複数のむだ時間を有する線形非負システムの支配極解析*

西尾 直也[†]・蛸原 義雄[†]・萩原 朋道[†]

Dominant Pole Analysis of Linear Positive Systems with Multiple Time-Delays*

Naoya NISHIO[†], Yoshio EBIHARA[†] and Tomomichi HAGIWARA[†]

This paper is concerned with the dominant pole analysis of asymptotically stable time-delay positive systems (TDPSs) with multiple delays. It has been shown recently that the dominant pole of a stable TDPS with a single delay increases and hence the convergence performance degrades according to the increase of the delay, if and only if the associated state space matrices satisfy an eigenvalue-sensitivity condition. This paper extends these preceding results to TDPSs with multiple delays. As a main result, we show that the dependence of the dominant pole upon the variation of multiple delays can be completely determined by the eigenvalue-sensitivity condition with respect to the state space matrices corresponding to the varying delays.

1. はじめに

非負システムとは、どのような非負の初期状態および非負の入力に対しても、その状態変数および出力がともに非負の値をとる動的システムのことである [1]。このようなシステムは、生物学、ネットワーク通信、経済学などの分野で、負の値を取り得ない変数でダイナミクスが表される動的システムの数理モデルとして頻繁に現れる [1]。近年、制御工学の分野でも非負システムの解析、設計に関する研究が盛んである [2–5]。一方、実システムでは外部からの信号に対しその応答が瞬間的に変化するのではなく、遅れ（むだ時間）をともなうことが多い。したがって、むだ時間を有するシステムの解析は制御工学分野において重要な課題となっている。

むだ時間を有する線形非負システム（Time-Delay Positive System: TDPS）の安定性はむだ時間の長さに依存せず、システムの係数行列のみによって決まることが知られている [6]。このように安定性という定性的な性質はむだ時間の長さに依存しないものの、収束速度という定量的な性質はむだ時間の長さに依存すると予想される。このような理由から、安定な TDPS に対して、収束

速度の指標となる支配極とむだ時間の長さとの関係を解析する研究が行われている [7,8]。文献 [8] では、TDPS の支配極が常に実数となることを示したうえで、とくに単一のむだ時間を有する安定な TDPS の支配極について詳細な解析がなされている。その中で、システムの係数行列が本論文でも述べる固有値感度に関する条件をみたすならば、支配極はむだ時間の増加に伴って増加し、原点に収束することが示されている。また、逆にこの条件をみたさないならば、支配極はむだ時間に依存せず一定となることが示されている。

本論文では、この結果を TDPS が複数のむだ時間を有する場合に拡張する。すなわち、支配極が複数のむだ時間の中の特定の複数のむだ時間の変動に依存するかどうかは、変動する複数のむだ時間に対応する係数行列から構成される行列対の固有値感度によって決定づけられることを示す。

本論文の構成は以下の通りである。2. では TDPS の安定条件と特性方程式について述べる。3. では TDPS の支配極が Frobenius 固有値 [1,9] を用いて表されることを述べる。さらに、係数行列がある条件を満たすならば、着目する単一のむだ時間の増加にしたがって支配極は増加し原点に収束することを述べる。4. では固有値感度の概念を導入し、支配極のむだ時間に関する依存性を明確にする。さらに、固有値感度に関する補題を利用することで、係数行列から構成される非負行列の固有値計算

* 原稿受付 2014 年 7 月 11 日

[†] 京都大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Kyoto University; Kyotodaigaku-Katsura, Nishikyo-ku, Kyoto city, Kyoto 615-8510, JAPAN**Key Words:** time-delay positive systems, dominant pole, eigenvalue-sensitivity.

(Frobenius 固有値の計算) によって与えられた TDPS の支配極のむだ時間に関する依存性を調べることができることを示す。5. では二つのむだ時間を有する TDPS に関する数値例を示し、本論文の結果の正当性を検証する。

本論文で用いる表記は以下の通りである。整数の集合を $\mathbb{Z}$, 実数の集合を $\mathbb{R}$, 複素数の集合を $\mathbb{C}$ と表す。さらに、非負 (正) の整数, 非負 (正) の実数, 実部が負となる複素数の集合をそれぞれ $\mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_{++}$), $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_{++}$), $\mathbb{C}_{--}$ と表す。 n 次元の非負 (正) ベクトルの集合を $\mathbb{R}_+^n$ ($\mathbb{R}_{++}^n$), n 行 m 列の非負 (正) 行列の集合を $\mathbb{R}_+^{n \times m}$ ($\mathbb{R}_{++}^{n \times m}$) と表す。与えられた同じ次元のベクトル x, y に対して, $x_i \geq y_i$ ($x_i > y_i$) となると, $x \geq y$ ($x > y$) と書く。同様に, 与えられた同じサイズの行列 A, B に対して, $A_{ij} \geq B_{ij}$ ($A_{ij} > B_{ij}$) となると, $A \geq B$ ($A > B$) と書く。ただし, A_{ij} は A の (i, j) 要素である。 $x \in \mathbb{R}^n$ について, 無限大ノルムを $\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ と書く。サイズが n の Hurwitz 行列の集合を $\mathbb{H}^n$ と表す。 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して, A の固有値の集合および A のスペクトル半径をそれぞれ $\sigma(A)$, $\rho(A)$ と表す。最後に, 区間 $[a, b]$ で定義された n 次元実ベクトル値をとる連続関数の集合を $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, 同じく区間 $[a, b]$ で定義された n 次元の非負ベクトル値をとる連続関数の集合を $C([a, b], \mathbb{R}_+^n)$ と表す。

