hence, this paper proposes a method to keep a trajectory on zero dynamics submanifold during the transfer by using time-varying zero dynamics submanifold. Main contribution is to develop the condition for time-varying linearizing coordinate to connect two zero dynamics submanifolds with the same dimension. The validity of the controller based on the proposed method is verified via numerical simulations of mono-rotor unmanned aerial vehicle (UAV) system and Acrobot system.

1. はじめに

様々な形態の歩様 [1,2] や, 人間のようなダイナミックな運動 [3,4] など多くの有意義な運動を実現する機械システムは劣駆動とよばれるアクチュエータ数に制限があるという特徴を持ち, 多くの研究がなされている. 一般に劣駆動システムは厳密な線形化ができず, また最小位相系ともならない. そのため劣駆動システムに対する制御問題はチャレンジングな課題といえる.

劣駆動システムの制御手法の一つに部分線形化という手法がある. この手法はシステムを線形なサブシステムと非線形な部分に分ける手法であり, 文献 [5-7] によくまとめられている. 実現したい運動に対して安定化したい部分を抽出し線形サブシステムを構成することで, 線形システムに対する安定化コントローラ的设计だけで制御目標が達成できるという利点がある. また, 状態の発散を含むようなダイナミクスが目的の運動であっても, 文献 [8] のように発散するダイナミクスを非線形サブシ

ステムに残すことで線形なコントローラだけで発散する目的の運動が実現できることがあり, 扱える運動のクラスは非常に大きいといえる.

線形サブシステムの収束後のシステム全体の動きは, 零化空間とよばれる限定的な空間上での非線形部分のダイナミクスに支配され, ゼロダイナミクスとよばれる. 一般に, システムの次数が高くなると解析が困難になる. 部分線形化は解析を要するシステムの次数を低くできるという特徴を持っており, Kawaida ら [4] はシステムの次数に対し低次になったゼロダイナミクスを解析することで, 複雑な周期運動の存在と, それを実現する制御則を示した. このような特徴から部分線形化を用いた制御系は, 全状態での解析ができないような複雑な運動に対して適用されることが多く, ゼロダイナミクスを考慮して線形部分の設計をおこなうことが部分線形化では重要になる.

複数のタスクを順次的に実行するためには, それぞれのタスクに対応したコントローラを切り替えて利用する必要がある. 部分線形化を用いたコントローラの切り替えとしては, Spong がアクロバットとよばれる劣駆動システムを倒立状態で安定化させるのに利用 [9] するなどの例があるが, コントローラの切り替えについて体系的に扱われてこなかった.

コントローラが部分線形化に基づき設計されている場合, コントローラの切り替えによって各コントローラに

* 原稿受付 2013 年 1 月 7 日

[†] 東京都市大学 工学部 Faculty of Engineering, Tokyo City University; 1-28-1, Tamazutsumi, Setagaya-ku, Tokyo 158-8557, JAPAN

[‡] 東京工業大学 大学院 理工学研究科 Graduate School of Engineering, Tokyo Institute of Technology; 2-12-1, Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8550, JAPAN

Key Words: nonlinear control, partial feedback linearization, controller transition.

対応した零化空間の間でシステムの軌道が遷移する．このため、コントローラの切り替えは複雑すぎて解析できない零化空間から離れたダイナミクスを経由することになり、コントローラの切り替えが安全におこなわれるかは一般に保証されない．

本論文では、時変な零化空間を用いて零化空間同士をつなぐことで、コントローラの切り替え時の零化空間から離れてしまうという問題を解決する手法を提案する．具体的には切り替えたいタスクを実現する二つのコントローラを生成する線形座標を時変な関数でつなぎ、軌道が零化空間の間を遷移する最中も時変な零化空間に束縛し続ける．これによってシステムのダイナミクスは低次元化された時変なゼロダイナミクスだけになり、遷移の間も解析が可能になることが期待される．さらに、このような時変な零化空間を生成するための条件を明らかにする．

本論文の構成は以下になる．まず、2. で数学的な準備をおこない、扱う問題を定式化する．次いで3. で主結果として時変な線形化状態の満たすべき条件を導出し、二つのコントローラを切り替える具体的な時変線形化状態の一つを示す．最後に具体例を用いて提案手法の有用性を示す．

2. 準備

本論文では以下の m 入力非線形時不変システムを考える．

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ &= f(x) + g(x)u\end{aligned}\quad (1)$$

ここで、 $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in M$ は状態、 $u = [u_1, \dots, u_m]^T$ は入力を表し、 $f, g_1, \dots, g_m$ はそれぞれ状態空間 $M \subset \mathbb{R}^n$ 上のなめらかなベクトル場を表し、状態空間上の各点 x において接空間上のベクトル $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ をそれぞれ一意に定める写像である． $g_1, \dots, g_m$ は任意の状態 $x \in M$ において一次独立であるとし、 $g(x)$ は $g_1(x)$ から $g_m(x)$ までを並べた各点 $x \in M$ で定まる行列とする．なめらかなベクトル場 $X_1, \dots, X_r$ によって張られる空間を接分布といい $\text{span}\{X_1, \dots, X_r\}$ と表す．二つのベクトル場 X_1, X_2 に対し定義される $\frac{\partial X_2}{\partial x}X_1 - \frac{\partial X_1}{\partial x}X_2$ というベクトル場は X_1, X_2 のリー括弧積といい $[X_1, X_2]$ と表す．接分布はリー括弧積に関して閉じているときインボリューティブであるという．接分布 Δ を含む最小のインボリューティブな接分布を Δ のインボリューティブクロージャといい、 $\bar{\Delta}$ と表す． $\dim \Delta$ はディストリビューション Δ の次元を表すとする．議論を明確にするために、3. まですでに用いられる接分布はそれぞれ滑らかで任意の状態 $x \in M$ において次元が一定であると仮定する．また、簡単のためとくに誤解がなければ引数の明記はおこ

なわない．

システム (1) 式に対し以下の接分布を定義する．

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &= \mathcal{G} = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \\ \mathcal{G}_i &= \text{span}\left\{\text{ad}_f^{i-1}g, \mathcal{G}_{i-1}\right\}, \quad (i \geq 2)\end{aligned}$$

ここで、 $\text{ad}_f^i g = [f, \text{ad}_f^{i-1}g]$, $\text{ad}_f g = [f, g]$, $\text{ad}_f \mathcal{G} = \{\text{ad}_f g \mid g \in \mathcal{G}\}$ であり $\text{ad}_f^{i-1} \mathcal{G} = \{\text{ad}_f^{i-1}g \mid g \in \mathcal{G}\}$ とする．

