安定多様体法における Hamilton-Jacobi 方程式の 高速数値解法*

濱口 謙一[†]・西田 豪[†]・坂本 登[‡]・山本 裕[†]

Rapid Numerical Solution of Hamilton-Jacobi Equations in Stable Manifold Method*

Kenichi HAMAGUCHI[†], Gou NISHIDA[†], Noboru SAKAMOTO[‡] and Yutaka YAMAMOTO[†]

This paper proposes an error estimation of a numerical method for solving Hamilton-Jacobi equations of nonlinear optimal control problems, called stable manifold method. Then, a rapid numerical algorithm is derived from the estimation. In the algorithm, the convergent sequence with respect to solutions on stable manifolds that are equivalent to the pair of optimal feedback gains and trajectories is improved. The new algorithm has three advantages, rapid calculation, extended radius of convergence and low memory consumption.

1. はじめに

非線形最適制御問題における Hamilton-Jacobi(HJ)方程式は、一般に、解析解を導出することは困難である。これまで、級数展開法に基づく解法 [1,2] や、因数分解に基づく解法 [3]、ニューラルネット学習による解法 [4]、POD-Galerkin 法による解法 [5] など、さまざまな解法が提案されてきた。近年、大域的求解可能性、近似精度、計算量の面で優れている安定多様体法 [6] が開発され、さまざまな非線形系に対してその実用性が報告されている [7–12]。

本論文では、安定多様体法における、HJ 方程式の数値計算の誤差評価法、および、高速化計算手法を提案する。安定多様体上の解は、最適フィードバックゲインと最適軌道の組からなる。その求解の収束計算を改良することで、従来法と比較して、収束速度だけでなく、収束半径、使用記憶領域に関して有利となることが示される。

本論文の構成は、まず、第 2 節にて、非線形最適制御問題の概要が述べられる。第 3 節にて、安定多様体法における数値計算アルゴリズムの説明とその改良案が示さ

れる。最後に、数値例題にて、提案法の利点が示される。

2. 安定多様体法の説明

2.1 非線形最適制御問題の概要

本節では、まず、非線形最適制御器の設計は、HJ 方程式の安定化解を求めることに等しいことを説明する [13,4]。安定多様体法は、さまざまな問題 [6] の HJ 方程式に適用できるが、ここでは、最適レギュレータの設計例を用いて説明を行う。

次の入力アフィン非線形系を考える。

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \quad (1)$$

ここで、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態量、 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ は操作量を表し、 f, g は滑らかな写像で、 $f(0) = 0$ と仮定する。このとき、次の最適制御問題を考える。

【定義 1】 (最適制御問題) 系 (1) に対して、次の評価関数 J を最小化する制御入力 u_{opt} を求めよ。

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty \{q(x(t)) + u^T(t)Ru(t)\} dt \quad (2)$$

ここで、 $x(0) = x_0$ を初期状態、 $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は $q(0) = 0$ 、 $(\partial q / \partial x)(0) = 0$ を満たす半正定値関数で、 R は正定行列とする。

まず、最適制御入力が存在すると仮定し、 $x(t)$ を初期状態とした評価関数の最小値 V を考える。ここで、値関数 V は時刻 t に陽に依存しない [4]。Hamilton 関数を

* 原稿受付 2014 年 5 月 19 日

[†] 京都大学 大学院 情報学研究科 Graduate School of Informatics, Kyoto University; Yoshidahonmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, JAPAN <g.nishida@ieee.org>

[‡] 名古屋大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Nagoya University; Furhocho, Chikusa, Nagoya, Aichi 464-8603, JAPAN

Key Words: numerical solution, Hamilton-Jacobi equations, nonlinear control, optimal control.

$$H = q + u^T R u + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T (f + g u) \quad (3)$$

と定義すると、 $\partial H / \partial u = 0$ の条件から最適制御入力

$$u_{opt} = -\frac{1}{2} R^{-1} g^T \frac{\partial V}{\partial x} \quad (4)$$

となる。 u_{opt} を (3) 式に代入し、次の HJ 方程式を得る。

$$H = p^T f - \frac{1}{4} p^T \bar{R} p + q = 0 \quad (5)$$

ここで、 $p = \partial V / \partial x$ 、 $\bar{R}(x) = g(x) R^{-1} g^T(x)$ とした。また、(5) 式は、次の Hamilton 系に書き換えられる。

$$\begin{cases} \dot{x} = f - \frac{1}{2} \bar{R} p \\ \dot{p} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T p + \frac{1}{4} \frac{\partial (p^T \bar{R} p)^T}{\partial x} - \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^T \end{cases} \quad (6)$$

さて、HJ 方程式 (5) には複数の解が存在する。その中で閉ループ系の漸近安定性 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ を保証する解（安定化解）を次のように定義する。

【定義 2】 HJ 方程式 (5) の解が $p(0) = 0$ を満たし、かつ $f(x) - (1/2) \bar{R}(x)p$ が漸近安定なベクトル場となる時、その解を安定化解とよぶ。

HJ 方程式の安定解の存在について次が知られている。

【定理 1】 (6) HJ 方程式 (5) を原点で線形化した、Riccati 方程式の安定化解 P が存在するならば、HJ 方程式 (5) は原点近傍に安定化解をもつ。

2.2 安定多様体法の準備

非線形制御問題の HJ 方程式 (5) における、安定化解の偏微分 $\partial V / \partial x$ を求めることは、Hamilton 系 (6) の安定多様体を求めることと等価である（付録 1. 参照）。以下では、その安定多様体を求める方法、すなわち、安定多様体法について説明する [14, 7, 6, 15]。まずは次を準備する。

- i) HJ 方程式 (5) を原点で線形化した、代数 Riccati 方程式の安定化解である、対称行列 P を求める。
- ii) Lyapunov 方程式 $FS + SF^T = F$ の解、行列 S を求める。ここで、 $F = (A - \bar{R}(0)P)$ であり、解 S は、 F が安定行列であることから必ず存在する。
- iii) 変換行列 T による座標変換

$$\begin{bmatrix} x' \\ p' \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} I & S \\ P & PS + I \end{bmatrix} \quad (7)$$