2. むだ時間を有する線形非負システムとその安定性

はじめに, 非負の線形時不変システムを扱ううえで重要となる Metzler 行列 [1] を次のように定義する。

【定義 1】 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の非対角要素が非負であるとき, A を Metzler 行列とよぶ。

以降では, n 次の Metzler 行列の集合を $\mathbb{M}^n$ と書く。

本論文では, 次式で表される TDPS を解析の対象とする。

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^N A_i x(t-h_i) & (t \geq 0) \\ x(\theta) = \phi(\theta) & (-h \leq \theta \leq 0) \end{cases} \quad (1)$$

ただし, $N \in \mathbb{Z}_{++}$, $A_0 \in \mathbb{M}^n$, $A_i \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ($i = 1, \dots, N$), $h_i \in \mathbb{R}_{++}$ ($i = 1, \dots, N$), $h := \max_{i=1, \dots, N} h_i$ であり, $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ は初期関数である。係数行列に関する仮定より, TDPS Σ は任意の非負の初期関数 $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}_+^n)$ に対して, どの時刻 $t \geq 0$ においても解 x が $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ をみたす性質 (すなわち非負性) を有している [6]。

つぎに, TDPS の漸近安定性を考える。TDPS Σ の漸近安定性の定義と, TDPS Σ が漸近安定となるための必要十分条件 [6] を以下に示す。

【定義 2】 TDPS Σ を考える。TDPS Σ が Lyapunov の意味で安定であり, さらにすべての初期関数 $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ に対して $\|x(t)\|_\infty \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) が成立するならば, TDPS Σ は漸近安定であるという。

【命題 1】 [6] TDPS Σ が漸近安定となるための必要十分条件は, 次式で表される係数行列の和 A が Hurwitz 行列であることである。

$$A := \sum_{i=0}^N A_i \in \mathbb{M}^n \quad (2)$$

ここで, TDPS Σ のむだ時間をすべて 0 とした, 次式で表される (有限次元の) 線形非負システム Σ_0 を考える。

$$\Sigma_0: \dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3)$$

システム Σ と Σ_0 の漸近安定性に関して, 命題 1 より (無限次元の) TDPS Σ が漸近安定となるための必要十分条件は, むだ時間のない (有限次元の) 線形非負システム Σ_0 が漸近安定となることであることがわかる。すなわち, TDPS Σ の安定性という定性的な性質は, むだ時間の長さに依存しない。この TDPS のむだ時間の変動に対するロバスト安定性は, システムの非負性によってもたらされる非常に強い性質 (非負とは限らない TDS に対しては一般に成立しない性質) である。

続いて, TDPS Σ の極について考える。(1) 式をラプラス変換することで, 次式で表される TDPS Σ に対する特性方程式が得られる。

$$\det \left(sI - A_0 - \sum_{i=1}^N A_i e^{-sh_i} \right) = 0 \quad (4)$$

上式の解の集合, つまり TDPS Σ の極の集合を $\Lambda_\Sigma \subset \mathbb{C}$ と表すことにする。文献 [10] によると, Λ_Σ の要素は一般に無限個存在する。さらにむだ時間を有する (必ずしも非負とは限らない) 線形システムの解析結果より, TDPS Σ が漸近安定となるための必要十分条件は $\Lambda_\Sigma \subset \mathbb{C}_{--}$ が成立することである [10] ということがわかっている。

3. むだ時間を有する線形非負システムの支配極

本節では, 漸近安定な TDPS の支配極解析に関する既存結果 [7, 8] を概観する。支配極とは, システムの極の中で複素平面上のもっとも右側に位置する極のことである。TDPS Σ の支配極 κ_Σ は次のように表される。

$$\kappa_\Sigma := \arg \max_{\lambda \in \Lambda_\Sigma} \operatorname{Re}(\lambda) \quad (5)$$

なお, 先述のように Λ_Σ の要素は一般に無限個存在するが, (5) 式で表される実部が最大となる極が存在することが知られている [10]。

ここで, TDPS の支配極を解析する前に, Frobenius 固有値に関する次の補題 [9] を示す。

【補題 1】 行列 $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ はスペクトル半径 $\rho(A)$ に等しい実固有値をもつ。

行列 $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ に対して, スペクトル半径 $\rho(A)$ に等しい $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ の固有値を Frobenius 固有値とよび, 本論文では $\lambda_F(A)$ と書くことにする。すると, 明らかに

$\lambda_F(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$ が成り立つ。またこの補題より、行列 $M \in \mathbb{M}^n$ は $\max_{\lambda \in \sigma(M)} \operatorname{Re}(\lambda)$ に等しい実固有値を持つことが容易にわかる。よって本論文では、Metzler 行列 M に対しても Frobenius 固有値が定義されるものとし、

$$\lambda_F(M) := \max_{\lambda \in \sigma(M)} \operatorname{Re}(\lambda) \quad (6)$$

と定義する。本論文では、Metzler 行列に関する次の二つの補題 [1,9] を用いる。

【補題 2】 $M \in \mathbb{M}^n$ について、次の三つの条件は等価である。

- (i) M が Hurwitz 安定である。
- (ii) M は正則であり、 $M^{-1} \leq 0$ となる。
- (iii) $Mg < 0$ を満たす $g \in \mathbb{R}_{++}^n$ が存在する。

