コンパクト多様体上の制御系の受動性*

西田 豪†

Passivity of Control Systems on Compact Manifolds*

Gou NISHIDA†

This paper derives a passivity defined in the neighborhood of a non-degenerate critical point of energy functions of systems on compact manifolds from which analytical solutions cannot be always derived, e.g., systems of nonlinear partial differential equations, but the energy can be regarded as a Morse function. We first show that the change in energy of the systems defined on a closed domain in the neighborhood can be transformed into an energy flow defined on a boundary of the domain in terms of the boundary integrability of Stokes theorem. Next, this boundary power balance is detailed by using the index of the critical points; therefore, it can be considered as the extended passivity.

1. はじめに

本論文では, 解析解は必ずしも明らかでないが, エネルギーが定義できる系, たとえば, 非線形偏微分方程式系などに適用できる, ある拡張された受動性を導出する. 従来, 制御系は, おもに, 解析解に基づく性能評価に基づき, 設計されてきた. しかし, 前述のような系において, それらの定量的な評価は困難である. したがって, そのような系の制御設計においては, 新しい制御指標となり得る, 系の定性的な性質を抽出することが重要となる. ここでは, 系の有するエネルギーに注目し, エネルギーの流れの幾何学的な特徴を, 制御指標とすることを考える.

エネルギーは, 本来, 物理学において, 諸現象を定める本質的な概念として定義される. たとえば, 系の時間対称性に伴って存在する保存量であり, また, 変分問題における Lagrangian を Legendre 変換して得られる Hamiltonian である. また, エネルギーは, 制御工学において, 安定性に係わる重要な概念として用いられる.

たとえば, Lyapunov 関数の候補であり, また, 最適制御問題における Hamilton-Jacobi 方程式を定める. 制御系では, エネルギーの蓄積, 散逸を用いて表現される, 受動性 [2,3] を用いた安定性が考えられている. 一方で, 近年の計算機性能の向上に伴い, 解析解は未知であっても, 数値計算により現象の再現が可能な, 非線形偏微分方程式系の重要性が高まっている. 制御設計と数値解析の融合を考えた場合, このような系に対して, 少なくとも, エネルギーが定義できるのであれば, 受動性に基づき, 最小限の安定性を保証することが可能である [4,5]. なお, 偏微分方程式系からエネルギー関数を導出する方法は, たとえば, 文献 [1] の手法により与えられる.

本論文では, 多様体の位相幾何学的な性質を記述できる, Morse 理論 [6–10] を用い, 受動性の拡張を行う. ここで, 制御系のエネルギー関数が, コンパクト多様体上の Morse 関数とみなすことができると仮定する. また, 制御系は, そのエネルギー関数の流れの臨界点を含む境界を持つ領域上で定義する. そして, 系が満たすべき受動性を, 境界上のエネルギーの流れにより表現された, 領域外部との相互作用により表現する. ここで, エネルギーの流れとは, エネルギー関数から定まる勾配流を意味している. さらに, その境界は, エネルギー関数の臨界点に関する幾何学的な情報に基づき特徴付けられることを述べる.

本論文では, まず, 2 節において, Morse 理論の概略

* 原稿受付 2013 年 1 月 7 日

† 京都大学 大学院 情報学研究科複雑系科学専攻 The Department of Applied Analysis and Complex Dynamical Systems, Graduate School of Informatics, Kyoto University; Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, Kyoto 606-8501, JAPAN

Key Words: passivity, partial differential equations, nonlinear system theory, Morse theory.

の説明を行い、基礎的な定義を行う。3 節では、Morse 理論を用いて、臨界点を含む閉領域の幾何学的な定義を行う。ここでは、最初に、位相幾何学的に最も単純な形状をしている、標準的な領域を定める。そして、この標準的な領域に変形可能な領域を考察の対象とする。4 節で、その臨界点を含む閉領域に対して、受動性を定義する。そして、与えられた領域が、標準的な領域に変形できる場合、等価な受動性が成立することを述べる。5 節では、簡単な例を用いて、本提案概念の説明を行う。最後に、将来の研究について述べる。

2. 数学的準備

本節では、Morse 理論 [6–10] の概要を述べる。なお、用いる表記は、基本的に文献 [6] に従うものとする。

2.1 Morse 関数

M を n 次元コンパクト多様体、 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ をなめらかな関数とする。 $df(p): T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ が零写像である場合、点 $p \in M$ を f の臨界点とよぶ。ここで、 $T_p M$ は、点 p における接空間である。すべての臨界点 p が非退化、すなわち、 $\det Hf(p) \neq 0$ である場合、この f は Morse 関数 ([6], pp. 34) とよばれる。ここで、 $Hf(p) = \partial^2 f(p) / (\partial x_i \partial x_j)$ は Hesse 行列であり、 p まわりの局所座標を $(x_1, \dots, x_n)$ を用いて表している。 $Hf(p)$ の負の固有値の個数は、 p の (Morse) 指数とよばれ、以下では、これを $\text{ind}(p)$ と記す。Morse の補題 ([8], pp. 6) により、Morse 関数 f は、指数 $l = \text{ind}(p)$ の臨界点 p の開近傍 U において、

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) \\ = f(p) - x_1^2 - \dots - x_l^2 + x_{l+1}^2 + \dots + x_n^2 \end{aligned} \quad (1)$$

と表せる。

2.2 安定多様体と非安定多様体

M 上の勾配ベクトル場 $\dot{x} = -\nabla f(x)$ を考える。この $-\nabla f$ から生成される可逆な 1 径数変換群 ([6], pp. 25) を勾配流とよび、 ϕ_t と書く。このとき、任意の $x \in M$ に対し、 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi_t(x)$ は、いずれかの臨界点となる。したがって、すべての臨界点 $p \in M$ に対して、次の、安定多様体 W_p^s 、非安定多様体 W_p^u を定義する ([6], pp. 37)。

$$W_p^s = \{x \in M; \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = p\} \quad (2)$$

$$W_p^u = \{x \in M; \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = p\} \quad (3)$$