を Hamilton 系 (6) に適用し、線形項がブロック対角化された次の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{p}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & -F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ p' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_s(t, x', p') \\ n_u(t, x', p') \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで、 n_s と n_u は、高階微分項である。

以上の準備のもとで、まず、 (x', p') 空間における、(8) 式の解軌道を求め、その後、変換行列 T により、元の

(x, p) 空間の解軌道へと移すことで、最適軌道 x と、最適フィードバックゲイン p の組合せが求まる。

2.3 安定多様体を求める反復アルゴリズム

Hamilton 系 (6) の安定多様体は、次の反復アルゴリズムにより求める。まず、(8) 式を書き直した、次の $2n$ 次元の連立微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + n_s(t, x, y) \\ \dot{y} = -F^T y + n_u(t, x, y) \end{cases} \quad (9)$$

関数列 $\{x_k(t, \xi)\}, \{y_k(t, \xi)\}$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} x_{k+1}(t, \xi) = e^{Ft} \xi \\ \quad + \int_0^t e^{F(t-s)} n_s(s, x_k(s, \xi), y_k(s, \xi)) ds \\ y_{k+1}(t, \xi) = \\ \quad - \int_t^\infty e^{-F^T(t-s)} n_u(s, x_k(s, \xi), y_k(s, \xi)) ds \end{cases} \quad (10)$$

ここで、

$$\begin{cases} x_0(t, \xi) = e^{Ft} \xi \\ y_0(t, \xi) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

であり、 $\xi \in \mathbb{R}^n$ は任意パラメータである。いま、原点近傍の Riccati 方程式の安定化解を表す行列 P は、原点を通過するある平面として考えることができる。そこで、この平面内に初期ベクトル ξ を選び、上記の k に対する反復計算を用いて、その ξ 方向に沿って解を伸ばしていくことで、安定多様体上の一つの解を見つける。もちろん、原点から離れた場合、解は、Riccati 方程式の安定化解の平面からは離れていく。解は、ゲインの情報を含んでいるため、この平面からの差が、線形最適制御と非線形最適制御の違いを表していると考えられる。

このとき、逐次解が、十分に安定多様体に収束したことは、HJ 方程式 (5) そのものである、Hamiltonian が零に（非常に近く）なることによって確認できる。その得られた解が、与えられた制御問題の要件を満たす（たとえば、所望の初期値を通過する）軌道である場合、計算を終了する。しかし、そうでない場合は、別の ξ を用いて同じ計算を行う、という手順を繰り返すことで最適軌道が設計される。

2.4 安定多様体法の収束性

次の定理は、関数列 (10) のすべての要素が、時間発展により原点に収束し、かつ、関数列が方程式 (9) の安定多様体上の解軌道に一樣収束することを保証する。

(仮定 1) $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は安定行列である。

(仮定 2) 非線形関数 $n_s, n_u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は連続であり、任意の $t \in \mathbb{R}$ 、 $|x| + |y| < l$ 、 $|x'| + |y'| < l$ に対し、次の二つの不等式を満たす。

i) $|n_s(t, x, y) - n_s(t, x', y')| \leq \delta_1(l)(|x - y| + |x' - y'|)$

ii) $|n_u(t, x, y) - n_u(t, x', y')| \leq \delta_2(l)(|x - y| + |x' - y'|)$

ここで、 $\delta_j: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ($j = 1, 2$) は連続関数で、あ

る定数 $L_1, L_2 > 0$ に対し、区間 $[0, L_j]$ 上それぞれ単調増加であるとする。さらに任意の $l \in [0, L_j]$ 上で $\delta_j(l) \leq M_j l$ を満たす定数 $M_j > 0$ ($j=1, 2$) が存在すると仮定する。

【定理 2】 (安定多様体法 [6]) 仮定 1 および仮定 2 のもとで、 $k=0, 1, \dots$ に対する関数 $x_k(t, \xi)$, $y_k(t, \xi)$ は、十分小さな $|\xi|$ に対し、 $t \rightarrow \infty$ において、原点に収束する。さらに、関数列 $\{x_k(t, \xi)\}, \{y_k(t, \xi)\}$ は $k \rightarrow \infty$ としたとき、方程式 (9) の解に区間 $[0, \infty)$ 上一様収束する。 $k \rightarrow \infty$ における $x_k(t, \xi), y_k(t, \xi)$ の極限を $x(t, \xi), y(t, \xi)$ とすると、 $t \rightarrow \infty$ における極限 $x(t, \xi), y(t, \xi)$ は原点であり、したがって、安定多様体上の解である。

3. 主要結果

本節では、本論文の主要結果である、安定多様体を求める反復アルゴリズムの改良手法について述べる。最初に、提案手法の有効性を述べるために、Hamilton-Jacobi 方程式の数値計算に関する誤差の上界評価法を導出する。そして、その評価を用いて、新しい数値計算法における、誤差の上界、収束性、アルゴリズム内部の計算順序に関する特徴について述べる。最後に、実際の計算の際に有利な点についても述べる。

3.1 反復アルゴリズムの改良

関数列 $\{x_k(t, \xi)\}, \{y_k(t, \xi)\}$ を次のように再定義する。

$$\begin{cases} x_{k+1}(t, \xi) = e^{Ft}\xi \\ \quad + \int_0^t e^{F(t-s)} n_s(s, x_k(s, \xi), y_k(s, \xi)) ds \\ y_{k+1}(t, \xi) = \\ \quad - \int_t^\infty e^{-F^T(t-s)} n_u(s, x_{k+1}(s, \xi), y_k(s, \xi)) ds \end{cases} \quad (12)$$