【補題 3】 $M_1, M_2 \in \mathbb{M}^n$ について、 $M_1 \geq M_2$ のとき、 $\lambda_F(M_1) \geq \lambda_F(M_2)$ が成り立つ。

以上の準備のもと次の定理 [8] が成立する。

【定理 1】 [8] (1) 式で表される TDPS Σ が漸近安定である、すなわち $A \in \mathbb{H}^n$ がみたされていると仮定する。このとき、(5) 式で定義される支配極 κ_Σ は、次のように表すことができる。

$$\kappa_\Sigma = -\alpha^* < 0 \quad (7)$$

ただし、 $\alpha^* \in \mathbb{R}_{++}$ は

$$\lambda_F(\mathcal{A}(\alpha^*)) = 0 \quad (8)$$

の唯一解であり、 $\mathcal{A}(\alpha) \in \mathbb{M}^n$ ($\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$) は以下のように定義される。

$$\mathcal{A}(\alpha) := \alpha I + A_0 + \sum_{i=1}^N A_i e^{\alpha h_i} \quad (9)$$

さらに、 $h_i \in \mathbb{R}_{++}$ ($i=1, \dots, N$) によらず次式が成立する。

$$\kappa_\Sigma \geq \kappa_{\Sigma_0} = \lambda_F(A) \quad (10)$$

この定理は次の二つのことを示している。

- (i) 漸近安定な TDPS Σ の支配極 κ_Σ は実数であり、 κ_Σ を求めるには (8) 式を解けばよい。文献 [8] では、(8) 式を任意の精度で解くための二分探索法が提案されている。
- (ii) (10) 式から、TDPS Σ の支配極は、むだ時間のない線形非負システム Σ_0 の支配極より大きい、等しいということがわかる。支配極は収束速度の指標となるため、漸近安定な線形非負システムの収束速度はむだ時間によって（一般に）遅くなるといえる。

定理 1 は、漸近安定な TDPS Σ の支配極 κ_Σ が (7), (8) 式で特徴づけられることを主張している。そして、定理 1 を応用した先述の二分探索法を用いれば、固定されたむだ時間 h_i ($i=1, \dots, N$) に対して κ_Σ を（任意の精度で）求めることが可能となる。しかしながら、これらの結果は h_i の変化に応じて κ_Σ がどのように変化するかを明確に表すものではない。そこで文献 [8] では、支配極 κ_Σ とむだ時間 h_i ($i=1, \dots, N$) との関係をより明確にするために、(9) 式中の指数関数に対して Taylor 展

開による一次近似を施すことで、 κ_Σ の下界をむだ時間 h_i ($i=1, \dots, N$) の陽なる関数として導出している。

【定理 2】 [8] (1) 式で表される TDPS Σ が漸近安定である場合、つまり $A \in \mathbb{H}^n$ がみたされている場合を考える。条件

$$\lambda_F(-A_0^{-1}A_j) > 0 \quad (11)$$

をみたす j の集合を $J \subset \{1, \dots, N\}$ とし、さらに

$$\kappa_j(h_j) := -\frac{1}{h_j} [\lambda_F(-A^{-1}A_j)]^{-1} \quad (j \in J) \quad (12)$$

と定義する。このとき、次式が成立する。

$$\kappa_\Sigma \geq \kappa_j(h_j) \quad (\forall j \in J) \quad (13)$$

とくに、それぞれの $j \in J$ に対して $h_j \rightarrow \infty$ としたとき $\kappa_\Sigma \rightarrow 0$ となる。

この定理では、むだ時間 h_i ($i=1, \dots, N$) のうち h_i ($i \neq j$) は固定して、 h_j のみを変化させた際の支配極 κ_Σ の振舞いを論じている。この定理より、 $\lambda_F(-A_0^{-1}A_j) > 0$ という条件のもとでは、支配極 κ_Σ はむだ時間 h_j が増加すると $1/h_j$ ($j \in J$) のオーダーより速いか同程度の速度で増加し原点に収束することがわかる。なお、定理 2 の (11) 式における行列 $A_0 \in \mathbb{M}^n$ の正則性は、定理の仮定 $A \in \mathbb{H}^n$ と $A \geq A_0$ なる関係および補題 2 の条件 (iii) より $A_0 \in \mathbb{M}^n$ が Hurwitz 安定となることから保証される。さらに $A_0, A \in \mathbb{M}^n \cap \mathbb{H}^n$ かつ $A \geq A_0$ より $-A^{-1} \geq -A_0^{-1}$ が成立するから、(12) 式中の $\lambda_F(-A^{-1}A_j)$ に関して補題 3 より $\lambda_F(-A^{-1}A_j) \geq \lambda_F(-A_0^{-1}A_j) > 0$ が成立する。

4. 複数のむだ時間の変動に対する支配極の依存性

前節の最後で、漸近安定な TDPS において係数行列に関する条件 (11) 式が成り立つ場合、個々のむだ時間の増加とともに支配極が原点に収束することを述べた（定理 2）。しかしながら以上の議論では、複数のむだ時間が同時に変動する場合の支配極の挙動に関する考察がなされていない。また、条件 (11) 式が成立しない場合の支配極の挙動に関しても明確な結論を与えるものとはなっていない。そこで本節では、複数のむだ時間を有する TDPS に対して、支配極が特定の複数のむだ時間の変動に依存するための条件、および依存しないための条件を、係数行列に関する固有値感度という指標を用いて明確にする。