リー微分 $\mathcal{L}_f h$ はスカラー関数 h のベクトル場 f に沿った微分を表し、リー微分の繰り返しを $\mathcal{L}_f^i h = \mathcal{L}_f(\mathcal{L}_f^{i-1}h)$ で再帰的に定義する．さらに (1) 式で定義した g に対するリー微分を $\mathcal{L}_g h = [\mathcal{L}_{g_1} h, \dots, \mathcal{L}_{g_m} h]$ と定義すると、リー微分を用いて相対次数は以下のように定義できる．

【定義 1】 (Relative degree of function[7])

スカラー関数 $h(x)$ のシステム (1) 式に対する相対次数は以下を満たす自然数 r である．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^i h &= 0, \quad (i = 0, \dots, r-2) \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h &\neq 0\end{aligned}$$

もし、上式を満たす r が存在しない場合、相対次数は ∞ であると定義する．

【定義 2】 (Vector relative degree of system[7])

システム (1) 式に対し、スカラー関数の組 $h = \{h_1, \dots, h_m\}$ がそれぞれ相対次数 $\{k_1, \dots, k_m\}$ を持ち、以下の行列が正則であるとき、 h はシステムに対しベクトル相対次数 $\{k_1, \dots, k_m\}$ を持つという．

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{k-1} h = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f^{k_1-1} h_1 & \dots & \mathcal{L}_{g_m} \mathcal{L}_f^{k_1-1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f^{k_m-1} h_m & \dots & \mathcal{L}_{g_m} \mathcal{L}_f^{k_m-1} h_m \end{bmatrix} \quad (2)$$

行列 (2) 式はデカップリング行列とよばれる．関数の組 $h = \{h_1, \dots, h_m\}$ がシステムに対してベクトル相対次数 $\{k_1, \dots, k_m\}$ を持つとき、この関数の組を用いて部分線形化した線形サブシステムは $\{k_1, \dots, k_m\}$ という可制御指数をもつ．本論文ではベクトル相対次数を持つ $h = \{h_1, \dots, h_m\}$ を線形化関数とよぶことにする¹．

関数の組 $h = \{h_1, \dots, h_m\}$ がベクトル相対次数 $\{r_1, \dots, r_m\}$ を持つとすると、システムを以下に変換する座標変換、入力変換が存在する．

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_l \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c x_l \\ \xi(x_l, x_r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c \\ \eta(x_l, x_r) \end{bmatrix} v$$

ここで、 $x_l = [h_1, \dot{h}_1, \dots, h_1^{(r_1-1)}, h_2, \dot{h}_2, \dots, h_m^{(r_m-1)}]^T$ は線形化された $\sum_{i=1}^m r_i$ 次のサブシステムの状態を表している．ただし、関数 h の i 階時間微分を $h^{(i)}$ で表す

¹線形化座標は線形化関数 $\{h_1, \dots, h_m\}$ とその時間微分を用いて構成される．

ものとする． x_r は部分線形化によって残る非線形サブシステムの状態， $[x_l^T, x_r^T]^T$ のヤコビ行列が正則になるように選ばれる． (A_c, B_c) は $\{r_1, \dots, r_m\}$ を可制御指数とするブルノフスキー正準系であり，新しい入力 $v = \alpha(x_l, x_r) + \beta(x_l, x_r)u$ によって定まる．ただし， β は正則な行列値関数である．このようにシステムの一部を線形化する手法を部分線形化という．詳細は [7] を参照されたい．また，線形サブシステムを 0 に収束させる入力 v を零化入力といい，零化後のシステム軌道は以下で定義される部分多様体上に拘束される．

$$Z^* = \{x \in M \mid x_l = 0\}$$

本論文ではこの部分多様体 Z^* を零化空間とよび， Z^* 上のダイナミクス $\dot{x}_r = \xi(0, x_r)$ をゼロダイナミクスとよぶ．零化後の入力 $\alpha(0, x_r)$ は軌道を Z^* に拘束し，等価入力とよばれる．零化空間上では等価入力は一意に定まり，ゼロダイナミクスは自励系とみなし解析することになる．以降ではとくに線形化座標を明確にする必要がある場合， $Z^*(x_l)$ という表記を用いる．

相対次数に基づくシステム構造を以下で定義する．

【定義 3】 (Relative Degree Structure [10])

n 状態 m 入力のシステムに対し相対次数構造を以下の指数の組で定義する．

$$(r_*^{\sigma_{r_*}}, (r_* - 1)^{\sigma_{r_*} - 1}, \dots, 1^{\sigma_1}) - [r_*^{\rho_{r_*}}, (r_* - 1)^{\rho_{r_*} - 1}, \dots, 1^{\rho_1}]$$

ここで， r_* は以下を満たす最小の自然数であり

$$\dim \bar{\mathcal{G}}_{r_*+1} - \dim \bar{\mathcal{G}}_{r_*} = 0$$

σ_i ， ρ_i はそれぞれ以下で定義する．

$$\sigma_i = \dim \bar{\mathcal{G}}_i - \dim \bar{\mathcal{G}}_{i-1}$$

$$\rho_i = \gamma_i - \gamma_{i+1},$$

$$\gamma_i = \dim \bar{\mathcal{G}}_i - \dim \bar{\mathcal{G}}_{i-1}$$

相対次数構造は $(r_*^{\sigma_{r_*}}, \dots, 1^{\sigma_1})$ と $[r_*^{\rho_{r_*}}, \dots, 1^{\rho_1}]$ という 2 組の指数からなり，それぞれ以下の意味を持つ．丸括弧で表される 1 組目の指数は，任意に選んだ座標を構成する関数の組のうちで，相対次数の和が最大となる組の相対次数である．角括弧で表される 2 組目の指数は，任意に選んだ m 個の関数の組のうち，ベクトル相対次数の和が最大となるもののベクトル相対次数を表す．どちらの組も要素は指数表現されており，基数部が相対次数を表し，指数部で同じ相対次数のものが何個あるかを表す．参考文献 [10] では同じ指数が並ぶことが多く，表記が煩雑になりがちであるので，本論文では指数表記を採用している，つまり， $\{r, r, r\}$ を $\{r^3\}$ と同一視して指数表記にしており，意味においては同じものである．導出などの詳細については文献 [10] を参照されたい．以

降では相対次数構造に現れる 2 組の指数を丸括弧，角括弧でそれぞれ独立に使用することがある．

計算過程は省略するが，例として台車倒立振り子システムに対し定義に従い相対次数構造を求めると $(3, 2^2, 1) - [3]$ となる．これより，台車倒立振り子システムが部分線形化によって次のように変形できることがわかる．

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_l \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 x_l \\ \xi(x_l, x_r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (3)$$

ここで， x_l は 3 次の線形サブシステムの状態， x_r は 1 次の非線形サブシステムの状態を表す．また， $\xi(x_l, x_r)$ は x_l ， x_r の非線形関数であり，