ここで、並列計算を行わないならば、 x_{k+1} か y_{k+1} のいずれかから順に計算することになる。いま、計算順序が $x \rightarrow y$ の場合、最初に計算した x_{k+1} を、次の計算で用いることを考える。すなわち、(12) 式において、下線部箇所が、この新しい定義に相当する。

このような変更は、一見わずかにも思えるが、i) この関数列は、解に収束するのか、ii) 従来の反復計算より早く解に収束するか、iii) 上記のように、 y_{k+1} の計算式の x_k を x_{k+1} と変更した場合と、 x_{k+1} の計算式の y_k を y_{k+1} と変更した場合に違いはあるか、すなわち、計算順序が $x \rightarrow y$ と $y \rightarrow x$ の場合に違いはあるかという疑問が生じる。以下では、これらの問題に対する証明を与える。

【定理 3】 (12) 式の場合でも、定理 2 は成立する。

(証明) 付録 2. 参照。 $\square$

3.2 誤差について

以下では、記号の簡略化のため、 $x_k(t, \xi), y_k(t, \xi)$ を単に $x_k(t), y_k(t)$ と書くことにする。本節では、反復式 (11) 式によって得られた関数列 $x_k(t), y_k(t)$ と解 $x(t), y(t)$ との誤差の上界評価を与える。このような誤差評価は、著者の知る限り、従来法においても行われていない。

【定理 4】 十分小さい $|\xi|$ に対し、(11), (12) 式によって関数列 $\{x_k(t)\}, \{y_k(t)\}$ を定義する。このとき、解 $x(t), y(t)$ との誤差の上界評価として、次式が成立する。

$$\begin{cases} \int_0^\infty |x_k(t) - x(t)| dt \leq u_k^x \\ \int_0^\infty |y_k(t) - y(t)| dt \leq u_k^y \end{cases} \quad (13)$$

ただし、 u_k^x, u_k^y は次式によって与えられる数列である。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u_{k+1}^x \\ u_{k+1}^y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} u_k^x \\ u_k^y \end{bmatrix} \\ u_0^x = \int_0^\infty |x_0(t) - x(t)| dt, \quad u_0^y = \beta/2b \end{cases} \quad (14)$$

ここで、行列 S は、

$$S := \begin{bmatrix} d_1 & d_1 \\ d_1 d_2 & (1+d_1)d_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

と定義し、 d_1, d_2, b, β は、定理 3 の証明内で与えた正数である。

(証明) 付録 3. 参照。 $\square$

定理 4 から、提案法の上界として与えた数列 u_k^x, u_k^y の収束の速さは、 S のスペクトル半径 $\rho(S)$ で決定される。ここで、よく知られた事実として、 $\rho(A) < 1$ なる行列 A によって $x_{k+1} = Ax_k$ と帰納的に定義された数列 x_k は任意の初期値 x_0 に対して 0 に収束することに注意されたい [16]。

以下、スペクトル半径を比較することで、提案法の優位性を示す。従来法では定理 4 と対応する結果として、次の定理が成り立つ。

【定理 5】 $|\xi|$ を十分小さくとり、従来法である (11) 式および (10) 式によって定義した関数列を $\{\tilde{x}_k(t, \xi)\}, \{\tilde{y}_k(t, \xi)\}$ とする。このとき、解 $x(t), y(t)$ との誤差の上界評価として次式が成立する。

$$\begin{cases} \int_0^\infty |\tilde{x}_k(t) - x(t)| dt \leq \tilde{u}_k^x \\ \int_0^\infty |\tilde{y}_k(t) - y(t)| dt \leq \tilde{u}_k^y \end{cases} \quad (16)$$

ただし、 $\tilde{u}_k^x, \tilde{u}_k^y$ は次式によって与えられる数列である。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{k+1}^x \\ \tilde{u}_{k+1}^y \end{bmatrix} = \tilde{S} \begin{bmatrix} \tilde{u}_k^x \\ \tilde{u}_k^y \end{bmatrix} \\ \tilde{u}_0^x = \int_0^\infty |x_0(t) - x(t)| dt, \quad \tilde{u}_0^y = \beta/2b \end{cases} \quad (17)$$

ここで、行列 $\tilde{S}$ は、

$$\tilde{S} := \begin{bmatrix} d_1 & d_1 \\ d_2 & d_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

と定義した。

(証明) 定理 4 と同様に証明できるため省略する。 $\square$

3.3 収束性について

次の定理は従来法が収束する十分条件と、行列 S と $\tilde{S}$ のスペクトル半径の大小関係を与える。

【定理 6】 従来法の誤差の上界評価を与える数列 $(\tilde{u}_k^x, \tilde{u}_k^y)$ が $(0,0)$ に収束する必要十分条件は $d_1 + d_2 < 1$ である。さらに、 $d_1 + d_2 < 1$ を満たすとき、行列 S と $\tilde{S}$ のスペクトル半径は $\rho(S) < \rho(\tilde{S}) < 1$ の関係を満たし、提案法の誤差の上界評価を与える数列 (u_k^x, u_k^y) は $(0,0)$ に収束する。

(証明) 定理の前半は行列 $\tilde{S}$ のスペクトル半径が $\rho(\tilde{S}) = d_1 + d_2$ となることから自明である。定理の後半を証明する。行列 S のスペクトル半径は簡単な計算により、 $\rho(S) = 1/2\{d_1 + d_2 + d_1 d_2 + \sqrt{(d_1 + d_2 + d_1 d_2)^2 - 4d_1 d_2}\}$ となる。よって $d_1 + d_2 < 1$ ならば

$$\rho(\tilde{S}) - \rho(S) = \frac{1}{2} \left\{ d_1 + d_2 - d_1 d_2 - \sqrt{(d_1 + d_2 + d_1 d_2)^2 - 4d_1 d_2} \right\} \quad (19)$$