4.1 固有値感度

本項では、支配極のむだ時間に関する依存性を解析するうえで重要となる行列対の固有値感度という概念を導入する。さらに固有値感度に関するいくつかの補題を示す。

まず、固有値感度の定義 [8] を以下に示す。

【定義 3】 [8] 与えられた $M_0, M_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ について、

$$\sigma(M_0 + \nu M_1) = \sigma(M_0) \quad (\forall \nu \in \mathbb{C}) \quad (14)$$

が成り立つとき、 (M_0, M_1) は固有値感度をもたないという。

【定義 4】 [8] 与えられた $M_0, M_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ について、(14) 式が成り立たないとき、 (M_0, M_1) は固有値感度をもつという。

これらの定義は、基本的に行列 M_0 が $M_0 + \nu M_1$ ($\nu \in \mathbb{C}$) と変化したときに固有値が変化するか否か（固有値が行列の変化の影響を受けるか否か）を定めるものであるため、定義の用語として“感度”を用いている。

固有値感度に関して次の補題が成り立つ。

【補題 4】 [8,11] $A_0 \in \mathbb{M}^n \cap \mathbb{H}^n$ と $A_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ に対して、以下の三つの条件は等価である。

- (i) (A_0, A_1) が固有値感度を持たない。
- (ii) $\lambda_F(-A_0^{-1}A_1) = 0$ となる。
- (iii) A_0 と A_1 をつぎに示す構造に相似変換するような置換行列 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在する。

$$P^T A_0 P = \begin{bmatrix} A_{0,11} & * \\ & \ddots \\ 0 & A_{0,LL} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^n$$

$$P^T A_1 P = \begin{bmatrix} 0_{\mu_1, \mu_1} & * \\ & \ddots \\ 0 & 0_{\mu_L, \mu_L} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \quad (15)$$

ただし $A_{0,ii} \in \mathbb{M}^{\mu_i}$ であり、 $0_{\mu_i, \mu_i}$ は μ_i 行 μ_i 列の零行列である。さらに、* の部分の要素はすべて非負である。

補題 4 より次の系がただちに導かれる。

【系 1】 [8] $A_0 \in \mathbb{M}^n \cap \mathbb{H}^n$ と $A_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ に対して、以下の二つの条件は等価である。

- (i) (A_0, A_1) が固有値感度をもつ。
- (ii) $\lambda_F(-A_0^{-1}A_1) > 0$ となる。

系 1 をもちいることで、固有値感度に関する次の補題が成立することがわかる。この補題は、複数のむだ時間を有する漸近安定な TDPS の支配極のむだ時間への依存性を解析するうえで重要となる。

【補題 5】 与えられた $A_0 \in \mathbb{M}^n \cap \mathbb{H}^n$, $A_i \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ($i = 1, \dots, N$) に対して、 $(A_0, A_1 + \dots + A_N)$ が固有値感度をもつならば、任意の $c_i \in \mathbb{R}_{++}$ ($i = 1, \dots, N$) に対して $(A_0, c_1 A_1 + \dots + c_N A_N)$ も固有値感度をもつ。

この補題の証明は、付録 1. に記した。

4.2 複数のむだ時間の変動に対する支配極の依存性と固有値感度

前項で導入した固有値感度により、むだ時間の変動に対する支配極の依存性を明確にできる。ただし本論文では複数の N 個のむだ時間を有する TDPS を扱うため、 N 個のむだ時間のうちのむだ時間の変動を扱うかを考慮する必要がある。そこで、変動を考慮するむだ時間の添字の集合 $V \subset \{1, \dots, N\}$ を定義する。たとえば、 $N = 4$ の際にむだ時間 h_1, h_3 の変動を考慮する場合には、 $V = \{1, 3\}$ となる。さらに、むだ時間 h_i ($i \in V$) は、 $h_0 \in \mathbb{R}_{++}$, $c_i \in \mathbb{R}_{++}$ ($i \in V$) を用いて次のように表されるものとする。

$$h_i = c_i h_0 \quad (i \in V) \quad (16)$$

一方、むだ時間 h_j ($j \notin V$) は固定されているものと考え、以上の準備のもとで、支配極がむだ時間 $\{h_i\}$ ($i \in V$) に依存するための条件を次の定理に示す。

【定理 3】 TDPS Σ が漸近安定である、すなわち $A \in \mathbb{H}^n$ がみたされている場合を考える。与えられた任意の添字集合 $V \subset \{1, \dots, N\}$ (ただし空集合ではない) に対して、むだ時間 h_i ($i \in V$) は $h_0 \in \mathbb{R}_{++}$, $c_i \in \mathbb{R}_{++}$ ($i \in V$) を用いて (16) 式で表されるものとする。このとき、

$$A_V := \sum_{i \in V} A_i \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad A_{\bar{V}} := A_0 + \sum_{j \notin V} A_j \in \mathbb{M}^n \quad (17)$$