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする．(3) 式は 3 次の線形サブシステムと 1 次の非線形サブシステムであり，非線形サブシステムの状態として相対次数 2 次のものが選べるということが相対次数構造から明らかになる．このように，相対次数構造はシステムに対し一意に定まり，一種の正準形を自然に定めるもので，相対次数に基づくシステム構造を表している．

相対次数構造から $(r_*^{\sigma_{r_*}}, \dots, 1^{\sigma_1})$ という相対次数を持つ座標変換 $\Phi = [\phi_1^{\{r_*\}}, \dots, \phi_{\sigma_{r_*}}^{\{r_*\}}, \dots, \phi_n^{\{1\}}]^T$ が存在し，以下に示すような相対次数に基づく関数のパラメライズが可能になる [10]．ここで，座標変換に用いる関数の上付き文字は相対次数を表し，下付き文字が関数の通し番号を表す．

【命題 1】 座標 $[\phi_1^{\{r_*\}}, \dots, \phi_{\sigma_{r_*}}^{\{r_*\}}, \dots, \phi_n^{\{1\}}]^T$ が相対次数 $(r_*^{\sigma_{r_*}}, \dots, 1^{\sigma_1})$ を持つとする．相対次数 i を持つ任意の関数 $h(x)$ は相対次数構造によって定まる座標の一部を用いて次のように表せる．

$$h(x) = h\left(\phi_1^{\{r_*\}}, \dots, \phi_{\sigma_{r_*}}^{\{r_*\}}, \phi_{\sigma_{r_*}+1}^{\{r_*-1\}}, \dots, \phi_{\sum_{j=1}^i \sigma_j}^{\{i\}}\right)$$

ただし，以下を満たす $k \in \left\{\sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j + 1, \dots, \sum_{j=1}^i \sigma_j\right\}$ が存在する．

$$\frac{\partial h}{\partial \phi_k^{\{i\}}} \neq 0$$

2.1 問題設定

部分線形化は様々な用途で利用されるが，フルアクチュエートなシステムに対し適用する場合を除き，一般にゼロダイナミクスまで含めた全状態を制御する必要がある．そして，全状態を制御するためにはゼロダイナミクスの解析が重要になる．たとえばゼロダイナミクスが大域漸近安定であるならば，線形サブシステムの零化さえ実現できればシステム全体を安定にすることができる．この方針のもとアクロバットシステムの倒立安定化が実現されている [11, 12]．しかしながら，与えられた制

御目標を達成する大域漸近安定なゼロダイナミクスが常に存在するかは保証されておらず、一般にゼロダイナミクスは初期状態によって安定、周期的、不安定になりうる [4,8]。与えられた制御目標を部分線形化を用いて達成できるかは軌道を零化空間上のどの領域に配置できるかに依存する。また、前節で説明したように部分線形化の枠組みでは零化空間上で有効な入力が存在しない。このため、零化空間上に軌道を拘束しながら、望ましくない領域に存在する軌道を望ましい領域に移動させることは不可能である。零化空間上で軌道を別の軌道に移すためには、零化空間から軌道を一度離す必要がある。ただし、全状態空間上での解析は困難なので、本論文では、時間的に変化する零化空間というものを新たに導入する。導入した時変な零化空間上に軌道を拘束することで、元の零化空間からは軌道を一度離すということを実現する。

ここまで、零化空間上で軌道を別の軌道に移す問題を議論してきた。これはより一般的な問題である、二つの零化空間の間で軌道を移す問題の特別な場合とみなすことができる。以降では二つの零化空間の間での軌道遷移という形で問題を定式化していく。そのイメージ図が Fig. 1 である。図についての詳細な説明は本節の最後におこなう。

本論文では切り替えるべき二つの時不変な零化空間、つまり線形化座標は与えられていると仮定し、それぞれ $x_{l1}(x)$, $x_{l2}(x)$ とする。これら線形化座標に対する切り替え則として以下を提案する。

$$x_l(t, x) = \begin{cases} x_{l1}(x) & t < t_s \\ x_{l12}(t, x) & t \in [t_s, t_e] \\ x_{l2}(x) & t > t_e \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 $x_{l12}(t, x)$ は $x_{l1}(x)$, $x_{l2}(x)$ をつなぐ時間と状態の関数として定義される線形化座標である。 $[t_s, t_e]$ は時間関数として線形化座標が変化する時間区間を表す。各線形化座標に対応した零化空間が交わっている場合、入りに制限がないとすれば $t_s = t_e$ と瞬間的な切り替えが可能である。時変部分 $x_{l12}(t, x)$ は軌道が零化空間から離れずに遷移できるように設計する必要がある。次節以降で零化空間から軌道が離れないための時変部分の条件を示す。また、初期状態を含む零化空間をはじめに考えることで零化の過程を考える必要がなくなる。以降では初期状態は $x_{l1}(x)$ の零化空間上にあるとして議論をすすめる。特に誤解がなければ状態 x の関数であることの記述はおこなわない。

提案する切り替え則による軌道の時間遷移イメージを Fig. 1 に示す。二枚の平面がそれぞれ x_{l1} , x_{l2} に対応した零化空間を表し、曲面が時変部分 $x_{l12}(t)$ に対応した零化空間を表す。 $Z^*(x_{l1})$ 上の点で表した初期値からはじまる軌跡が $Z^*(x_{l1})$ から時変部分 $Z^*(x_{l12})$ を通って $Z^*(x_{l2})$ へ到達するように遷移している。このように、本論文では異なる二つのゼロダイナミクス間を時変な零

Fig. 1 Image of change from x_{l1} to x_{l2} keeping zero state of linear subsystem

化空間を通して軌道が遷移する問題を扱う。

3. 主結果

この節では、まず時変な線形化座標の条件を導出するために時不変システムにおける時間関数の性質を調べ、その後零化空間から離れない時変な線形化座標が満たすべき条件を導出する。

3.1 時変関数

ここでは、時不変な関数の解析で用いられる手法を時変関数に拡張し時変関数の性質を明らかにする。

時変関数 $h(t, x)$ に対し、その時間微分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \left(f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \right) \\ &= \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \end{aligned} \quad (5)$$

相対次数の計算において入力の項がどうなっているかが重要であり、表記を簡単にするため以下の拡張システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{X} &:= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ f(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix} u \\ &= F(X) + G(X)u \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $X = [t, x]^T$ であり、 $F(X)$, $G(X)$ は拡張した状態空間 M_e 上のベクトル場である。拡張システム (6) 式に対する時変関数 $h(t, x)$ のリー微分は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F h(X) &= \frac{\partial h(X)}{\partial X} F = \frac{\partial h(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} f(x) \\ \mathcal{L}_G h(X) &= \frac{\partial h(X)}{\partial X} G = \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} g(x) = \mathcal{L}_g h(t, x) \end{aligned}$$