指数 $l = \text{ind}(p)$ の臨界点 p において、 W_p^s は、 $\mathbb{R}^{n-l}$ と微分同相な、 M の $(n-l)$ 次元部分多様体であり、 W_p^u は、 $\mathbb{R}^l$ と微分同相な、 M の l 次元部分多様体となる。ここで、 $W_p^s \cap W_p^u = \{p\}$ である。また、任意の二つの臨界点 $p \neq q$ に対して、 $W_p^u \cap W_q^u = \emptyset$ である。すなわち、指数 l の p の W_p^u に含まれる ϕ_t は、その極限において、指数 $(l-1)$ 以下のいずれかの臨界点に到達する。そして、臨

界点以外のすべての点 $x \in M$ は、ある一つの勾配流の上にあるため、 $\bigcup_{p \in M} W_p^u = M$ となる。

2.3 Morse-Smale 条件

任意の二つの臨界点 $p \neq q$ に対して、 M の部分多様体 $I(p, q) = W_p^u \cap W_q^s$ を考える。一般には、 $I(p, q)$ は複雑な形となるため、 W_p^u と W_q^s が、横断的に交差する場合を考える。これは、Morse-Smale 条件 ([6], pp. 38) とよばれ、 $\dim(W_p^u \cap W_q^s) = \text{ind}(p) - \text{ind}(q)$ として表現される。もし、 $\text{ind}(p) = \text{ind}(q)$ であるなら、 $W_p^u \cap W_q^s = \emptyset$ である。すなわち、同じ指数を持つ臨界点同士を結ぶ、安定多様体、非安定多様体は存在しないことを意味している。もし、 $\text{ind}(p) - \text{ind}(q) = 1$ であるなら、 $W_p^u \cap W_q^s = \bigcup_i I_i(p, q)$ 、および、 $i \neq j$ に対して、 $I_i(p, q) \cap I_j(p, q) = \emptyset$ となる。ここで、各 $I_i(p, q)$ は積分曲線の像であり、 $\mathbb{R}$ と同相である。すなわち、ある臨界点の非安定多様体は、指数が一つだけ低い臨界点の安定多様体でもあり、それらは、互いに交差ししない曲線の集合によって表されることを意味している。

実際には、コンパクト多様体では、任意に Riemann 計量を取ったときに、Morse 関数 f にわずかな摂動を与えることで、任意の勾配流 ϕ_t が Morse-Smale 条件を満たすように変化できる ([6], pp. 39)。

2.4 等高線分解

Morse-Smale 条件を満たす、Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の勾配流 ϕ_t を考える。このとき、 f の臨界点 p, q に対して、

1) $\text{ind}(p) < \text{ind}(q)$ 、ならば、 $f(p) < f(q)$ 、

2) $\text{ind}(p) = \text{ind}(q)$ 、ならば、 $f(p) = f(q)$

を満たすように、 f は連続変形が可能 ([9], pp. 127) である。したがって、一般性を失うことなく、

$$f(p) = \text{ind}(p) \quad (4)$$

を満たすように変形できる。この f を、指数づけられた Morse 関数とよぶ。この場合、 f の像は連続区間 $[0, n]$ となる、すなわち、 M の高さを f の値で表し、各臨界点 p を、その指数 $\text{ind}(p)$ と一致する高さに、 M 内で移動することに等しい。以下では、この指数づけられた Morse 関数を考え、単に、これを Morse 関数とよぶ。

つぎに、指数 l 以下の臨界点をすべて含む、 M の部分多様体 M_l とその境界 ∂M_l 、および、同じ指数 l を持つ臨界点をすべて含む、部分多様体 N_l を定義する ([6], pp. 82)。

【定義 1】 M を n 次元コンパクト多様体、 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ を Morse 関数とする。指数 $l = \text{ind}(p)$ の臨界点に対して、次の部分多様体を定義する。

$$M_l = f^{-1}\left(\left[0, l + \frac{1}{2}\right]\right) \quad (5)$$

$$N_l = f^{-1}\left(\left[l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right]\right) \quad (6)$$

ここで, $M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ であり, 次の境界を持つ.

$$\partial M_l = h^{-1}\left(l + \frac{1}{2}\right), \quad \partial N_l = \partial M_l \cup \partial M_{l-1} \quad (7)$$

つぎに, 上記で定義した階層 N_l における, 安定多様体と不安定多様体を, 次のように表す [6] (pp. 82).

【定義 2】 ある臨界点 p に対して, 次の $(n-l)$ 次元球体 $\mathbb{D}^{n-l}$ と微分同相な V_p^s , および, l 次元球体 $\mathbb{D}^l$ と微分同相な V_p^u を定義する.

$$V_p^s = W_p^s \cap N_l, \quad \partial V_p^s = V_p^s \cap \partial M_l \quad (8)$$

$$V_p^u = W_p^u \cap N_l, \quad \partial V_p^u = V_p^u \cap \partial M_{l-1} \quad (9)$$

ここで, ∂V_p^s と ∂V_p^u は, それぞれ, $(n-l-1)$ 次元球面 $\mathbb{S}^{n-l-1}$ と $(l-1)$ 次元球面 $\mathbb{S}^{l-1}$ に微分同相である.

3. 臨界点近傍の幾何学的構造

本節では, 前節で述べた Morse 理論を用いて, 臨界点近傍の幾何学的な性質を議論する. 最初に, 臨界点近傍の領域と, 標準的とよぶ, その理想的な場合 (Fig. 1) を考える. 次節で, これらの領域の受動性は, 等価であることが示される.

3.1 臨界点を含む領域の定義

【定義 3】 指数 l のある一つの臨界点 p を内点として含み, $\mathbb{D}^n - \bigcup_{j=1}^m \mathbb{B}_j^n$ と同相な, M の n 次元部分多様体 Z_p を考える. ここで, $\mathbb{D}^n$ は n 次元閉球, また, $1 \leq j \leq m$ に対する $\mathbb{B}_j^n$ は, $\mathbb{D}^n$ 内部に含まれる n 次元開球とする. したがって, Z_p は, 境界を持つ連結な閉領域となる.