から構成される行列対 $Q_V: (A_{\bar{V}}, A_V)$ が固有値感度をもつならば、任意に固定された $h_j \in \mathbb{R}_{++}$ ($j \notin V$) と任意に固定された $c_i \in \mathbb{R}_{++}$ ($i \in V$) に対して次式が成立する。

$$\lambda_F \left(-A^{-1} \left(\sum_{i \in V} c_i A_i \right) \right) > 0 \quad (18)$$

$$\kappa_\Sigma \geq -\frac{1}{h_0} \left[\lambda_F \left(-A^{-1} \left(\sum_{i \in V} c_i A_i \right) \right) \right]^{-1} \quad (19)$$

したがって後者よりとくに次式が成立する。

$$\lim_{h_0 \rightarrow \infty} \kappa_\Sigma = 0 \quad (20)$$

(証明) 文献 [8] にあるように、(9) 式中の指数関数に対して Taylor 展開による一次近似を施すことで、次のような κ_Σ と h_i ($i = 1, \dots, N$) との関係が得られる。

$$\kappa_\Sigma \geq - \left[\lambda_F \left(-A^{-1} \left(I + \sum_{i=1}^N h_i A_i \right) \right) \right]^{-1} \quad (21)$$

この関係は定理 2 の導出にも用いられている。

本証明では、上式右辺に着目する。まず、安定条件 $A \in \mathbb{H}^n$ と $A \geq A_{\bar{V}}$ より $A_{\bar{V}} \in \mathbb{H}^n$ が成り立つ。したがって補題 2 より次式が得られる。

$$-A^{-1} \geq 0, \quad -A_{\bar{V}}^{-1} \geq 0 \quad (22)$$

上式と $A \geq A_{\bar{V}}$ の関係より次式が得られる。

$$-A^{-1} \geq -A_{\bar{V}}^{-1} \quad (23)$$

さらに、(22), (16) 式より次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} -A^{-1} \left(I + \sum_{i=1}^N h_i A_i \right) &\geq -A^{-1} \left(\sum_{i=1}^N h_i A_i \right) \\ &\geq -h_0 A^{-1} \left(\sum_{i \in V} c_i A_i \right) \end{aligned}$$

よって、上式、(23) 式と補題 3 から次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\lambda_F \left(-A^{-1} \left(I + \sum_{i=1}^N h_i A_i \right) \right) \\ &\geq h_0 \lambda_F \left(-A^{-1} \left(\sum_{i \in V} c_i A_i \right) \right) \\ &\geq h_0 \lambda_F \left(-A_{\bar{V}}^{-1} \left(\sum_{i \in V} c_i A_i \right) \right) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで仮定より $Q_V: (A_{\bar{V}}, A_V)$ は固有値感度をもち、さらに $c_i \in \mathbb{R}_{++}$ ($i \in V$) であるから、補題 5 より

$$\left(A_{\bar{V}}, \sum_{i \in V} c_i A_i \right)$$

も固有値感度をもつ。したがって系 1 より (24) 式の最右辺は正である。これよりただちに (18) 式が成立する。さらに (21), (24) 式から次式が導かれる。

$$\begin{aligned}\kappa_{\Sigma} &\geq -\left[\lambda_F\left(-A^{-1}\left(I+\sum_{i=1}^N h_i A_i\right)\right)\right]^{-1} \\ &\geq -\frac{1}{h_0}\left[\lambda_F\left(-A^{-1}\left(\sum_{i \in V} c_i A_i\right)\right)\right]^{-1}\end{aligned}\quad (25)$$

これは確かに (19) 式と一致している。□

以上では、行列対 Q_V が固有値感度をもつ場合に成立する結果を述べた。一方、この行列対が固有値感度をもたない場合には、次の結果が成立する。

【定理 4】 TDPS Σ が漸近安定である、すなわち $A \in \mathbb{H}^n$ がみたされている場合を考える。与えられた任意の添字集合 $V \subset \{1, \dots, N\}$ (ただし空集合ではない) に対して、TDPS $\Sigma_{\bar{V}}$ を次式で定義する。

$$\Sigma_{\bar{V}}: \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{j \notin V} A_j x(t - h_j) \quad (t \geq 0) \quad (26)$$

このとき、 $\Sigma_{\bar{V}}$ は漸近安定となる。さらに (17) 式で表される行列対 $Q_V: (A_{\bar{V}}, A_V)$ が固有値感度をもたないならば、 Λ_{Σ} は $h_i \in \mathbb{R}_{++}$ ($i \in V$) に依存せず、 $\Lambda_{\Sigma} = \Lambda_{\Sigma_{\bar{V}}}$ となる。したがってとくに κ_{Σ} は $h_i \in \mathbb{R}_{++}$ ($i \in V$) に依存せず、 $\kappa_{\Sigma} = \kappa_{\Sigma_{\bar{V}}}$ となる。

(証明) 安定条件 $A \in \mathbb{H}^n$ より明らかに $A_{\bar{V}} \in \mathbb{H}^n$ であり、したがって TDPS(26) は漸近安定である。仮定より $Q_V: (A_{\bar{V}}, A_V)$ は固有値感度をもたないから、補題 4 の (i) $\Leftrightarrow$ (iii) より、 $A_{\bar{V}} \in \mathbb{M}^n \cap \mathbb{H}^n$ と $A_V \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ を次の構造に相似変換するような置換行列 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在する。

$$\begin{aligned}P^T A_{\bar{V}} P &= \begin{bmatrix} A_{\bar{V},11} & * \\ & \ddots \\ 0 & A_{\bar{V},LL} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^n \\ P^T A_V P &= \begin{bmatrix} 0_{\mu_1, \mu_1} & * \\ & \ddots \\ 0 & 0_{\mu_L, \mu_L} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}\end{aligned}\quad (27)$$