拡張システムにおけるスカラ関数 $h(X)$ の時間微分は、リー微分を用いて以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \dot{h}(t, x) &= \mathcal{L}_F h + (\mathcal{L}_G h)u \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right) h + (\mathcal{L}_g h)u \end{aligned}$$

これは時間関数 $h(t, x)$ の時不変システム (1) 式に対する

時間微分 (5) 式と一致する．これより拡張システムに対する相対次数が元のシステムの相対次数と一致する．

【補題 1】 時不変なベクトル場 $f(x)$ に沿ったリー微分は時間に関する偏微分と作用素として可換であり，以下が成り立つ．

$$\mathcal{L}_f \circ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \circ \mathcal{L}_f$$

(証明) 任意のスカラー関数 h に対して，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}_f h) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h}{\partial x} f \right) = \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} f + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} \right) f = \mathcal{L}_f \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで，ベクトル場 $f(x)$ は時不変であり $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ となることを用いた．

ベクトル場 f が時変である場合，(7) 式の等式が成り立たず，可換ではなくなる．この補題は拡張システム上のリー微分の繰り返し表現を可能にする．

【補題 2】

$$\mathcal{L}_F^i h = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right)^i h \quad (8)$$

(証明) 帰納法を用いる．まず，(8) 式が $i=k$ で成立すると仮定する．このとき，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F^{k+1} h &= \frac{\partial(\mathcal{L}_F^k h)}{\partial X} F \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right)^k h \right\} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right)^{k+1} h \end{aligned}$$

となる．ここで，最後の等式は $\frac{\partial}{\partial t}$ と $\mathcal{L}_f$ の可換性を用いている．

これらを用いると時変システムの相対次数が以下のように求まる．

【定理 1】 時変関数 $h(t, x)$ が相対次数 r を持つ必要十分条件は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^i h &= 0 \quad (i=0, \dots, r-2) \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h &\neq 0 \end{aligned}$$

である．

(証明) まず，以下が成り立つことを示す．

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_F^i h = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^i h, \quad i=0, \dots, r-1 \quad (9)$$

$i=0$ のとき (9) 式は自明． $i=k-1 < r-1$ で $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_F^j h = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^j h = 0$ ($j=0, \dots, k-1$) が成り立つと仮定すると

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_F^k h = \mathcal{L}_g \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right)^k (h) \right\}$$

$$= \mathcal{L}_g \left(\frac{\partial^k h}{\partial t^k} + k \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \mathcal{L}_f h + \dots + \mathcal{L}_f^k h \right)$$

補題 1 より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g \mathcal{L}_F^k h &= \frac{\partial^k}{\partial t^k} (\mathcal{L}_g h) + k \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} (\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h) + \dots \\ &\quad + k \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{k-1} h) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^k h \\ &= \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^k h \end{aligned}$$

ここで，最後の等式は帰納法の仮定を用いた．

さらに $\mathcal{L}_G h = \dots = \mathcal{L}_G h^{(i-2)} = 0$ が成り立つとすると， $h^{(i-1)} = \mathcal{L}_F^{i-1} h$ となり， $h(t, x)$ の i 階時間微分は

$$\begin{aligned} h^{(i)} &= \mathcal{L}_F h^{(i-1)} + \left(\mathcal{L}_G h^{(i-1)} \right) u \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right) h^{(i-1)} + \left(\mathcal{L}_g h^{(i-1)} \right) u \\ &= \mathcal{L}_F^i h + \left(\mathcal{L}_g \mathcal{L}_F^{i-1} h \right) u \end{aligned}$$

となる．このことから， $k < r-1$ ならば $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^k h = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_F^k h = 0$ であり， $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_F^{r-1} h \neq 0$ である．

(注意 1) 定理 1 は相対次数という観点において時変関数と時不変関数に違いはないということを意味している．つまり相対次数に関しては時変関数も各時刻において時不変とみなせ 定義 1 に従って計算できる．また相対次数構造に基づき定まる座標 $\left[\phi_1^{\{r^*\}}, \dots, \phi_{\sigma_{r^*}}^{\{1\}} \right]$ は時間関数でもよいことがわかり，さらに時変な関数の相対次数に基づくパラメトライズも時変なパラメータ関数を用いて 命題 1 と全く同じ条件になる．

【補題 3】 e を M 上のベクトル場， E を拡張空間 M_e 上のベクトル場で $[0, e]^T$ と定義する．このとき F と E の拡張空間上でのリー括弧積は

$$[F, E] = \begin{bmatrix} 0 \\ [f, e] \end{bmatrix}$$

となる．さらに F と G のリー括弧積は任意の非負整数 i に対して次で表せる．

$$\text{ad}_F^i G = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{ad}_f^i g \end{bmatrix} \quad (10)$$

(証明)

$$\begin{aligned} [F, E] &= \frac{\partial E}{\partial X} F - \frac{\partial F}{\partial X} E \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial e}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ [f, e] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

これより (10) 式は明らか．

【系 1】 時変関数 $h(t, x)$ の相対次数を k とする．このとき以下の 4 式は等価である．

$$\begin{aligned} \text{(i)} & \mathcal{L}_g h = \dots = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{k-2} h = 0, \quad \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{k-1} h \neq 0 \\ \text{(ii)} & \mathcal{L}_g h = \dots = \mathcal{L}_{\text{ad}_f^{k-2} g} h = 0, \quad \mathcal{L}_{\text{ad}_f^{k-1} g} h \neq 0 \end{aligned}$$

$$(iii) \mathcal{L}_G h = \dots = \mathcal{L}_G \mathcal{L}_F^{k-2} h = 0, \quad \mathcal{L}_G \mathcal{L}_F^{k-1} h \neq 0$$

$$(iv) \mathcal{L}_G h = \dots = \mathcal{L}_{\text{ad}_F^{k-2} G} h = 0, \quad \mathcal{L}_{\text{ad}_F^{k-1} G} h \neq 0$$

(証明) (i) と (ii) の等価性は [7] の Lemma 4.1.2 で示されている．定理 1 より (i) と (iii) が等価であり，補題 3 より (ii) と (iv) の等価性がわかる．

【系 2】

$$\mathcal{L}_G \mathcal{L}_F^{k-1} h(t, x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{k-1} h(t, x) \quad (11)$$

(証明) Corollary 1 の直接的な帰結である．

以上より時変関数のベクトル相対次数は以下で定義される．

【定義 4】 デカップリング行列 $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{k-1} h(t, x)$ が正則であるとき，時不変システム (1) 式に対して時変関数 $h(t, x) = \{h_1(t, x), \dots, h_m(t, x)\}$ はベクトル相対次数 $\{k_1, \dots, k_m\}$ を持つという．ここで， k_i は $h_i(t, x)$ の相対次数である．