つぎに, 境界 ∂Z_p を通じて勾配流が, Z_p に流入するか, 流出するか, そのどちらでもないかによって, ∂Z_p を次のように分類する.

【定義 4】 N_l における p に対する, 閉領域 Z_p の境界 ∂Z_p を, 次の三つの部分境界に分割して考える.

$$\partial Z_p = \partial Z_p^- \cup \partial Z_p^+ \cup \partial Z_p^0 \quad (10)$$

ここで, M 上の Morse 関数によって生成される勾配流 ϕ_t が, Z_p 内に流入するような部分境界 ∂Z_p^- , および, Z_p 外へ流出するような部分境界 ∂Z_p^+ , また, 勾配流の積分曲線と接する部分境界 ∂Z_p^0 を定義した.

閉領域 Z_p は, 一般に, ∂Z_p^- と ∂Z_p^+ が複数の連結成分からなる場合や, その内部に含まれるような穴がある場合を含んでいる (Fig. 2 の左を参照).

3.2 臨界点を含む領域の位相的性質

まずは, 閉領域 Z_p が, 位相幾何学的に単純な場合を考える. そして, 後に, この議論を, 定義 3 で述べたような, 一般の場合に拡張する.

【定義 5】 指数 l の臨界点 p に対する, $V_p^s \cup V_p^u$ を考える. N_l における, $V_p^s \cup V_p^u$ の閉近傍 Z_p を, 次のように定義する.

$$Z_p = \mathcal{C}_{N_l}(V_p^u \cup V_p^s), \quad V_p = Z_p - (V_p^u \cup V_p^s) \quad (11)$$

ここで, $\mathcal{C}_{N_l}(\cdot)$ は, N_l 内で近傍を取り, さらに, その閉包を取ることを意味し, $-$ は差集合を表す. このとき, 閉領域の境界 ∂Z_p は, 次のように定義される.

$$\partial Z_p^- = Z_p \cap \partial M_l \quad (12)$$

$$\partial Z_p^+ = Z_p \cap \partial M_{l-1} \quad (13)$$

$$\partial Z_p^0 = \partial Z_p - (\partial Z_p^- \cup \partial Z_p^+) \quad (14)$$

このような Z_p を, 標準的とよぶ. また, 標準的な領域は, 次のような変形のもとでも, 標準的であるとする. すなわち, 境界 ∂Z_p^+ と ∂Z_p^- を, それらの境界上の各点が通過している f の勾配流に沿う方向に, 連結のまま連続的に変形することを考える. ここで, この変形は, それらの境界での f の値が $\text{ind}(p)$ を超えない範囲で行う. また, 境界 ∂Z_p^0 も, 同時に, f の勾配流に沿う方向に伸縮させ, Z_p が有界閉領域を保つものとする. 言い換えると, この変形で生じる領域の変化分は, それぞれ, $\partial Z_p^+ \times [0, 1]$ と $\partial Z_p^- \times [0, 1]$ と微分同相な領域として表現できる.

標準的な Z_p は, 内部に穴を含まず, すなわち, n 次元閉球 $\mathbb{D}^n$ と同相であるが, さらに次のことがいえる.

【命題 1】 標準的な Z_p は, Z_p^0 を一点に変形した場合, $(n-l)$ 次元球体 $\mathbb{D}^{n-l}$ と l 次元球体 $\mathbb{D}^l$ の直積, $\mathbb{D}^{n-l} \times \mathbb{D}^l$ に微分同相である.

すなわち, 標準的な Z_p は, ハンドル体 [9] の特殊な場合として解釈することができる. この証明の前に, まずは, Z_p 内部において, 臨界点 p を通過しない勾配流だけが存在する, V_p の性質についてまとめる.

【補題 1】 V_p は, $(V_p \cap \partial M_l) \times [0, 1]$ と微分同相である.

(証明) 区間 $[l-1/2, l+1/2]$ に制限された多様体 V_p は, その区間内に Morse 関数 f の臨界点がなければ, 直積 $f(l+1/2)^{-1}|_{V_p \cap \partial M_l} \times [0, 1] = (V_p \cap \partial M_l) \times [0, 1]$ に微分同相であることがいえる ([9], pp. 71). ここで, $|_{V_p \cap \partial M_l}$ は, $V_p \cap \partial M_l$ への制限を表す. 以下では, V_p に臨界点がないことを示す. 臨界点 p は, 非退化であるため, 孤立している ([8], pp. 8). したがって, その近傍は, 必ず, 臨界点を含まないように取ることができる. V_p には, 近傍 Z_p を取る元の集合である V_p^s と V_p^u は, 含まれない. よって, ∂M_l における, $V_p \cap \partial M_l$ には, $V_p^s \cap \partial M_l$ は含まれない. いま, 写像 $h: f^{-1}(l+1/2)|_{V_p \cap \partial M_l} \times [0, (l+1/2) - (l-1/2)] \rightarrow V_p$ を, V_p 内の ϕ_t により定義すると, ϕ_t の解の一意性と可逆性により, h は微分同相写像となる ([9], pp. 72). これが求めるべきものであった.

言い換えると, $V_p \cap \partial M_l$ から流れ出る勾配流 ϕ_t は, 助変数 t の増加とともに, 臨界点 p に向かう W_p^s の近傍を流れ, p の近傍を通過すると, 今度は, p から流れ出る W_p^u の近傍を流れ, 最終的に, ∂M_{l-1} に到達する.

以上の準備により, 命題 1 の証明を与える.