ただし、 $A_{\bar{V},ii} \in \mathbb{M}^{\mu_i}$ であり、* の部分の要素はすべて非負である。上式と $A_0 \in \mathbb{M}^n$, $A_i \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ($i = 1, \dots, N$) および (17) 式より明らかに次式が成立する。

$$\begin{aligned}P^T A_0 P &= \begin{bmatrix} A_{0,11} & * \\ & \ddots \\ 0 & A_{0,LL} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^n, \\ P^T A_j P &= \begin{bmatrix} A_{j,11} & * \\ & \ddots \\ 0 & A_{j,LL} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \quad (j \notin V), \\ P^T A_i P &= \begin{bmatrix} 0_{\mu_1, \mu_1} & * \\ & \ddots \\ 0 & 0_{\mu_L, \mu_L} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \quad (i \in V)\end{aligned}\quad (28)$$

ただし、 $A_{0,ii} \in \mathbb{M}^{\mu_i}$, $A_{j,ii} \in \mathbb{R}_+^{\mu_i \times \mu_i}$ ($j \notin V$) である。し

たがって TDPS Σ の極 Λ_{Σ} に関して次式を得る。

$$\begin{aligned}\det\left(sI - A_0 - \sum_{i=1}^N A_i e^{-sh_i}\right) &= \det\left(P^T \left(sI - A_0 - \sum_{i=1}^N A_i e^{-sh_i}\right) P\right) \\ &= \det\left(sI - P^T A_0 P - \sum_{i=1}^N P^T A_i P e^{-sh_i}\right) \\ &= \det\left(sI - P^T A_0 P - \sum_{j \notin V} P^T A_j P e^{-sh_j}\right) \\ &= \det\left(sI - A_0 - \sum_{j \notin V} A_j e^{-sh_j}\right)\end{aligned}$$

上式より、 Λ_{Σ} は $h_i \in \mathbb{R}_{++}$ ($i \in V$) に依存しない。さらに上式と (26) 式の TDPS $\Sigma_{\bar{V}}$ の定義より、明らかに $\Lambda_{\Sigma} = \Lambda_{\Sigma_{\bar{V}}}$ が成立する。□

定理 3, 4 は互いに対になっていることに注意されたい。これらの定理より、漸近安定な TDPS Σ の支配極 κ_{Σ} が (あるいは極そのものが) 複数のむだ時間 $\{h_i\}$ ($i \in V$) の変動に依存しないための必要十分条件は、(17) 式で表される行列対 Q_V が固有値感度をもたないことであることがわかる。したがって、定理 3, 4 の (十分条件の形の) 主張を次のように強めることができる。

【系 1】 定理 3 と同一の設定のもとで、(20) 式が成立するための必要十分条件は、(17) 式で表される行列対 Q_V が固有値感度をもつことである。

【系 2】 定理 4 と同一の設定のもとで、 Σ の支配極 κ_{Σ} が (あるいは極そのものが) 複数のむだ時間 $\{h_i\}$ ($i \in V$) の変動に依存しないための必要十分条件は、(17) 式で表される行列対 Q_V が固有値感度をもたないことである。

なお、定理 3, 4 において $N = 1$ とすれば、これらの結果は文献 [8] における結果と一致する。

定理 3, 4 より、与えられた漸近安定な TDPS に対して支配極が (あるいは極そのものが) 特定の複数のむだ時間の変動に依存するかどうかを調べる場合、変動を考慮するむだ時間に対応した添字集合 V を定義し、そのうえで行列対 Q_V の固有値感度を調べればよい。しかし、行列対 Q_V の固有値感度をその定義である (14) 式に基づいて直接的に調べることは、一般に困難である。そこで、Metzler 行列、非負行列の性質に基づいた補題 4、系 1 を再び利用する。つまり、Frobenius 固有値

$$\lambda_F(-A_{\bar{V}}^{-1} A_V) \quad (29)$$

の値を調べ (ただし、定理 3, 4 の証明で述べたように、 $A_{\bar{V}} \in \mathbb{H}^n$ であることは保証されている)、もし $\lambda_F(-A_{\bar{V}}^{-1} A_V) > 0$ であれば、 Q_V は固有値感度をもつことがわかり、したがって定理 3 より κ_{Σ} は (あるいは Λ_{Σ} は) 着目する複数のむだ時間 $\{h_i\}$ ($i \in V$) の変動に依存することがわかる。逆に $\lambda_F(-A_{\bar{V}}^{-1} A_V) = 0$ であれば、 Q_V は固有値感度をもたないことがわかり、した

がって定理 4 より A_Σ は (したがっては κ_Σ も) いずれの h_i ($i \in V$) の変動にも依存しないことがわかる。

先述のように, 定理 3, 4 は漸近安定な TDPS Σ の支配極 κ_Σ が (あるいは極 A_Σ が) 複数のむだ時間 $\{h_i\}$ ($i \in V$) の変動に依存するかどうか, 行列対 (A_V, A_V) の固有値感度によって定まることを示しているが, この結果がむだ時間 $h_j \in \mathbb{R}_+$ ($j \notin V$) に依存しないものであることを強調しておく. たとえば $N=2$ である場合 (すなわちむだ時間が h_1 と h_2 の二つのみである場合), 極が $h_1 \in \mathbb{R}_+$ の変動に依存するかどうかは $(A_0 + A_2, A_1)$ の固有値感度のみによって定まり, $h_2 \in \mathbb{R}_+$ には依存しない. このような性質は, (非負とは限らない) TDS では一般に成立しない. 具体例としては, (1) 式において $N=2$ とし,