3.2 時変線形化座標

まずはじめに，時変な零化空間を定義しておく．

【定義 5】 時変な関数の組 $\{h_1(t, x), \dots, h_m(t, x)\}$ がベクトル相対次数 $\{k_1, \dots, k_m\}$ を持つとする．このとき， $x_l(t, x) = [h_1(t, x), \dots, h_1^{(k_1-1)}(t, x), \dots, h_m(t, x), \dots, h_m^{(k_m-1)}(t, x)]^T$ に対応した時変な零化空間は次で定義される．

$$Z^*(x_l) = \{x \in M \mid x_l(t, x) = 0\}$$

1 入力システムを考える．相対次数 r の時変なスカラー関数 $h(t, x)$ を用いて部分線形化をおこない，得られる時変な線形サブシステムの状態を

$$x_l(t, x) = [h(t, x), \dots, h^{(r-1)}(t, x)]^T \quad (12)$$

とする．(9) 式より，時変な線形サブシステムの状態 (12) 式を 0 に保つ等価入力とは次のようになる．

$$u = -\left(\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h\right)^{-1} \mathcal{L}_F^r h \quad (13)$$

【定理 2】 時変な線形化関数 $h(t, x)$ の相対次数を r とする． $h(t, x)$ を用いた部分線形化における時変な線形サブシステムの状態を 0 に保ち続ける連続な入力が存在するための必要十分条件は $h(t, x)$ が C^r 級関数であり，かつ (13) 式の等価入力が well-defined であることである．

(証明) 時変な線形化関数 $h(t, x)$ の k 階の時間微分は次のようになる．

$$\frac{d^k h}{dt^k} = \mathcal{L}_F^k h^{(k-1)} = \sum_{i=0}^k \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathcal{L}_f^{k-i} h + \left(\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{k-1} h\right) u$$

ここで， $k < r$ のとき $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{k-1} h = 0$ であり， $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h \neq 0$ である． $h(t, x)$ が C^r 級関数ではないとすると，ある $k \leq r$ が存在し $h^{(k)}(t, x)$ が不連続になる．(13) 式の等価入力は i 次遅れで $h^{(r-i)}(t, x)$ に届くので， k 階微分には $n-k$

次遅れでしか入力が届かないことになる．よって k 階微分に現れる不連続な変化を連続な等価入力で打ち消すことはできない．したがって，線形化関数は C^r 級関数である必要がある．逆は等価入力の構成より明らか．

(注意 2) 入力として不連続な値を用いることが許される場合， $h(t, x)$ の連続性に関する条件は弱まり， C^{r-1} 級であればよいことになる．これは $h^{(r)}(t, x)$ の不連続な変化は不連続な等価入力をいれればキャンセルできることによる．

(注意 3) 相対次数が変化する線形化関数を考える．相対次数の変化としては上がる場合と下がる場合の二通りが考えられる．まず，相対次数が上がる場合：相対次数が上がるということは $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h = 0$ となることを意味し，等価入力が well-defined でなくなるため相対次数が上がることはできない．

つぎに，相対次数が r から r' に下がる場合：等価入力が下がった相対次数に対しても等価入力になっている必要がある．つまり，

$$\left(\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h\right)^{-1} \mathcal{L}_F^r h = \left(\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r'-1} h\right)^{-1} \mathcal{L}_F^{r'} h$$

この条件は厳しい条件で，一般には成り立たない．よって相対次数が変化するような線形化関数を 0 に保つことは一般にできない．そのため定理では $h(t, x)$ の相対次数が一定であることを仮定として組み込んだ．

多入力については 1 入力の場合の自然な拡張で以下の結果が得られる．

【定理 3】 時変関数 $h(t, x) = \{h_1(t, x), \dots, h_m(t, x)\}$ がシステム (1) 式に対しベクトル相対次数 $\{r_1, \dots, r_m\}$ を持つとする． $h(t, x)$ を用いた部分線形化における時変な線形サブシステムの状態を 0 に保ち続ける連続な入力が存在するための必要十分条件は $h(t, x)$ の各要素がそれぞれ $C^{r_1}, \dots, C^{r_m}$ 級関数であり，かつ (11) 式のデカップリング行列が正則であることである．

(証明) デカップリング行列が正則であることは等価入力が存在するために必要な条件であり，これより分離された各サブシステムに対して 定理 2 を適用すればよい．

つぎに，部分線形化に基づく二つの制御器をつなぐ時変部分の一つの設計法を示す．注意 3 で述べたように，零化空間から離れずに切り替えるために制御器に対応した線形化関数の相対次数は同じであるとする．次で定義される時間関数 $c_{1i}(t)$ ， $c_{2i}(t)$ を用意する．

$$c_{ki}(t) = \begin{cases} c_{k1s} & t < t_{s_{ki}} \\ c_{kit}(t) [t_{s_{ki}}, t_{e_{ki}}] & \text{for } \begin{pmatrix} k=1, 2 \\ i=1, \dots, m \end{pmatrix} \\ c_{kie} & t > t_{e_{ki}} \end{cases} \quad (14)$$

ここで, $c_{1is} = 1$, $c_{1ie} = 0$, また $c_{2is} = 0$, $c_{2ie} = 1$ とし, 遷移関数 $c_{kit}(t)$ は時間区間 $[t_{s_{ki}}, t_{e_{ki}}]$ で以下を満たす C^{r_i} 級関数とする.

$$\begin{aligned} c_{kit}(t_{s_{ki}}) &= c_{kis}, & \dot{c}_{kit}(t_{s_{ki}}) &= \dots = c_{kit}^{(r_i)}(t_{s_{ki}}) = 0 \\ c_{kit}(t_{e_{ki}}) &= c_{kie}, & \dot{c}_{kit}(t_{e_{ki}}) &= \dots = c_{kit}^{(r_i)}(t_{e_{ki}}) = 0 \end{aligned}$$

$c_{ki}(t)$ は全体として C^{r_i} 級関数となる. $c_{2i}(t)$ のイメージ図を Fig. 2 に示す. これらの時間関数を用いて, (4) 式の線形化座標に対する条件は以下ようになる.

Fig. 2 Image of time function $c_{2i}(t)$

【系 3】 (1) 式のシステムに対し, 同じベクトル相対次数 $r = [r_1, \dots, r_m]$ を持つ 2 組の時不変な線形化関数 $h^1(x) = \{h_1^1(x), \dots, h_m^1(x)\}$, $h^2(x) = \{h_1^2(x), \dots, h_m^2(x)\}$ が与えられているとする. 次で定義される線形化関数 $h(t, x)$ に対応した線形サブシステムの状態を 0 に保ちながら, $h^1(x)$ から $h^2(x)$ へ連続的な遷移をおこなうことは, デカップリング行列 $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h(t, x)$ が正則であるとき可能である.

$$h(t, x) = C_1(t)h^1(x) + C_2(t)h^2(x) \quad (15)$$

ここで, $C_1(t)$, $C_2(t)$ はそれぞれ (14) 式で定義される C^{r_i} 級関数 c_{1i} , c_{2i} を対角成分に持った対角行列である. (証明) これは 定理 3 の特殊ケースである.