が正となることを示せばよい。 $d_1 + d_2 < 1$ および d_1, d_2 がともに正数であることに注意して

$$(d_1 + d_2 - d_1 d_2)^2 - \{(d_1 + d_2 + d_1 d_2)^2 - 4d_1 d_2\} = 4d_1 d_2(1 - d_1 - d_2) > 0 \quad (20)$$

となることから、 $\rho(S) < \rho(\tilde{S}) < 1$ がわかり、数列 (u_k^x, u_k^y) は $(0,0)$ に収束する。□

この定理より、提案法は従来法よりも上界評価によって保証される $|\xi|$ の収束半径が広いこと、および従来法の上界評価の収束が保証されている領域では、提案法の誤差の上界の方が従来法のそれよりも早く原点に収束することがわかった。

3.4 計算順序について

本節では、反復アルゴリズムにて、 $x \rightarrow y$ の順ではなく、 $y \rightarrow x$ の順で逐次計算を実行することを考える。

【命題 1】 反復計算を

$$\begin{cases} y_{k+1}(t) = - \int_t^\infty e^{-F^T(t-s)} n_u(s, x_k(s), y_k(s)) ds \\ x_{k+1}(t) = e^{Ft} \xi + \int_0^t e^{F(t-s)} n_s(s, x_k(s), y_{k+1}(s)) ds \end{cases} \quad (21)$$

とする。このとき、収束性は定理 3 と同様にして証明できる。さらに解 $x(t), y(t)$ との誤差の上界評価として、次式が成立する。

$$\begin{cases} \int_0^\infty |x_k(t) - x(t)| dt \leq \bar{u}_k^x \\ \int_0^\infty |y_k(t) - y(t)| dt \leq \bar{u}_k^y \end{cases} \quad (22)$$

ただし、 $\bar{u}_k^x, \bar{u}_k^y$ は次式によって与えられる数列である。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{u}_{k+1}^x \\ \bar{u}_{k+1}^y \end{bmatrix} = \bar{S} \begin{bmatrix} \bar{u}_k^x \\ \bar{u}_k^y \end{bmatrix} \\ \bar{u}_0^x = \int_0^\infty |x_0(t) - x(t)| dt, \quad \bar{u}_0^y = \beta/2b \end{cases} \quad (23)$$

ここで行列 $\bar{S}$ は

$$\bar{S} := \begin{bmatrix} d_1(1+d_2) & d_1 d_2 \\ d_2 & d_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

と与えられる。

(証明) 証明は定理 4 と同様のため省略する。□

このとき、行列 $\bar{S}$ のスペクトルは $\rho(\bar{S}) = \rho(S)$ を満たすことが容易に計算できる。そのため、定理 6 の内容は $x \rightarrow y$ の順を、 $y \rightarrow x$ の順に変えた反復式でも成立する。

(注意 1) 従来の同時反復式では反復計算時に最低四つの軌道分の記憶領域を確保する必要があるが、同時反復式の (21) 式あるいは (12) 式では反復計算時に最低三つの軌道分の記憶領域を確保するだけでよい。これはとくに高次元の問題において、大幅な記憶領域の節約につながると思われる。

(注意 2) 安定多様体法における最適レギュレータ設計では、仕様として与えられる初期値を通過する軌道を得るために、繰り返し軌道を計算する必要がある。しかし、得られる軌道の大域的な挙動は、単純な制御系においてさえ、非常に複雑であることが知られており、すなわち、反復アルゴリズムの初期値 (11) を与える ξ のわずかな違いにより、対応する解は、一般に大きく異なる。そのため、得られた複数の軌道がどのような傾向で時間発展を行い、また、状態空間をどのように被覆しているかを知ることが、その求解において重要な情報となる。したがって、並列計算が可能な場合、これらの解の複数の候補を、出来るだけ多く、同時に計算する局面が考えられる。このような場合、順に $x \rightarrow y, y \rightarrow x$ の計算を早く行う提案法は、 x と y を同時に並列計算する従来法に比べ、各軌道に対する計算機資源の割り当てが少なく済み、結果として計算速度も速くなるため、有用であると考えられる。

4. 数値実験

提案法と従来法の収束速度を数値計算結果から比較を行う。

次の一次元システムの最適制御問題を考える [6]。

$$\dot{x} = x - x^3 + u, \quad J = \int_0^\infty \frac{1}{2}(x^2 + u^2) dt \quad (25)$$

この問題に対する Hamiltonian は

$$H(x, p) = p(x - x^3) - \frac{1}{2}(p^2 - x^2) \quad (26)$$

であり、Hamilton 系は次のように与えられる。

Fig. 1 Hamiltonian と計算反復回数

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 - p \\ \dot{p} = -(1 - 3x^2)p - x \end{cases} \quad (27)$$

この Hamilton 系の安定多様体を従来の反復式 (10) 式と提案法の反復式 (12) 式の両方で計算を行った。このとき、ともに反復回数の上限を 100 とし、安定多様体法のパラメータ ξ を $\xi = 0.52$ と与えた。得られた数値解の精度は各軌道 $(x_i(t), p_i(t))$ の Hamiltonian の絶対値の最大値 $H_{max}(i) = \max_{t \geq 0} |H(x_i(t), p_i(t))|$ によって検証する。厳密解は時間無限大で原点に漸近するため、Hamiltonian の不変性より、 $H_{max}(i)$ の値は 0 となる。Fig.1 は、提案法と従来法の各反復計算によって得られた軌道 (x_i, p_i) に対して、 $H_{max}(i)$ を計算した結果である。横軸は反復回数を表し、縦軸は $H_{max}(i)$ の値を対数表示している。この図から提案法が少ない反復計算で早く安定多様体上に収束していることがわかる。

5. おわりに

本論文では、安定多様体法における、Hamilton-Jacobi 方程式の数値計算の誤差の上界評価法を導出し、高速化手法を提案した。新しい方法は、従来法と比較して、収束が速いということを、収束点列間で定義される線形写像のスペクトル半径を用いて証明し、また、収束半径が広いということを、解の誤差の上界評価により示した。計算を実行する際に、使用記憶領域に関して有利であることも示された。