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とした TDS Σ_G が挙げられる ($A_0 \notin \mathbb{M}^2$ であるため Σ_G は非負ではない). この TDS が $h_1 \in \mathbb{R}_+$, $h_2 \in \mathbb{R}_+$ によらず安定となることは, スモールゲイン定理より容易に確認できる (係数行列を $(A_0, I_2, I_2, 0_{2,2})$ としたシステムの H_∞ ノルムが $1/2$ となることが解析的にわかる).

TDS Σ_G の特性方程式は,

$$F(h_1, h_2, s) := \det(sI - A_0 - A_1 e^{-sh_1} - A_2 e^{-sh_2}) \\ = (s+3)^2 - (1 - e^{-sh_1})(1 - e^{-sh_2})$$

を用いて $F(h_1, h_2, s) = 0$ で与えられる. ここで固有値感度の定義にしたがえば, $(A_0 + A_2, A_1)$ は固有値感度を持たない. しかしながら, $h_2 \neq 0$ であれば, Σ_G の極は $h_1 \in \mathbb{R}_+$ の値に依存する. たとえば, $(h_1, h_2) = (1, 1)$ とすると, $F(1, 1, s) > 0$ ($\forall s \in [-1, 0]$) となることが容易にわかる. すなわち Σ_G は $[-1, 0]$ 上に実数極を持たない. しかし, $(h_1, h_2) = (2, 1)$ とすると, $F(2, 1, -1) = 4 - (1 - e^2)(1 - e) \approx -6.98 < 0$, $F(2, 1, 0) = 9 > 0$ より Σ_G は $(-1, 0)$ 上に実数極を持つ. すなわち $h_2 = 1$ としたとき, A_{Σ_G} は h_1 の変動に依存する.

この例で示したように, 複数のむだ時間を有する一般の (非負とは限らない) TDS では, 極が着目するむだ時間の変動に依存するかどうかは他のむだ時間の長さに依存する. 定理 3, 4 は, 漸近安定な TDPS に関してはこのようなことが生じないことを明らかにしている. さらに定理 3, 4 における行列対 Q_V の固有値感度が補題 4 のように係数行列 A_i ($i=0, \dots, N$) の置換行列による相似変換後の構造によって特徴づけられることから, 総じて, 極のむだ時間に関する依存性は係数行列の構造 (非零要素の位置) のみによって定まることがわかる.

5. 数値例

本節では, 定理 3, 4 の正当性を数値例によって検証する. むだ時間を 2 個有する漸近安定な TDPS Σ の係数行列 $A_0 \in \mathbb{M}^3$, $A_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ($i=1, 2$) について, 次の三つの場合を考える.

[Case 1]:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3.5 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & -4.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & -4.3 \end{bmatrix}, \\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[Case 2]:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & -4.9 & 0 \\ 0 & 0 & -4.3 \end{bmatrix}, \\ A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[Case 3]:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3.5 & 0.1 & 0 \\ 0 & -4.9 & 0 \\ 0 & 0 & -4.3 \end{bmatrix}, \\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これらの三つの場合に対して, $V = \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}$ として (29) 式の Frobenius 固有値の値を計算した結果を Table 1 に示す. また, これらの三つの場合に対して 3. で触れた二分探索法を (むだ時間 h_1, h_2 をグリッディングして) 適用し, 支配極を数値計算した結果を Figs. 1~3 に示す. ただし, h_1, h_2 をそれぞれ $[0, 10]$ の範囲で変化させた.

Table 1 Computation results of $\lambda_F(-A_V^{-1}A_V)$

	$V = \{1, 2\}$	$V = \{1\}$	$V = \{2\}$
Case 1	0.232	0.104	0.135
Case 2	0.163	0.163	0
Case 3	0	0	0

Fig. 1 Plots of κ_Σ for Case 1

Fig. 2 Plots of κ_Σ for Case 2 Fig. 3 Plots of κ_Σ for Case 3

はじめに Case 1 について考察する。Fig. 1 から、支配極が h_1, h_2 各々の増加にしたがって 0 に漸近している様子が確認できる。また Table 1 より、 $(A_0, A_1 + A_2)$, $(A_0 + A_2, A_1)$, および $(A_0 + A_1, A_2)$ は固有値感度をもつことがわかる。したがって Case 1 は定理 3 の内容と一致している。つぎに Case 2 について考察する。Fig. 2 から、 h_2 のみの変化に対して支配極は一定であるが、 h_1 を増加させると支配極が 0 に漸近する様子が確認できる。また Table 1 より、 $(A_0, A_1 + A_2)$ および $(A_0 + A_2, A_1)$ は固有値感度を持ち、 $(A_0 + A_1, A_2)$ は固有値感度をもたないことがわかる。したがって Case 2 は定理 3, 4 の内容と一致している。最後に Case 3 について考察する。Fig. 3 から、支配極が h_1, h_2 にかかわらず一定である様子が確認できる。また Table 1 より、 $(A_0, A_1 + A_2)$, $(A_0 + A_2, A_1)$, および $(A_0 + A_1, A_2)$ は固有値感度をもたないことがわかる。したがって Case 3 は定理 4 の内容と一致している。