(命題 1 の証明) 最初に, 臨界点 p 近傍における局所座標系について考える. 仮定により, $f(p)$ は, 臨界点 p において, 定数 $l = \text{ind}(p)$ を取る. いま, ある小さな正数 ϵ を用いて, (1) の値は, p 近傍において, $l - \epsilon \leq f \leq l + \epsilon$ と表すことができる. したがって, $\bar{f} := f - l = -x_1^2 - \dots - x_l^2 + x_{l+1}^2 + \dots + x_n^2$ とおくと, $f^{-1}([l - \epsilon, l + \epsilon])$ に制限された, p の局所座標系において, 次のように書ける.

$$W_p^s = \{(0, \dots, 0, x_{l+1}, \dots, x_n) \mid \bar{f} \leq \epsilon\} \\ = \{x_{l+1}^2 + \dots + x_n^2 \leq \epsilon\} \quad (15)$$

$$W_p^u = \{(x_1, \dots, x_l, 0, \dots, 0) \mid \bar{f} \geq -\epsilon\} \\ = \{x_1^2 + \dots + x_l^2 \leq \epsilon\} \quad (16)$$

これは, 定義より明らかのように, $(n-l)$ 次元球体 $\mathbb{D}^{n-l}$ と l 次元球体 $\mathbb{D}^l$ の関数表示であり, また, (15) と (16) 式の局所座標の取り方は, とともに部分多様体の定義 ([9], pp. 39) ([6], pp. 37), そして, $(x_{l+1}, \dots, x_n)$ と $(x_1, \dots, x_l)$ によって定まる空間は, 互いに補空間となっている. 一方, p の近傍では, 一般に, $\bar{f}$ は, 次のように書ける.

$$U_p = \{(x_1, \dots, x_n) \mid -\epsilon \leq \bar{f} \leq \epsilon\} \\ = \{|x_{l+1}^2 + \dots + x_n^2 - (x_1^2 + \dots + x_l^2)| \leq \epsilon\} \quad (17)$$

(17) 式の局所表示は, (15) と (16) を特殊な場合として含み, また, $x_{l+1}^2 + \dots + x_n^2$, および, $x_1^2 + \dots + x_l^2$ は, 局所座標系において, 有限の正值を取る. したがって, p 近傍における局所座標系において, Z_p は, $\mathbb{D}^{n-l} \times \mathbb{D}^l$ として表現できる. つぎに, この局所座標系を, N_l 内で, 勾配流 ϕ_t に沿って N_l 内で拡大することを考える. f は指数付けられているため, N_l 内において, $f(p) \neq l$ の領域では臨界点は存在しない. したがって, Z_p 内の区間 $[l + \epsilon, l + 1/2]$ と $[l - 1/2, l - \epsilon]$ には, 勾配流 ϕ_t のみが存在する. 補題 1 と同様に, これらの区間において, ϕ_t を微分同相写像とすることで, $(Z_p \cap \partial M_l) \times [0, 1/2 - \epsilon]$, および, $(Z_p \cap \partial M_{l-1}) \times [0, 1/2 - \epsilon]$ が, Z_p から p 近傍を除いた部分と微分同相となる. よって, 題意が示せる.

【命題 2】 標準的な閉領域 Z_p を考える. Z_p^0 を一点に変形した場合, ∂Z_p^- は, $\mathbb{S}^{n-l-1} \times \mathbb{D}^l$ に微分同相, また, ∂Z_p^+ は, $\mathbb{S}^{l-1} \times \mathbb{D}^{n-l}$ に微分同相である.

(証明) ∂Z_p^- は, Z_p の内で, ∂M_l と重なりを持つ部分, すなわち, $C_{N_l}(V_p^s)$ を ∂M_l に制限したものである. この制限 $C_{N_l}(V_p^s)|_{\partial M_l}$ は, ∂M_l における ∂V_p^s の近傍からなる. ∂V_p^s は, 定義 2 より, $\partial \mathbb{D}^{n-l} = \mathbb{S}^{n-l-1}$ と微分同相である. 一方, 命題 1 より, Z_p は, $\mathbb{D}^{n-l} \times \mathbb{D}^l$ に微分同相である. したがって, ∂M_l における ∂V_p^s の近傍は, $\partial \mathbb{D}^{n-l} \times \mathbb{D}^l = \mathbb{S}^{n-l-1} \times \mathbb{D}^l$ に微分同相である. ∂Z_p^+ についても, 同様に, ∂M_{l-1} における ∂V_p^u の近傍は, $\mathbb{D}^{n-l} \times \partial \mathbb{D}^l = \mathbb{D}^{n-l} \times \mathbb{S}^{l-1}$ に微分同相であることにより示せる.

Fig. 1 指数 l をもつ臨界点と 標準的な Z_p

最後に, 標準的な Z_p に対して, 勾配流のみからなる, 次の領域を取ることができる.

【定義 6】 N_l における開領域 Y_l を, 標準的な Z_p を用いて,

$$Y_l = N_l - \bigcup_{p \in N_l} Z_p \quad (18)$$

と定義する.

3.3 臨界点を含む領域の標準化

本節では, 定義 3 の一般的な Z_p を, 標準的となるように変形する方法を述べる. 次節において, この変形のもとで, Z_p に関するパワー平衡が不変であることを述べる.

まず, Z_p 内部の穴を埋める変形を定義する.

【定義 7】 閉領域 Z_p を考える. Z_p が一点可縮でない場合, 境界 ∂Z_p は連結でない. いま, ∂Z_p を, 連結成分に分けて考え, この部分境界に囲まれる, 有界かつ閉となる M 上の領域を, それぞれ O_i と定義する. ここで, $1 \leq i \leq k$ で, k は O_i の個数とする. すなわち, $\dot{Z}_p = Z_p \cup \bigcup_{i=1}^k O_i$ は, 一点可縮となり, Z_p の穴をすべて埋めた領域に等しい.

つぎに, 穴を埋めた $\dot{Z}_p$ を, 勾配流の積分曲線に沿って変形する手順を与える. この手順により, $\dot{Z}_p$ の凹凸を減らしていき, 標準的領域に変形が可能となる.

【定義 8】 ある区間 $I = [a, b]$ に対して, $N_I = \{x \in M \mid a \leq f(x) \leq b\}$, および, $M_I = \{x \in M \mid 0 \leq f(x) \leq b\}$ を定義する. N_I 上に制限された勾配流の積分曲線の集合である, 連結な $(n-1)$ 次元閉部分多様体 Θ_I を考える. すなわち, Θ_I は, $(\Theta_I \cap \partial M_l) \times [0, 1]$ と微分同相とする.