今後の課題としては、並列化を積極的に利用したアルゴリズムの開発が考えられる。

謝 辞

本研究に対して、有益なご意見を頂きました、京都大学 永原正章先生に感謝の意を表す。また、本研究は、JSPS 科研費、基盤研究 (C) No. 26420415、および、萌芽研究 No. 26630197 の助成を受けた。

参 考 文 献

[1] D. L. Lukes: Optimal regulation of nonlinear dynamical systems; *SIAM Journal on Control*, Vol. 7,

- No. 1, pp. 75–100 (1969)
- [2] 水野, 藤本: Chebyshev 多項式を用いた Hamilton-Jacobi 方程式の近似計算法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 44, No. 2, pp. 133–138 (2008)
- [3] M. D. S. Aliyu: *Nonlinear H_∞ Control, Hamiltonian Systems and Hamilton-Jacobi Equations*, CRC Press (2011)
- [4] 志水: フィードバック制御理論—安定化と最適化—, コロナ社 (2013)
- [5] D. Georges: Nonlinear robust and optimal control via proper orthogonal decomposition; *9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems* (2013)
- [6] N. Sakamoto and A. J. van der Schaft: Analytical approximation methods for the stabilizing solution of the Hamilton-Jacobi equation; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, Vol. 53, No. 10, pp. 2335–2350 (2008)
- [7] N. Sakamoto: Case studies on the application of the stable manifold approach for nonlinear optimal control design; *Automatica*, Vol. 49, No. 2, pp. 568–576 (2013)
- [8] 梅田, 坂本, 梅村: 状態および入力ノルムの制約を満足する非線形最適制御器の設計; 計測自動制御学会論文集, Vol. 49, No. 3, pp. 345–352 (2013)
- [9] 山岸, 坂本, 佐藤: 非線形最適制御による PIO を防止する飛行制御系設計; 日本航空宇宙学会論文集, Vol. 61, No. 1, pp. 1–8 (2013)
- [10] 藤本, 坂本: 非線形最適制御による倒立振子の振り上げ安定化; 計測自動制御学会論文集, Vol. 48, No. 7, pp. 1–8 (2012)
- [11] 梅村, 坂本: インバータ電圧のノルム制約を考慮した永久磁石同期モータの非線形最適サーボ系設計; システム制御情報学会論文誌, Vol. 26, No. 7, pp. 252–260 (2013)
- [12] 藤本, 鈴木, 坂本: 磁気浮上系に対する非線形最適制御系の設計; 計測自動制御学会論文集, Vol. 45, No. 7, pp. 388–390 (2009)
- [13] 大塚: 非線形最適制御入門, コロナ社 (2011)
- [14] 坂本: 安定多様体の近似によるハミルトン・ヤコビ方程式の近似解法; シミュレーション, Vol. 27, No. 4, pp. 221–225 (2008)
- [15] 梅村, 坂本: 実用のための非線形最適制御: 不変多様体計算理論によるアプローチ; システム/制御/情報, Vol. 57, No. 7, pp. 264–269 (2013)
- [16] D. M. Young: *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Dover Publications (2003)
- [17] 井村: システム制御のための安定論, コロナ社 (2000)
- [18] 青木, 西堀: デジタル制御, コロナ社 (2005)

付 録

付録 1. HJ 方程式の安定化解と Hamilton 系の安定多様体

以下では、非線形制御問題の HJ 方程式における、安定化解の偏微分 $\partial V / \partial x$ を求めることは、Hamilton 系の安定多様体を求めることと等価である根拠 [6] について

簡単に触れておく。

(x, p) -空間における Hamilton 系 (6) の不変多様体 Λ に対し、標準射影 π の Λ への制限が原点近傍 U で微分同相となるなら、HJ 方程式 (5) の解 $V(x)$ が原点近傍で存在し、

$$\Lambda \cap \pi^{-1}(U) = \left\{ (x, p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid p = \frac{\partial V}{\partial x}(x), x \in U \right\} \quad (\text{A1})$$

が成り立つ。さらに、不変多様体 Λ が原点において部分空間 $\text{Im} \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix}$ (ここで P は Riccati 方程式の安定化解) に接するなら、 $V(x)$ は HJ 方程式 (5) の安定化解であり、 Λ 上に初期値をもつ (6) の解は原点に収束する。このように、HJ 方程式の解の偏微分 $\partial V / \partial x$ を求めることは、対応する Hamilton 系の安定化解を求めることに等しい。

付録 2. 定理 3 の証明

(定理 3 の証明) 証明は、基本的に、文献 [6] と同様に行うが、一部改良して用いている。

0) 証明の前に、仮定 2 より、次の条件式が導出できる。

i) 任意の $t \in \mathbb{R}$, $|x| + |y| \leq L_1$ に対し

$$|n_s(t, x, y)| \leq M_1(|x| + |y|)^2. \quad (\text{A2})$$

ii) 任意の $t \in \mathbb{R}$, $|x| + |y| \leq L_2$ に対し

$$|n_u(t, x, y)| \leq M_2(|x| + |y|)^2. \quad (\text{A3})$$

iii) $\bar{x}, \bar{y}$ を $\bar{x} + \bar{y} \leq L_1$ を満たすある定数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$, $|x|, |x'| \leq \bar{x}$, $|y|, |y'| \leq \bar{y}$ に対し、

$$|n_s(t, x, y) - n_s(t, x', y')| \leq M_1(\bar{x} + \bar{y})(|x - x'| + |y - y'|). \quad (\text{A4})$$

iv) $\bar{x}, \bar{y}$ を $\bar{x} + \bar{y} \leq L_2$ を満たすある定数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$, $|x|, |x'| \leq \bar{x}$, $|y|, |y'| \leq \bar{y}$ に対し、

$$|n_u(t, x, y) - n_u(t, x', y')| \leq M_2(\bar{x} + \bar{y})(|x - x'| + |y - y'|). \quad (\text{A5})$$