以上の数値例より、漸近安定な TDPS の支配極のむだ時間に関する依存性は、行列対 Q_V の固有値感度によって決定づけられることが確認できた。

6. おわりに

本論文では、複数のむだ時間を有する安定な線形非負システムの支配極の解析を行った。とくに、係数行列により構成される行列対が固有値感度をもつならば、対応する複数のむだ時間をすべて増加させたときに支配極は原点に収束し、逆にこの行列対が固有値感度をもたないならば、支配極は（あるいは極そのものは）対応するむだ時間の変動に依存しないことを示した。このように、複数のむだ時間を有する線形非負システムの支配極のむだ時間に関する依存性を、固有値感度という概念を導入して明確にした。

参考文献

- [1] L. Farina and S. Rinaldi: *Positive Linear Systems: Theory and Applications*, John Wiley and Sons, Inc. (2000)
- [2] T. Tanaka and C. Langbort: The bounded real lemma for internally positive systems and H-infinity structured static state feedback; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 56, No. 9, pp. 2218–2223 (2011)
- [3] A. Rantzer: Distributed control of positive systems; *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pp. 6608–6611 (2011)
- [4] T. Ishizaki, K. Kashima, A. Girard, J. Imura, L. Chen and K. Aihara: Clustering-based H_2 -state aggregation of positive networks and its application to reduction of chemical master equations; *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4175–4180 (2012)
- [5] Y. Ebihara, D. Peaucelle and D. Arzelier: LMI approach to linear positive system analysis and synthesis; *Systems and Control Letters*, Vol. 63, No. 1, pp. 50–56 (2014)
- [6] W. M. Haddad and V. Chellaboina: Stability theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay; *Systems and Control Letters*, Vol. 51, No. 5, pp. 355–361 (2004)
- [7] S. Zhu, Z. Li and C. Zhang: Exponential stability analysis for positive systems with delays; *IET Control Theory and Applications*, Vol. 6, No. 6, pp. 761–767 (2012)
- [8] Y. Ebihara, D. Peaucelle, D. Arzelier and F. Gouaisbaut: Dominant pole of positive systems with time-delays; 第1回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム資料 (2014)
- [9] R. A. Horn and C. A. Johnson: *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (1985)
- [10] J. K. Hale: *Theory of Functional Differential Equations*, Springer (1977)
- [11] 西尾：むだ時間を有する線形非負システムの支配極解析; 京都大学工学部電気電子工学科 学士論文 (2014)

付 録

付録 1. 補題 5 の証明

(証明) $(A_0, A_1 + \dots + A_N)$ が固有値感度をもつならば, 任意の $b \in \mathbb{R}_{++}$ について $(A_0, b(A_1 + \dots + A_N))$ も固有値感度をもつことは明らかである. よって系 1 より, 次式が成り立つ.

$$\lambda_F(-bA_0^{-1}(A_1 + \dots + A_N)) > 0 \quad (\forall b \in \mathbb{R}_{++}) \quad (A1)$$

一方, $b = \min_{i=1, \dots, N} c_i$ とすれば, 任意の $c_i \in \mathbb{R}_{++}$ ($i = 1, \dots, N$) に対して次式が成り立つ (補題 2 より $-A_0^{-1} \geq 0$ であることに注意).

$$-A_0^{-1}(c_1 A_1 + \dots + c_N A_N)$$

$$\geq -bA_0^{-1}(A_1 + \dots + A_N) \geq 0$$

したがって補題 3 より次の関係が得られる.

$$\lambda_F(-A_0^{-1}(c_1 A_1 + \dots + c_N A_N))$$

$$\geq \lambda_F(-bA_0^{-1}(A_1 + \dots + A_N)) \quad (A2)$$

(A1), (A2) 式より $\lambda_F(-A_0^{-1}(c_1 A_1 + \dots + c_N A_N)) > 0$ となり, さらに系 1 を用いれば $(A_0, c_1 A_1 + \dots + c_N A_N)$ は固有値感度をもつことがわかる. $\square$

著 者 略 歴

にし お 直 也

2014 年 3 月京都大学工学部電気電子工学科卒業, 同年 4 月同大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程に進学し, 現在に至る.

えび はら よし お 雄 (正会員)

2002 年 3 月京都大学大学院工学研究科電気工学専攻博士後期課程修了. 同年 4 月京都大学大学院工学研究科助手, 2006 年同研究科講師, 2010 年同研究科准教授となり現在に至る. 数値最適化手法を用いた制御系の解析, 設計に関する研究に従事. 京都大学博士 (工学), 計測自動制御学会, 日本鉄鋼協会, IEEE などの会員.

はぎ わら とも みち 道 (正会員)

1986 年京都大学大学院工学研究科修士課程修了. 同年京都大学工学部助手, 1991 年助教授, 改組に伴い, 京都大学大学院工学研究科電気工学専攻助教授を経て, 2001 年より教授. サンプル値制御理論, 2 自由度制御系の設計法などの研究に従事. 京都大学工学博士. 計測自動制御学会, 電気学会, IEEE などの会員.