【定義 9】 与えられた閉領域 Z_p に対して, $\dot{Z}_p$ を考える. いま, 境界 $\partial \dot{Z}_p$ が, $\partial \dot{Z}_p - (\partial \dot{Z}_p \cap \Theta_I)$ により, 二つの連結成分に分割されるような, Θ_I を考える. この分割された連結成分ごとの境界と分割面 Θ_I によって囲まれる, M 上の二つの有界閉領域に対して, 臨界点 p を含む方を $\dot{Z}_p'$ と定義し, 他方を G_j と定義する. ここで, $1 \leq j \leq l$ は, l は G_j の個数とする.

(注意 1) 定義 9 において, $\dot{Z}_p$ の凹凸に応じて, 次の二つの場合が考えられる. すなわち, i) $\dot{Z}_p = \dot{Z}_p' \cup G_j$, かつ, $\dot{Z}_p \cap \Theta_I = \dot{Z}_p' \cap G_j$ であり, $\dot{Z}_p' \subset \dot{Z}_p$ となる場合,

および, ii) $G_j = \dot{Z}'_p \cap G_j$ であり, $\dot{Z}_p \subset \dot{Z}'_p$ となる場合である.

【例題 1】 Fig. 2 の左は, 2次元コンパクト多様体の指数 1 の臨界点 p 近傍において定義された, 非標準的な Z_p の例を表している. ここで, 色分けされた影の部分全体が Z_p であり, 勾配流 ϕ_t が Z_p に流れ込む境界, すなわち, Z_p^- を黒の実線で表している. Z_p^+ は Z_p 領域内部と同じ色の境界である. なお, Z_p^0 は, ϕ_t の積分曲線と接する点で定義される (図では省略). また, Z_p 内部の左の穴を, O_1 により埋めることで, Z_p を $\dot{Z}_p$ として考えることができる. 一方で, G_1 は, 薄い影で表された部分であり, ある ϕ_t の積分曲線によって, 濃い影で表された部分 $\dot{Z}'_p$ と分割される. これは, 注意 1 で述べた i) の場合に相当する. G_2 は, Z_p の境界の凹みを表しており, $\dot{Z}'_p$ を作る際に, 注意 1 の ii) の場合に相当し, $G_2 \subset \dot{Z}'_p$ となる.

最後に, 次の補題は, 上記の θ_I を用いた領域の分割を, Z_p^0 が一点の場所から連続的に行うことと等価である. また, この補題の逆を考えることで, 標準的な Z_p から, Z_p^0 の部分境界を 1 点につぶす変形が可能となる.

【補題 2】 与えられた $\partial\dot{Z}_p$ と, 1 点 $x \in \partial\dot{Z}_p$ で接している θ_I を考える (Fig. 2 の右を参照). このとき, θ_I の近傍において, $\theta_I \cap \theta'_J = \emptyset$, かつ, $(\dot{Z}_p - \partial\dot{Z}_p) \cap \theta'_J \neq \emptyset$, すなわち, $\dot{Z}_p$ の内部とのみ交差するような θ'_J を選ぶことができる場合, 定義 9 における, $\dot{Z}'_p$ と G_j が定まる. ここで, J は, $\partial\dot{Z}_p$ を二つに分割するような区間を表す.

(証明) n 次元多様体 M は, 勾配流の積分曲線の集合として定義されることから, θ_I の ϵ -近傍において, いくらでも近い距離 $\delta < \epsilon$ に, 流れに沿って θ_I と平行な θ'_I を選ぶことができる. このような, θ'_I は, 距離 δ を滑らかに変化させることで, θ_I の ϵ -近傍全体を覆うことができる. したがって, $\dot{Z}_p$ は, 点 p を含む連結な閉領域として定義していることから, $\dot{Z}_p$ の内部 $\dot{Z}_p - \partial\dot{Z}_p$ と交わりを持つような θ'_I が常に存在する. この θ'_I は, 定義区間を変更することで, 別の θ'_J に変形できる. θ'_J は, $\partial\dot{Z}_p$ を 2 分割すると仮定しているため, 定義 9 の状況を考えることができる.

【例題 2】 Fig. 2 の右は, 例題 1 で考えた領域 Z_p を標準的な領域に変形した図である. 影の内部の, 実践と破線で囲まれた薄い影の領域が, 標準的な Z_p となる. ここで, 実線は, 図のように, $Z_p^\pm$ を表している. 破線は, Z_p^0 を表しており, V_p^s と V_p^u から等間隔に取った勾配流の積分曲線に沿っていることがわかる.

4. コンパクト多様体上の受動性

一般に, 与えられた系に対して, エネルギー関数が定義できるかは, 変分逆問題を解くことで検証できる [1]. したがって, 本論文では, エネルギー関数が存在する系を考察する. 本節では, これらの系が定義される, エネルギー関数の臨界点 p を一つだけ含む領域 Z_p の境界に

Fig. 2 非標準的な領域 (左) とその標準化 (右)

において定まる, ある受動性を導出する. その臨界点の指数 $\text{ind}(p)$ の情報から, その境界 ∂Z_p 上のエネルギーの流れの平衡式を導く.

4.1 エネルギー密度汎関数の定義

まず, 与えられたエネルギー関数から, 次のような変数 u と y を定義し, 後に, この変数を入出力変数と考えることで, 受動性の定義を行う.

【定義 10】 与えられた M 上のエネルギー (密度) 関数 $\mathcal{E}$ に対して, Z_p 上のエネルギー密度汎関数

$$\mathcal{E} = \int_{Z_p} \mathcal{E} dx \quad (19)$$

を定義する. ここで, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(h(x))$ であり, $h \in C^\infty(M)$ は $x \in M$ の関数とする. このとき, 次のような変数 u と y を定義する.

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_{Z_p} \sum_{i=1}^r \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h_i} \frac{dh_i}{dt} dx = \int_{Z_p} y \cdot u dx \quad (20)$$

$$u = \left(\frac{dh_1}{dt}, \dots, \frac{dh_r}{dt} \right), \quad y = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h_r} \right) \quad (21)$$

ここで, $\partial \mathcal{E} / \partial h_i$ は, x の関数 $h(x) = (h_1(x), \dots, h_r(x))$ を独立変数と考えて偏微分を取ったものである [11].