また正数 a, b を任意の $t \geq 0$ に対し

$$\|e^{Ft}\| \leq ae^{-bt} \quad (\text{A6})$$

を満たすように定義する。仮定 1 よりこのような正数 a, b は必ず存在する [17]。

1) 最初に、任意の $k = 0, 1, 2, \dots$ において、 x_k, y_k が次の不等式を満たすことを示す。

$$|x_k(t)| \leq \alpha_k e^{-bt}, \quad |y_k(t)| \leq \beta_k e^{-2bt} \quad (\text{A7})$$

ここで、 α_k, β_k は次式で定義される数列である。

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = \frac{2aM_1}{b}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) + a|\xi|, & \alpha_0 = a|\xi| \\ \beta_{k+1} = \frac{2aM_2}{3b}(\alpha_{k+1}^2 + \beta_k^2), & \beta_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{A8})$$

帰納法によって示す。まず、(A6) 式と $y_0(t) = 0$ より $k = 0$ のとき、(A7) 式が満たされることは容易にわかる。つぎに、 x_k, y_k が (A7) 式を満たすと仮定すると、

$$\begin{aligned} & |x_{k+1}(t)| \\ & \leq a|\xi|e^{-bt} + \int_0^t ae^{-b(t-s)}|n_s(s, x_k(s), y_k(s))|ds \\ & \leq a|\xi|e^{-bt} + \frac{2aM_1}{b}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)e^{-bt} \\ & = \left\{ \frac{2aM_1}{b}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) + a|\xi| \right\} e^{-bt} = \alpha_{k+1}e^{-bt} \quad (\text{A9}) \end{aligned}$$

となり、さらにこの結果をもとに y_{k+1} も

$$\begin{aligned} & |y_{k+1}(t)| \\ & \leq \int_t^\infty |e^{-F^T(t-s)}n_u(s, x_{k+1}(s), y_k(s))|ds \\ & \leq \int_t^\infty 2ae^{-b(s-t)}M_2(\alpha_{k+1}^2 e^{-2bs} + \beta_k^2 e^{-4bs})ds \\ & = 2ae^{bt}M_2(\alpha_{k+1}^2 + \beta_k^2) \int_t^\infty e^{-3bs}ds \\ & = \frac{2aM_2}{3b}(\alpha_{k+1}^2 + \beta_k^2)e^{-2bt} = \beta_{k+1}e^{-2bt} \quad (\text{A10}) \end{aligned}$$

となるので、任意の $k \geq 0$ に対し (A7) 式が成り立つことがわかった。

2) つぎに十分小さな ξ に対して、(A8) 式によって定義される数列 $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ はともに単調増加、かつ、上に有界、すなわち、ある $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ が存在し、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \underline{\alpha}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \underline{\beta}$ となることを示す。最初に、数列 $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ が単調増加することを示す。 $c_1 = 2aM_1/b$, $c_2 = a|\xi|$, $c_3 = 2aM_2/3b$ とおくと、(A8) 式は

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = c_1(\alpha_k^2 + \beta_k^2) + c_2, & \alpha_0 = c_2 \\ \beta_{k+1} = c_3(\alpha_{k+1}^2 + \beta_k^2), & \beta_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{A11})$$

と表される。定義より $\alpha_1 > \alpha_0$, $\beta_1 > \beta_0$ 。さらに、

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = c_1\{(\alpha_k + \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k-1}) + (\beta_k + \beta_{k-1})(\beta_k - \beta_{k-1})\} \quad (\text{A12})$$

$$\beta_{k+1} - \beta_k = c_3\{(\alpha_{k+1} + \alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k) + (\beta_k + \beta_{k-1})(\beta_k - \beta_{k-1})\} \quad (\text{A13})$$

より、帰納的に考えて数列 $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ がともに単調増加することがわかる。つぎに、数列の収束性を示すため、以下の非線形方程式

$$\begin{cases} \alpha = c_1(\alpha^2 + \beta^2) + c_2 \\ \beta = c_3(\alpha^2 + \beta^2) \end{cases} \quad (\text{A14})$$

が十分小さな $|\xi|$ に対して一意の解を持つことを不動点定理によって示す。写像 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $T(\alpha, \beta) = [c_1(\alpha^2 + \beta^2) + c_2, c_3(\alpha^2 + \beta^2)]^T$ と定義する。また原点 $(0, 0)$ の近傍 $U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_i \leq 1/(3(c_1 + c_3))\}$ を与える。十分小さな $c_2 = a|\xi|$ に対し、 $T(U) \subset U$ であることが容易にわかる。このとき、写像 T は近傍 U 上で縮小写

像となる. 実際, 任意の $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in U$ に対し,

$$\begin{aligned} & \|T(\alpha, \beta) - T(\alpha', \beta')\|_{\ell_1} \\ &= (c_1 + c_3)|\alpha^2 + \beta^2 - \alpha'^2 - \beta'^2| \\ &\leq (c_1 + c_3)(|(\alpha + \alpha')(\alpha - \alpha')| + |(\beta + \beta')(\beta - \beta')|) \\ &= (c_1 + c_3)((\alpha + \alpha')|\alpha - \alpha'| + (\beta + \beta')|\beta - \beta'|) \\ &\leq \frac{2}{3}\|(\alpha - \alpha', \beta - \beta')^T\|_{\ell_1} \end{aligned} \quad (A15)$$

となるため, 写像 T が原点近傍 U 上で縮小写像となることがわかる. よって不動点定理により, 写像 T は原点近傍 U 上で不動点 $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ を一意にもつ, すなわち, 十分小さな c_2 に対し (A14) 式の解 $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ が近傍 U 上に一意に存在することがわかった. また $\alpha_0 = c_2 \leq \underline{\alpha}$ のとき, $\alpha_k \leq \underline{\alpha}$, $\beta_k \leq \underline{\beta}$ を満たすことも, 上述の単調性の場合と同様にしてわかる. 以上によって, 十分小さな $|\xi|$ に対し, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \underline{\alpha}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \underline{\beta}$ となることがわかった. また $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ は (A14) 式の解であることから, 明らかに $|\xi| \rightarrow 0$ ならば $(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \rightarrow (0, 0)$ となることもわかる. この関係は証明の後半で利用される.