(15) 式で提案する線形化関数の遷移時間は $\min_{k,i} t_{s_{ki}}$ から $\max_{k,i} t_{e_{ki}}$ であり, デカップリング行列は次で表される.

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h(t, x) = C_1(t) \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h^1(x) + C_2(t) \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h^2(x)$$

ここで, $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h^1(x)$, $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{r-1} h^2(x)$ はそれぞれ $h^1(x)$, $h^2(x)$ に対応したデカップリング行列である.

(注意 4) 上述の主結果の中では遷移時間の長さについて何の条件もないが, 具体的なシステムに適用する場合は以下を考慮する必要がある. 一般に, 時変な線形化関数を用いると, ゼロダイナミクスも時変になり解析が難しくなる点. この観点からは遷移時間を短くとる方がよいが, 短くし過ぎるとゲインが高くなり, 入力飽和を起し, 零化空間から離れてしまう原因にもなる. また, 定理を適用するには時変なデカップリング行列が正則である必要がある. これらを踏まえ遷移時間を調整する必要がある.

具体的に時変部分を実設計する際は (14) 式の $c_{ki}(t)$ を多項式やベジェ曲線を用いることで, 複雑な時変部分を設計することが可能になる. 与えられた制御問題に対し, どのように時変部分を設計するかは制御問題に強く依存し一概に示すことはできないが, 時変な線形化関数を用いるためには次の手順を経る必要がある.

- 手順 1. 与えられた制御問題を部分線形化で解決できる複数の制御問題の連なりに分ける.
- 手順 2. 分けられた各制御問題を解決する線形化関数を求める.
- 手順 3. 求めた各線形化関数が, すべて同一の (ベクトル) 相対次数を持つことを確認する.
- 手順 4. 線形化関数の時変部分を設計する.

この手順のキーポイントは手順 1 で, 部分線形化で解決できる問題の連なりに分けることにある. ここで「連なりに分ける」と言っているのは, 分けた問題を一つずつ順番に解決していくことで, 最終的に元の問題が解決されるように制御問題を分けるということである. 次節では, これらの手順を経て時変な線形化関数を設計する方法を具体的なシステムに対する制御問題をとおして説明する. とくに, 連なりに分ける必要性が顕著な例として, 4.1 にモノロータ UAV システムの擬似ホバリング制御問題を示す.

4. 具体例

4.1 モノロータ UAV

Fig. 3 に示すモノロータ Unmanned Aerial Vehicle (UAV) を考える. このシステムは平衡点を持たず, ホバリングなどの一般的な飛行はできない. ここでは擬似ホバリングとよぶ, 高さ z と姿勢 ϕ が望みの位置で周期的に止まる運動の実現を目指す. θ_p をプロペラの回転角, m を質量とし, z_d , ψ_d をそれぞれ望みの高さ, 姿勢とする.

このシステムは次式に表すように角運動量が保存される.

$$\dot{\theta}_p(t) = -\frac{J_r + 2J_p}{2J_p} (\dot{\psi}(t) - \dot{\psi}(t_0)) + \dot{\theta}_p(t_0)$$

ここで J_r , J_p は物理パラメータ, t_0 は基準時刻を表す. プロペラから得られる推力が角速度の二乗に比例すると仮定すると, Euler-Lagrange の方法から状態方程式が求まる.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\tau, & f(x), g(x) &\in \mathbb{R}^{4 \times 1} \\ x &= [z, \psi, \dot{z}, \dot{\psi}]^T \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで, プロペラの回転量はシステムの挙動に影響しないので θ_p のダイナミクスは省略し, τ を入力トルクとする.

Fig. 3 MonoRotor Model

Fig. 4 Model of Acrobot system

線形化関数設計：制御戦略として擬似ホバリングを次の二つに分ける．

- 1) 姿勢角 ψ を周期的に止める．
- 2) 高さ z を姿勢角に同期させながら周期的に所望の高さにする．

ここで二つのステップに分けた制御戦略は最終的に同時に達成しなければならないものであり、逐次的に達成すべき 3.2 で述べた時変な線形化関数を利用するための手順 1 で定める「制御問題の連なり」とは異なることに注意する．

Step 1) 部分線形化に基づく制御

周期的な時間関数に ψ を追従させるために、以下の線形化座標を定義する．

$$\begin{aligned} x_l &= \begin{bmatrix} h(\psi, t), \dot{h}(\psi, t) \end{bmatrix}^T \\ h(\psi, t) &= \psi - \psi_r(t) \\ \psi_r(t) &= \sin(2\pi f(t - t_0)) - 2\pi f(t - t_0) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、目標姿勢 ψ_d として $2\pi i$ ($i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) とし、 t_0 を初期時刻、 f を目標姿勢で止まる周期を表すものとする． $\psi_r(t)$ のグラフを Fig. 5 に示す．

Step 2) ゼロダイナミクスの制御

Step 1) で設計した制御則を用いてシミュレーションをおこなうと $\psi_r(t)$ 中の f の値によって z は周期的に単調な運動をおこなうことがわかる． f と z の時間応答の関係を表したのが Fig. 6 になる．このグラフより z は f が大きい(小さい)ほど増加する(減少する)ことがわかる．これより、 f を変化させることで z を制御できることがわかる．以上より、擬似ホバリングは f を様々に変えた $\psi_r(t)$ に ψ を追従させるという制御問題の連なりに分解できる(手順 1)．

任意の f に対して $h(t, x)$ の相対次数は 2 であるので手順 2, 3 はすでに完了していることがわかる．定理 2 より f の変化は $h(t, x)$ が C^2 級になるようにおこなえばよい．ここで目標姿勢 $\psi_r(t)$ は $(0, 2\pi]$ の範囲で考えると周期 f の周期関数であり、その時間微分 $\dot{\psi}_r(t)$, $\ddot{\psi}_r(t)$ はいずれも $f(t - t_0)$ が整数のとき 0 になる．たとえば $t_1 = 1/f + t_0$ のとき $\psi_r(t_1) = -2\pi$, $\dot{\psi}_r(t_1) = \ddot{\psi}_r(t_1) = 0$ であり、 f の値によらない．このことから $f(t - t_0)$ が整数になるたびに基準時刻 t_0 と一緒に f を変更する分には

Fig. 5 Time response of $\psi_r(t)$ with constant f

Fig. 6 Time response of $z(t)$ to frequency f

全体としての $h(t, x)$ の C^2 級が保たれる(手順 4)．これより時変な線形化関数を利用するためのすべての手順が完了したことになる．このシステムは (4) 式の x_{l12} にあたる部分がなくても瞬間的な切り替えで零化空間から軌道が離れることなく制御器を切り替えられる特殊な例であることがわかる．