以上のように, 系のエネルギーが既知であれば, 変数対 u と y は, 自然に定まると考えてよい. なお, 定義 10 における, h の例として, 各 $x \in M$ における変位を表す関数などが挙げられる. また, 積 $y \cdot u$ がエネルギーの時間導関数となっていることから, 変数対 u と y は, ボンドグラフ理論における, エフォート変数とフロー変数に相当している [12]. すなわち, このような入出力による相互接続を通じて, 多重物理系のネットワーク構造が記述できることが知られている.

4.2 エネルギー密度に関する保存則

本論文では, エネルギー関数 $\mathcal{E}$ を Morse 関数と考える. まず, エネルギー関数に対する, 次のような関係を導入する.

【定義 11】 M 上のエネルギー関数 $\mathcal{E}$ に関する, 次の保存則を定義する.

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} := -\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (22)$$

ここで、関数 $\phi = \mathcal{E}x$ は、連続の方程式の流束を意味する．
つぎに、 Z_p 上のエネルギーの変化を、境界 ∂Z_p 上の関数に変換するために、次の Stokes の定理を用いる．

【補題 3】 M 上の任意 $(n-1)$ 形式 $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ に対して、次の Stokes の定理が成り立つ．

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega \quad (23)$$

ここで、 A は、 M の n 次元部分多様体である．

【命題 3】 M 上で定義される系に対して、 M の外部環境との相互作用を意味する、外部から M へ流入出するエネルギーの総和は零であると仮定する．いま、変数 (21) を、 $1 \leq i \leq n=r$ に対して、 $h_i(x) = x_i$ として定義する．このとき、 Z_p におけるエネルギー密度汎関数の時間変化は次のようになる．

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_{Z_p} y \cdot u \, dx = - \int_{\partial Z_p} \mathcal{E} X \, ds \quad (24)$$

ここで、 $X = (X_1, \dots, X_n)$ はベクトル場であり、また、 $ds \in \Omega^{n-1}(M)$ とした．

(証明) エネルギー密度汎関数の時間変化は、(22) と (23) 式を用いて、

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= \int_{Z_p} y \cdot u \, dx = \int_{Z_p} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \, dx = - \int_{Z_p} \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{E} X) \, dx \\ &= - \int_{\partial Z_p} \mathcal{E} X \, ds \end{aligned} \quad (25)$$

となる．ここで、 $X = dx/dt$ とおいた．

(注意 2) 命題 3 で仮定した、流入出エネルギーの総和が零である場合とは、次のように解釈できる．すなわち、 M 外部からのエネルギーの授受に関して、指数 n の臨界点をエネルギーの供給点、指数 0 の臨界点をエネルギーの散逸点と解釈し、散逸量と供給量が平衡していると仮定している．また、 M 上で定義される系を、各 Z_p 上で定義される系の結合系と考え、境界における Morse 関数の変化を、系同士のエネルギー相互作用と考えている．

4.3 コンパクト多様体上の平衡式

以上の準備により、次の定理が導かれる．

【定理 1】 Morse 関数 $\mathcal{E}$ が定義されている、 n 次元コンパクト多様体 M を考える． M の部分多様体 Z_p 上で定義される、エネルギー密度汎関数 $\mathcal{E}$ を持つ、偏微分方程式で表現される系 Δ を考える．ここで、 p は、指数 $l = \text{ind}(p)$ を持つ $\mathcal{E}$ の臨界点である． X_l^- と X_l^+ を、それぞれ、 ∂M_l と ∂M_{l-1} に制限されたベクトル場とする．このとき、 Z_p のエネルギー密度汎関数の時間変化 $\dot{\mathcal{E}}$ は、その境界 ∂Z_p における、次の関係より求まる．

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_{\partial Z_p^-} \mathcal{E} X_l^- \, ds + \int_{\partial Z_p^+} \mathcal{E} X_l^+ \, ds \quad (26)$$

(証明) 定義より、 ∂Z_p^0 上には、その境界に沿って流れる勾配流しか存在しない．この勾配流は、 Z_p 内部への

$\mathcal{E}$ の変化には寄与しない．したがって、(24) 式を $\partial Z_p^\pm$ に対して考え、 $X_l^\pm$ を代入すると (26) 式を得る．

定理 1 は、階層 N_l 全体の関係としても表現できる．

【系 1】 N_l の密度汎関数の時間変化 $\dot{\mathcal{E}}$ は、境界 ∂M_l 、および、 ∂M_{l-1} における、次の関係により求まる．

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_{\partial M_l} \mathcal{E} X_l^- \, ds + \int_{\partial M_{l-1}} \mathcal{E} X_l^+ \, ds \quad (27)$$

(証明) N_l は、(18) 式のように、臨界点を含む領域 $\cup_p Z_p$ と、勾配流のみを含む領域 Y_l に分解できる．領域 Y_l では、 ∂M_l から流れ込んだ勾配流が、そのまま通過し、 ∂M_{l-1} から流れ出るため、両境界においてエネルギーの変化が計算できる．

4.4 臨界点を含む領域とその境界における受動性

本節では、これまでの議論をもとに、非標準的な領域とその境界における受動性を定義する．

最初に、標準的な領域への変形は、前節で述べた平衡式に影響を及ぼさないことを述べる．

【命題 4】 閉領域 Z_p を考える．いま、定義 7 の O_i 、および、定義 9 の G_j を考え、それらの領域におけるエネルギーの湧き出し、散逸がないと仮定する．このとき、 Z_p から $\dot{Z}_p$ への変形は、定理 1 における、エネルギー密度汎関数の時間変化 $\dot{\mathcal{E}}$ に影響しない．

(証明) O_i と G_j は共に、臨界点を含まない．したがって、これらの領域内部には、勾配流のみが存在するので、内部でエネルギーの散逸がなければ、流入エネルギーの量と同じ量だけ流出する．すなわち、これらの領域に対して、(26) 式を計算すれば、領域内部のエネルギー変化が、その境界の変化に置き換えることができる．したがって、 Z_p 全体に対する (26) に影響はない．