以上のことから, 十分小さな $|\xi|$ に対し, 任意の $k=0, 1, \dots$ で $x_k(t, \xi)$, $y_k(t, \xi) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) が成り立つことがわかり, 定理の前半が証明された.

3) 定理の後半の証明に移る. 任意の $k=0, 1, 2, \dots$ において, x_k, y_k がそれぞれ次の不等式を満たすことを示す.

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \gamma_k e^{-bt} \quad (A16)$$

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq \varepsilon_k e^{-2bt} \quad (A17)$$

ここで, γ_k, ε_k は次式で定義される数列である.

$$\begin{cases} \gamma_{k+1} = \frac{a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_1}{b}(\gamma_k + \varepsilon_k) \\ \varepsilon_{k+1} = \frac{a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_2}{3b}(\gamma_{k+1} + \varepsilon_k) \\ \gamma_0 = \frac{a^3 M_1 |\xi|^2}{b}, \varepsilon_0 = \frac{a M_2}{3b} \left(a|\xi| + \frac{a^3 M_1}{b} |\xi|^2 \right)^2 \end{cases} \quad (A18)$$

まず, 定義式 (12) と証明の前半より, $k=0$ のとき,

$$\begin{aligned} & |x_1(t) - x_0(t)| \\ &\leq \int_0^t a e^{-b(t-s)} |n_s(s, x_0(s), y_0(s))| ds \\ &\leq a^3 M_1 |\xi|^2 e^{-bt} \int_0^t e^{-bs} ds \\ &= \frac{a^3 M_1 |\xi|^2}{b} e^{-bt} \end{aligned} \quad (A19)$$

$$\begin{aligned} & |y_1(t) - y_0(t)| \\ &\leq \int_t^\infty a e^{-b(s-t)} |n_u(s, x_1(s), y_0(s))| ds \\ &\leq a M_2 e^{bt} \int_t^\infty e^{-bs} \left(a|\xi| + \frac{a^3 M_1 |\xi|^2}{b} \right)^2 e^{-2bs} ds \\ &= \frac{a M_2}{3b} \left(a|\xi| + \frac{a^3 M_1 |\xi|^2}{b} \right)^2 e^{-2bt} \end{aligned} \quad (A20)$$

となり, (A16), (A17) 式を満たすことがわかる. つぎに (A16), (A17) 式がある $k \geq 1$ で成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} & |x_{k+1}(t) - x_k(t)| \\ &\leq \int_0^t a e^{-b(t-s)} |n_s(s, x_k(s), y_k(s)) \\ &\quad - n_s(s, x_{k-1}(s), y_{k-1}(s))| ds \\ &\leq \frac{a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_1}{b}(\gamma_k + \varepsilon_k) e^{-bt} = \gamma_{k+1} e^{-bt} \end{aligned} \quad (A21)$$

が成り立ち, さらに, この結果を用いて

$$\begin{aligned} & |y_{k+1}(t) - y_k(t)| \\ &\leq \int_t^\infty a e^{-b(s-t)} |n_u(s, x_{k+1}(s), y_k(s)) \\ &\quad - n_u(s, x_k(s), y_{k-1}(s))| ds \\ &\leq a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_2(\gamma_{k+1} + \varepsilon_k) e^{bt} \int_t^\infty e^{-3bs} ds \\ &= \frac{a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_2}{3b}(\gamma_{k+1} + \varepsilon_k) e^{-2bt} = \varepsilon_{k+1} e^{-2bt} \end{aligned} \quad (A22)$$

となり, 帰納法より (A16), (A17) 式が任意の $k \geq 0$ で成り立つことが証明できた.

4) $|\xi|$ が十分小さければ, $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ となることを示す. (A18) 式を書き換えた次式を考える.

$$\begin{cases} \gamma_{k+1} = d_1 \gamma_k + d_1 \varepsilon_k \\ \varepsilon_{k+1} = d_1 d_2 \gamma_k + (1 + d_1) d_2 \varepsilon_k \end{cases} \quad (A23)$$

ただし, $d_1 = a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_1/b$, $d_2 = a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_2/3b$ とした. 行列 S を

$$S = \begin{bmatrix} d_1 & d_1 \\ d_1 d_2 & (1 + d_1) d_2 \end{bmatrix} \quad (A24)$$

と定義すると, 行列 S のすべての固有値の絶対値が 1 未満であれば, $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ が成り立つ [16]. 行列 S の固有多項式 $p_S(z)$ は簡単な計算より

$$p_S(z) = z^2 - (d_1 + d_2 + d_1 d_2)z - d_1^2 d_2 \quad (A25)$$

と与えられる. $p_S(z)$ の解の絶対値がすべて 1 より小さくなる必要十分条件は, Jury の方法 [18] により, 次の条件をすべて満たすことである.

- i) $p_S(0) = -d_1^2 d_2 < 1$
- ii) $p_S(1) = 1 - (d_1 + d_2 + d_1 d_2) - d_1^2 d_2 > 0$
- iii) $p_S(-1) = 1 + (d_1 + d_2 + d_1 d_2) - d_1^2 d_2 > 0$

証明の前半より, $|\xi| \rightarrow 0$ ならば $(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \rightarrow (0, 0)$ となり, さらに d_1, d_2 の定義から $(d_1, d_2) \rightarrow (0, 0)$ となることがわかる. よって, 上記の三つの条件は $|\xi|$ が十分小さければすべて成り立つ. ゆえに行列 S の固有値はすべて複素単位円内部に存在し, $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ を得る.