手順 1 では f を様々に変化させた ψ_r に追従させる制御問題に分けたが、具体的にどのように変化させるかを次に考える．変化させる f の値は自由に選べるので、 f をゼロダイナミクスの仮想的な制御入力と見なすことができる．結果として目標姿勢は以下のように定義し直す．

$$\begin{aligned} \psi_r(t) &= \sin(2\pi f^{\{k\}}(t - t_k)) - 2\pi f^{\{k\}}(t - t_k) - 2\pi k \\ t &\in [t_k, t_{k+1}) \end{aligned}$$

ここで、 $f^{\{k\}}$ は時間区間 $[t_k, t_{k+1})$ で一定の値であり、基準時刻は $t_{k+1} = t_k + 1/f^{\{k\}}$ と再帰的に定義する．各時間区間 $[t_k, t_{k+1})$ におけるゼロダイナミクスは (16) 式に現れる $\dot{z}$ の式を積分することで、以下のように陽に求まる．

$$z(t - t_k) = a_2(t - t_k)^2 - a_1(t - t_k) + a_0$$

ここで、 a_i ($i=0, 1, 2$) は $f^{\{k\}}$ とその時間区間の初期状態 $x(t_k)$ に依存した定数である．仮想コントローラ $f^{\{k\}}$ は $\psi = 0$, $\dot{\psi} = 0$ を満たすポアンカレ断面上の解析に基づき以下のように定める．

$$\begin{aligned} f^{\{k\}} &= f_z^{\{k\}} a + f_{dz}^{\{k\}} (1 - a), \\ a &= \cos \left(\tan^{-1} \left(\frac{|\dot{z}(t_k)|}{|z(t_k)|} \right) \right) \end{aligned}$$

ここで、 $f_z^{\{k\}}$ は一周期後に $\dot{z}(t_{k+1}) = 0$ を満たす周波数の値であり、 $f_{dz}^{\{k\}}$ は $\dot{z}(t_{k+1}) = 0$ を満たすものである．

設計した制御則を用いたシミュレーション結果を Figs. 7~10 に示す．シミュレーションでは目標高さとして $z = 0$ とした．グラフから零化空間に状態を拘束しつつ周期的な高さ制御を実現していることが Figs. 7, 8 からわかり、Fig. 10 より z と ψ が同期していく様子が見える．

最終的に収束した f の値を用いた目標姿勢に対し、初めから追従させたとしても、望みの高さで擬似ホバリングするという制御目標は達成されない．つまり、この制御問題は f に応じた無数の制御問題の連なりに分けるこ

Fig. 7 $z(t)$ and $\dot{z}(t)$ Fig. 8 $h(x,t)$ and $\dot{h}(x,t)$ Fig. 9 Frequency f Fig. 10 $z[k]$ and $z[k+1]$

とが本質的に必要な例となっている。

4.2 Acrobot System

Fig. 4 に示す, アクロボットとして知られる 2 リンク劣駆動機械システムを考える. このシステムは部分線形化を用いて倒立状態を安定化できることが知られている [13,12]. ここでは Fig. 11 に示すように直立安定状態から曲がった姿勢での倒立安定化に移行することを目的とする. つまり, 直立姿勢を安定化する制御問題と曲がった姿勢を倒立安定化する制御問題という, 部分線形化によって解決できる二つの制御問題の連なりを考える (時変な線形化関数を用いる手順 1).

Fig. 11 Control objective : change the posture from an upright position to a bending position, keeping the center of mass above the first joint.

Euler-Lagrange の方法で運動方程式を求めると以下ようになる.

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau$$

各行列は以下で定義する.

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \gamma + 2\beta \cos \theta_2 & \gamma + \beta \cos \theta_2 \\ \gamma + \beta \cos \theta_2 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\beta \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 \\ \beta \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} k_1 \cos \theta_1 + k_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ k_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$q = [\theta_1, \theta_2]^T, \quad \tau = [0, \tau_2]^T$$

また, $\alpha, \beta, \gamma, k_1, k_2$ は物理パラメータから求まる定数で τ_2 はリンク間に加えられる入力トルクとする. 以上より状態方程式は次のように表せる.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

ここで, $x = [q^T, \dot{q}^T]^T$ であり,

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & -M^{-1}(q)(C(q, \dot{q}) + G(q)) \end{bmatrix}^T$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{m_{12}}{|M|} & \frac{m_{11}}{|M|} \end{bmatrix}^T$$

線形化関数設計

部分線形化で倒立姿勢を安定化する線形化関数は以下のようになる [13,12].

$$h(x) = L + ap(c) \quad (18)$$

ここで, a は制御パラメータ

$$L = m_{11}x_3 + m_{12}x_4$$

$$p(c) = \int \frac{L}{m_{12}} dt$$

$$= x_1 + \frac{x_2}{2} + c$$

$$- \frac{(\gamma - \alpha)}{\sqrt{4\beta^2 - (\alpha + \gamma)^2}} \tanh^{-1} \left(\frac{(\alpha - 2\beta + \gamma) \tan \left(\frac{x_2}{2} \right)}{\sqrt{4\beta^2 - (\alpha + \gamma)^2}} \right)$$

零化空間上では $h \equiv 0$ かつ, p の定義よりゼロダイナミクスは

$$\dot{p} = -\frac{a}{m_{12}}p$$

となる. m_{12} が常に正であることから制御パラメータ a を正に取ればゼロダイナミクスは安定になる. また, 積分定数 c の値によって異なる倒立姿勢に安定化できる. これより時変な線形化関数を用いる手順 2 が完了する. さらに, c が定数であることから線形化関数 (18) 式の相対次数は c によらず一定であることがわかる (手順 3).

最後に線形化関数の時変部分を設計する (手順 4). 直立姿勢に対応した積分定数の値を c_0 , 曲がった姿勢に対応した積分定数の値を c_d とする. 線形化関数 (18) 式の相対次数は c の値によらず 3 なので, 定理 2 より C^3 となるように設計すればよい. 最も簡単なものとして以下のように設計する.

$$c(t) = \begin{cases} c_0 & t < t_s \\ \sum_{i=0}^7 a_i (t - t_s)^i & t \in [t_s, t_e] \\ c_d & t > t_e \end{cases} \quad (19)$$

ここで, a_i は t_s, t_e においても C^3 となるよう以下のよう設計した.