つぎに、受動性を空間領域に拡張した関係を、(26) と (27) 式から導く．また、この拡張では、臨界点の指数から導かれる、境界における勾配流の特徴を導入して、関係を具体化させているといえる．まず、従来の受動性の定義を確認する．

【定義 12】 状態 $x(t)$ 、入力 $u(t)$ 、出力 $y(t)$ を持つ系が、受動的とは、時間区間 $t_0 \leq t \leq t_1$ において、すべての入力 $u(t)$ と初期値 $x(t_0)$ に対して、

$$\mathcal{E}(x(t_1)) - \mathcal{E}(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot u(t) \, dt \quad (28)$$

を満たす非負連続関数 $\mathcal{E}(x)$ が存在する場合である．ここで、 $\mathcal{E}(0) = 0$ である．

最初は、入力 u と出力 y が、分布入出力、すなわち、 $x \in N_l$ の関数として与えられている場合を考える．この場合は、Stokes の定理を使わず、次の関係が導出される．

【定義 13】 Morse 関数 $\mathcal{E}$ が定義されている、 n 次元コンパクト多様体 M を考える． M の部分多様体 A 上で定義される、エネルギー密度汎関数 $\mathcal{E}$ を持つ、偏微分方程式で表現される系 Δ を考える．ここで、 p は、指数

$l = \text{ind}(p)$ を持つ $\mathcal{E}$ の臨界点, また, $A \in \{Z_{p_i}, N_l\}$, すなわち, A は集合 $\{\dots\}$ のうちのいずれかとする. このとき, 系 Δ の受動性は,

$$\mathcal{E}(x(t_1)) - \mathcal{E}(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} \int_A y(t) \cdot u(t) dx dt \quad (29)$$

と定義できる. ここで, A 上のベクトル場 X_l を用いて $u = X_l$, および, $y = \partial \mathcal{E} / \partial x$ と定義した.

(29) 式は, (20) 式の両辺を時間区間 $t = [t_0, t_1]$ で積分することで得られる.

上記の関係は, 入力 u と出力 y が, 境界入出力, すなわち, $x \in \partial Z_p$, もしくは, $x \in \partial N_l$ の関数として与えられている場合にも成立する.

【定義 14】 Morse 関数 $\mathcal{E}$ が定義されている, n 次元コンパクト多様体 M の部分多様体 $A^\pm$ 上で定義される, 偏微分方程式で表現される系 Δ を考える. ここで,

$$(A^-, A^+) \in \{(Z_p^-, Z_p^+), (\partial M_l, \partial M_{l-1})\} \quad (30)$$

とする. このとき, 系 Δ の受動性は,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x(t_1)) - \mathcal{E}(x(t_0)) \leq & \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\partial A^-} y^-(t) \cdot u^-(t) ds \right. \\ & \left. + \int_{\partial A^+} y^+(t) \cdot u^+(t) ds \right) dt \end{aligned} \quad (31)$$

と定義できる. ここで, $u = X_l^\pm$, および, $y = \mathcal{E}$ と定義した.

(31) 式は, (26) と (27) 式の両辺を時間区間 $t = [t_0, t_1]$ で積分することで得られる.

【定理 2】 Morse 関数 $\mathcal{E}$ が定義されている, n 次元コンパクト多様体 M を考える. M の部分多様体 Z_p 上で定義される, エネルギー密度汎関数 $\mathcal{E}$ を持つ, 偏微分方程式で表現される系 Δ を考える. ここで, p は, 指数 $l = \text{ind}(p)$ を持つ $\mathcal{E}$ の臨界点である. 領域 Z_p が, 標準的な領域に変形できる場合に, その変形における, 閉領域 O_i, G_j でエネルギーの湧き出し, 散逸がないと仮定する. すなわち, 変形の際に消去された, 境界 $\partial O_i, \partial G_j$ に含まれる境界 $\partial Z_p^\pm$ 上で定義された入出力 $u^\pm, y^\pm$ にも, 変化がないと仮定する. このとき, Z_p に関する受動性 (29) と (31) が成立するとき, その標準化した領域 $\dot{Z}_p$ に関する受動性も成立する.

(証明) 命題 4 と同様に, 閉領域 O_i, G_j では, その境界 $\partial O_i, \partial G_j$ も含め, エネルギーの変化の総和は零となる. したがって, 標準化した領域 $\dot{Z}_p$ の境界 $\partial \dot{Z}_p$ における, 入出力 $u^\pm, y^\pm$ に対して定義される (29) と (31) は, Z_p に対して定義されたものと等価となる.

4.5 例題

Fig. 3 のような, 変形された 2 次元トーラス $\mathbb{T}^2$ を考える. $M = \mathbb{T}^2$ は, 電気伝導体によって作られていると仮定し, M における電気回路を考える. ここで, 入力 u を電流, 出力 y を電圧と定義する. いま, M 上のエネ

ギー密度関数 $\mathcal{E}$ が, Fig. 3 の垂直下方向に勾配流を持つ, Morse 関数と考えられると仮定する. このとき, 指数 2 の臨界点は, A と B , 指数 1 の臨界点は, C と D と E , また, 指数 0 の臨界点は, F である. 臨界点 A と B は, エネルギーの湧き出し点, 臨界点 F は, エネルギーの吸い込み点と考える. たとえば, 外部電源や, より高いエネルギーを持つ回路, および, アースや散逸要素などに接続されている場合などが考えられる. すなわち, Z_A, Z_B から発生したエネルギーの流れが, Z_C, Z_D, Z_E を含む, ∂M_1 と ∂M_0 に挟まれる階層 N_1 を通過して, Z_F に流れ込む様子を表している.