以上によって, x_k, y_k が一様収束することが証明された.

5) 最後に, $x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t)$, $y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t)$ が (9) 式の解となっていることを示す. (12) 式を k に関し

ての極限を取ると $x(t), y(t)$ は次の積分等式を満たす.

$$\begin{cases} x(t) = e^{Ft}\xi + \int_0^t e^{F(t-s)}n_s(s, x(s), y(s))ds \\ y(t) = -\int_t^\infty e^{-F^T(t-s)}n_u(s, x(s), y(s))ds \end{cases} \quad (A26)$$

上式から $x(t), y(t)$ が常微分方程式 (9) を満たすことは容易にわかる. 以上によってすべての証明が完了した. $\square$

付録 3. 定理 4 の証明

(定理 4 の証明) 以下の証明において, 定理 3 の証明と同じ記号は断りなく用いる. u_k^x の定義式 (14) から x_0 が (13) 式を満たすことは自明である. また, 定理 3 の前半の証明より, $|y(t)| \leq \underline{\beta}e^{-2bt}$ がわかるので, $y_0(t) = 0$ に注意して,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |y_0(t) - y(t)|dt &= \int_0^\infty |y(t)|dt \leq \underline{\beta} \int_0^\infty e^{-2bt}dt \\ &= \underline{\beta}/2b = u_0^y \end{aligned} \quad (A27)$$

が得られる. よって $k=0$ のとき, (13) 式は成立する.

つぎに, $x_l(t), y_l(t)$ が $l=0, 1, \dots, k$ において, (13) 式を満たすと仮定すると,

$$\begin{aligned} &|x_{l+1}(t) - x(t)| \\ &\leq a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_1e^{-bt} \\ &\quad \times \int_0^t (|x_l(s) - x(s)| + |y_l(s) - y(s)|)ds \\ &\leq a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_1e^{-bt} \\ &\quad \times \int_0^\infty (|x_l(s) - x(s)| + |y_l(s) - y(s)|)ds \\ &\leq a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_1e^{-bt}(u_l^x + u_l^y) \end{aligned} \quad (A28)$$

が任意の $l \leq k$ において成り立つので, $l=k$ として両辺を積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |x_{k+1}(t) - x(t)|dt &\leq \frac{a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_1}{b}(u_k^x + u_k^y) \\ &= d_1(u_k^x + u_k^y) = u_{k+1}^x \end{aligned} \quad (A29)$$

が得られる. つぎに,

$$|y_{k+1}(t) - y(t)| \leq 2bu_{k+1}^ye^{-2bt}$$

が成り立つことを帰納的に示す. まず,

$$|y_0(t) - y(t)| = |y(t)| \leq \underline{\beta}e^{-2bt} = 2bu_0^ye^{-2bt} \quad (A30)$$

がわかり, さらに, ある $m < k+1$ で $|y_m(t) - y(t)| \leq 2bu_m^ye^{-2bt}$ が成り立つと仮定すると, (A28) 式より,

$$\begin{aligned} &|y_{m+1}(t) - y(t)| \leq a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_2e^{bt} \\ &\quad \times \int_t^\infty e^{-2bs}(|x_{m+1}(s) - x(s)| + |y_m(s) - y(s)|)ds \\ &\leq a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_2e^{bt} \\ &\quad \times \int_t^\infty e^{-2bs}(u_{m+1}^xe^{-bs} + u_m^y2be^{-2bs})ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq a(\underline{\alpha} + \underline{\beta})M_2e^{bt}2b(u_{m+1}^x + u_m^y) \int_t^\infty e^{-3bs}ds \\ &= d_2e^{bt}2b(u_{m+1}^x + u_m^y)e^{-3bt} = 2bu_{m+1}^ye^{-2bt} \end{aligned} \quad (A31)$$

となるので, 結局,

$$|y_{k+1}(t) - y(t)| \leq 2bu_{k+1}^ye^{-2bt}$$

が得られる. 上式の両辺を積分して,

$$\int_0^\infty |y_{k+1}(t) - y(t)|dt \leq u_{k+1}^y$$

を得る. 以上によって, 帰納法から (13) 式が任意の $k \geq 0$ において成立する. $\square$

著者略歴

はま ぐち けん いち (正会員)

1989年6月5日生. 2014年京都大学大学院情報学研究科複雑系科学専攻知能化システム分野修士課程修了. 同年, 株式会社IHIに入社. 現在に至る. 計測自動制御学会などの会員.

にし だ こう (正会員)

1972年12月8日生. 2005年東京工業大学大学院理工学研究科博士課程機械制御システム専攻修了, 同年同大学大学院研究員, 2012年京都大学大学院情報学研究科複雑系科学専攻知能化システム分野産学連携研究員, 現在に至る. 非線形制御理論の研究に従事. 博士(工学). 計測自動制御学会, IEEE, SIAMなどの会員.

さか もと のぼる (正会員)

1967年7月21日生. 1996年3月名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了. 同年4月名古屋大学工学部助手, 1997年4月名古屋大学大学院工学研究科講師, 2000年同助教授, 2007年より准教授となり, 現在に至る. 非線形最適制御理論の研究に従事. 計測自動制御学会, 日本航空宇宙学会, IEEE, SIAMなどの会員.

やま もと ゆたか (正会員)

1950年3月29日生. 1978年フロリダ大学 Ph. D. 1998年より京都大学情報学研究科複雑系科学専攻教授. 専門は制御理論, およびデジタル信号処理. IEEE Control Systems Society (CSS) において, 2012年 President-Elect, 2013年 President, 2014年より Past President. システム制御情報学会の会長などを歴任. G. S. Axelby Outstanding Paper Award, 文部科学大臣表彰など受賞多数. IEEE, IFAC, および, SICE のフェロー.