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

$$a_4 = \frac{35c_d}{(t_e - t_s)^4}, \quad a_5 = -\frac{84c_d}{(t_e - t_s)^5},$$

$$a_6 = \frac{70c_d}{(t_e - t_s)^6}, \quad a_7 = -\frac{20c_d}{(t_e - t_s)^7}$$

このように積分定数を設計するとゼロダイナミクスは以下ようになる．

$$\dot{p} = -\frac{a}{k(x_2)}p(c_0) + \dot{c}(t) \quad (20)$$

このように制御器の切り替え中においても1次のゼロダイナミクスだけで解析することができる．

つぎに、制御器の残された自由度である遷移時間の長さ $t_e - t_s$ を注意4を踏まえて定める．制御目標を達成するには 定理2より入力 c が well-defined でなければならないことがわかる．つまり入力変換の特異点は回避するように遷移時間を決める必要がある． $\theta_2 = 130$ 度で倒立している姿勢を目標姿勢 c_d とすると、目標姿勢近傍に入力変換の特異点が存在する．特異点の一つを数値的に求めると $x_p = [-0.048, 2.5, 0.13, 2.2]^T$ と求まる．ゼロダイナミクスがこの特異点を通るとすると x_p における c の値は以下ようになる．

$$c = -L(x_p) - ap(x_p) = 6.588$$

この値を c_p とし、時変関数 (19) 式がこの値をとる時間を t_p とすると

$$t_p = t_s + 0.86(t_e - t_s)$$

であり、この値を $\dot{c}(t)$ に代入すると以下のような $t_e - t_s$ の関数となる．

$$\dot{c}(t_p) = \frac{0.2425}{t_e - t_s}$$

これを (20) 式に代入することで

$$\dot{p} + \frac{a}{k(x_2)}p = \frac{0.2425}{t_e - t_s}$$

となり、特異点の状態 x_p を代入すると左辺は0.36となる．よって特異点 x_p を避けるためには $0.36 > \frac{0.2425}{t_e - t_s}$ を満たせばよく、 $t_e - t_s > 0.67[s]$ となればよい．同様の計算を繰り返すすべての特異点を避けられる十分な長さの遷移時間として $(t_e - t_s) = 3$ と選び数値シミュレーションをおこなった結果を Fig. 12 に示す．ここで、 $t_s = 1$, $t_e = 4$ とした．Fig. 12(a) に示すように線形化関数の値は零を保っており、Fig. 12(b) より状態が発散することなく状態遷移ができていくことがわかる．

5. おわりに

本論文では、部分線形化に基づく二つのコントローラを切り替える問題を議論した．コントローラの切り替えとして時変な零化空間を用いて二つのコントローラに対応した零化空間をつなぐ手法を提案した．これにより零

(a) Time evolution of linearizing function (b) Time evolution of states θ_1 , θ_2 , $\dot{\theta}_1$ and $\dot{\theta}_2$

Fig. 12 Result of numerical simulation with time function $c(t)$. $c(t)$ change to c_d from 1 to 4 second.

化空間から軌道が離れることなくコントローラの切り替えができるようになる．

時変な零化空間を扱うため時不変非線形システムの拡大システム表現を用いて、時変関数 $h(t, x)$ の解析をおこなった．その結果、時変関数は各時刻において t を定数とおいた時不変関数と同じ相対次数を持つことを明らかにした．また、同じ相対次数をもつ線形化関数から生成される零化空間は時変な零化空間によってつなぐことができることを示した．さらに、線形化関数の相対次数に基づく滑らかさを線形化関数に持たせることで、零化空間から離れることなく軌道を遷移させることができることを示した．

具体的なシステムをとおり、提案する零化空間を離れない制御器の切り替えの設計法を説明し、その有効性を確認した．

謝 辞

本研究の一部は平成24年度科研費補助金（基盤研究B, 22360169）により実施しました．ここに感謝申し上げます．

参 考 文 献

- [1] H. Date, Y. Hoshi, M. Sampei and S. Nakaura: Locomotion control of a snake robot with constraint force attenuation; *American Control Conference*, pp. 113–118 (2001)
- [2] K. Nakamura, S. Nakaura and M. Sampei: Control of bipedal running by the angular-momentum-based synchronization structure; *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 3310–3315 (2010)
- [3] R. Ronsse, P. Lefevre and R. Sepulchre: Sensorless stabilization of bounce juggling; *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 22, No. 1, pp. 147–159 (2006)
- [4] Y. Kawaida, S. Nakaura, R. Ohata and M. Sampei: Feedback control of enduring rotary motion of devil stick; *IEEE Conf. on Decision and Control*, Vol. 4, pp. 3396–3401 (2003)
- [5] A. J. Krener, A. Isidori and W. Respondek: Partial and robust linearization by feedback; *IEEE Conf. on*

- Decision and Control*, pp. 126–130 (1983)
- [6] R. Marino: On the largest feedback linearizable subsystem; *Systems & Control Letters*, Vol. 6, pp. 345–351 (1986)
- [7] A. Isidori: *Nonlinear Control Systems*, 3rd ed., Springer (1995)
- [8] T. Shoji, S. Nakaura and M. Sampei: Throwing motion control of the springed pendubot via unstable zero dynamics; *IEEE Multi-Conf. on Systems and Control*, pp. 1602–1607 (2010)
- [9] M. Spong: The swing up control problem for the acrobot; *Control Systems Magazine, IEEE*, Vol. 15, No. 1, pp. 49–55 (1995)
- [10] K. Sekiguchi, M. Sampei and S. Nakaura: Parameterization of the output with respect to the relative degree; *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, pp. 137–143 (2010)
- [11] L. Cambrini, C. Chevallereau, C. H. Moog, R. Stojic and E. de Nantes: Stable trajectory tracking for biped robots; *IEEE Conf. on Decision and Control*, Vol. 5, pp. 4815–4820 (2000)
- [12] M. Yamakita, A. Utano and K. Sekiguchi: Experimental study of automatic control of bicycle with balancer; *IEEE/RSJ Intelligent Robots and Systems*, pp. 5606–5611 (2006)
- [13] L. Cambrini, C. Chevallereau, C. H. Moog, R. Stojic and E. de Nantes: Stable trajectory tracking for

biped robots; *IEEE Conf. on Decision and Control*, Vol. 5, pp. 4815–4820 (2000)

著者略歴

さきぐち かずま
関口和真 (正会員)

1982年7月30日生。2010年6月東京工業大学大学院理工学研究科機械制御システム専攻博士後期課程修了。同年7月東京工業大学理工学研究科助教，2013年4月京都市大学工学部助教となり現在に至る。微分幾何を用いた非線形システムの構造解析，制御系設計の研究に従事。計測自動制御学会，IEEEの会員。

さん べい みつし
三平満司 (正会員)

1960年7月30日生。1987年東京工業大学大学院理工学研究科博士後期課程修了(工学博士)。千葉大学工学部助手，同助教授，東京工業大学工学部助教授，同大学院情報理工学研究科助教授を経て，現在同大学院理工学研究科教授。非線形制御理論とその応用，非ホロノミックシステムの制御，線形制御理論とその応用などの研究に従事。計測自動制御学会，日本ロボット学会，日本機械学会，IEEEなどの会員。