このとき, 領域 Z_C, Z_D, Z_E におけるエネルギー密度汎関数の時間変化は,

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_{Z_I} y \cdot u dx \quad (32)$$

と定義できる. もし, Z_I 全域にわたって, 入力 u と出力 y が利用可能な場合, Z_I で定義される系に対して, 受動性 (29) が適用できる. ここで, $I = \{C, D, E\}$ とした. このとき, M 内で, Z_I は, 2 次元部分多様体であり, W_I^u と W_I^s は, 1 次元部分多様体である. また, 階層 N_1 におけるエネルギー密度汎関数の時間変化は,

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_{N_1} y \cdot u dx \quad (33)$$

と定義できる. 同様に, N_1 全体に, 入力 u と出力 y が利用可能な場合, N_1 に含まれる系に対して, 受動性 (29) が適用できる.

上で述べた入出力変数は, 受動性に基づく制御を考えた場合, 領域 Z_I , または, N_1 全体にわたって利用可能でなければならず, すなわち, 分布入出力が必要となるため, あまり実用的ではない. しかし, これらの関係は, 境界におけるエネルギーの流れの計算に変換できる. すなわち, (32) は,

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_{\partial Z_I^-} y^- \cdot u^- ds + \int_{\partial Z_I^+} y^+ \cdot u^+ ds \quad (34)$$

と書き替えることができる. そして, 境界 ∂Z_I で定義される, 入力 $u^\pm$ と出力 $y^\pm$ を用いて, Z_I で定義された系に対して, 受動性 (31) が適用できる. ここで, 同様に, $I = \{C, D, E\}$ であり, M 内で, ∂Z_I は, 1 次元球面 S^1 に同相である. また, (33) 式は,

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_{\partial M_l} y^- \cdot u^- ds + \int_{\partial M_{l-1}} y^+ \cdot u^+ ds \quad (35)$$

と書き替えられる. 同様に, 境界 $\partial N_l = \{\partial M_l, \partial M_{l-1}\}$ で定義された, 入力 $u^\pm$ と出力 $y^\pm$ を用いて, N_l で定義された系に対して, 受動性 (31) が適用できる.

結論として, 制御系の持つエネルギーに関する幾何学的性質より導出された, 境界 ∂Z_I , もしくは, ∂N_l で定義された, 入力 $u^\pm$ と出力 $y^\pm$ を用いて, 受動性に基

Fig. 3 変形した T^2 の臨界点と非安定多様体

く境界制御が適用可能となる。また、上記の関係をを用いて、エネルギー関数の流れの構造変化に関する制御、観測が適用できる可能性がある。

5. おわりに

本論文では、必ずしも解析解が得られていないが、エネルギーが定義できるような、コンパクト多様体上で定義される系に対して、エネルギーの流れの臨界点の情報を用いて、詳細化された受動性を定義した。最初に、非退化な臨界点を含むエネルギー関数を Morse 関数と考え、その Morse 関数の臨界点を含む閉領域を定義した。そして、その閉領域が、位相幾何学的に単純な場合を、標準的な領域とよんだ。つぎに、その臨界点の近傍で定義される領域、および、その境界における、エネルギー関数の勾配流を、空間に関して積分し、Stokes の定理を適用することにより、エネルギーの流入出に関する平衡式を求め、その関係式を時間に関して積分することで、新たな受動性を定義した。また、与えられた領域が、標準的な領域に変形できる場合には、これらのパワー平衡式や、受動性の定義式で定められる関係は不変であることを述べた。

受動性を用いた境界制御標準形の一つである、分布定数ポート Hamilton 系は、Stokes-Dirac 構造を持つことが示されている [13]。将来の課題として、本論文で定義した、エネルギー流の平衡式と受動性を用いて、Stokes-Dirac 構造を、大域的に拡張することが考えられる [4,5]。また多様体上の Morse 関数の流れの変化は、多様体の構造の変化を表している。この変化は、定義 13 と 14 で述べた関係を利用して、検出することができる。たとえば、指数 0 と n の臨界点以外の M 上の点に、外部とのエネルギーの授受が発生した場合などを考察する場合への応用などが考えられる。

参考文献

- [1] 西田, 山北: 偏微分方程式系に対する仮想 Lagrangian 構成法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 48, No. 5, pp. 257–264 (2012)
- [2] A. J. van der Schaft: *L₂-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, 2nd revised and enlarged edition, Springer Communications and Control Engineering series, Springer-Verlag (2000)
- [3] 井村: システム制御のための安定論, コロナ社 (2000)
- [4] G. Nishida, M. Yamakita and Z. Luo: Global boundary connection of stokes-dirac structures for Morse-Smale flows on compact manifolds; *Proc. of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems* (2006)
- [5] G. Nishida, R. Enomoto, M. Yamakita and Z. W. Luo: Port-based energy balance on compact manifolds; *Reprint of the 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pp. 491–496 (2007)
- [6] 服部: 多様体のトポロジー, 岩波書店 (2003)
- [7] A. Banyaga and D. Hurtubise: *Lecture on Morse Homology*, Kluwer Acad. Pub. (2004)
- [8] J. Milnor: *Morse Theory*, Princeton Univ. Press (1963)
- [9] 松本: Morse 理論の基礎, 岩波書店 (1997)
- [10] 横田: 多様体とモース理論, 現代数学者 (1978)
- [11] P. J. Olver: *Applications of Lie Groups to Differential Equations: Second Edition*, Springer-Verlag (1993)
- [12] V. Duindam, A. Macchelli, S. Stramigioli and H. Bruyninckx eds.: *Modeling and Control of Complex Physical Systems - The Port-Hamiltonian Approach*, Springer (2009)
- [13] A. J. van der Schaft and B. M. Maschke: Hamiltonian formulation of distributed-parameter systems with boundary energy flow; *Journal of Geometry and Physics*, Vol. 42, pp. 166–194 (2002)

著者略歴

にしだ
西田

ごう
豪 (正会員)

の研究に従事。博士(工学)。IEEE, SIAM などの会員。

1972 年 12 月 8 日生。2005 年東京工業大学大学院理工学研究科博士課程機械制御システム専攻修了。同年同大学大学院研究員、2012 年京都大学大学院情報学研究科複雑系科学専攻 知能化システム分野 産学連携研究員、現在に至る。非線形制御理論