混合 H_2/H_∞ 平衡実現によるモデル低次元化*

和田 孝之[†]・藤本 寛和[‡]・藤崎 泰正[†]

Model Reduction based on Mixed H_2/H_∞ Balanced Realizations*

Takayuki WADA[†], Hirokazu FUJIMOTO[‡] and Yasumasa FUJISAKI[†]

This paper presents a mixed H_2/H_∞ balanced realization and applies this to model reduction. Mixed H_2/H_∞ balanced realization is a state space description such that solutions of H_2 Lyapunov equation and H_∞ Riccati equation become diagonal matrices simultaneously. It is shown that H_∞ and H_2 norms of any reduced model based on this realization are not greater than those of the original system respectively. Upper bounds of H_∞ norm and H_2 norm of the error system between the original model and the reduced model are also established.

1. はじめに

モデル低次元化 [1,2] は、動的システム理論における基本的課題である。複雑な高次元モデルから、対象システムの振舞いをよく近似する低次元化モデルを抽出することは、システムの本質についての情報が得られるだけでなく、それを用いて設計されるコントローラも低次元なものが得られるため、実用的な点でも有用である。また、低次元化モデルは対象システムの振舞いだけでなく、その性質も保存することが望ましい。この点に関して、平衡実現による低次元化 [3] では、 H_2 ノルムに関する性能保証はあるが、 H_∞ ノルムについての保証はない。一方、有界実平衡による低次元化 [4] では、 H_∞ ノルムに関する性能保証はあるが、 H_2 ノルムについての保証はないなど、従来の低次元化手法は一つの性能に焦点をあてて低次元化を行う手法と解釈することができる。

本論文では、平衡実現と有界実平衡に基づく低次元化の利点をあわせもつ、混合 H_2/H_∞ 平衡実現に基づくモデル低次元化を提案する。具体的には、平衡実現で

用いられる H_2 ノルムに対応する Lyapunov 方程式の解と、有界実平衡で用いられる H_∞ ノルムに対応する Riccati 方程式に着目し、座標変換を行う。得られた状態空間において状態変数の打ち切りを行えば、 H_2 ノルムと H_∞ ノルムの双方に対して性能保証をもつ低次元化モデルが得られる。なお、Lyapunov 方程式と Riccati 方程式を組み合わせるテクニックは、正実性を保存する低次元化においても利用されている [5]。しかし、そこでは Lyapunov 方程式を利用することによる計算手数の削減に着目しており、本論文で主張する二つの低次元化手法のもつ特徴に着目して用いられているわけではない。

2. 混合 H_2/H_∞ 平衡実現

可制御かつ可観測な線形時不変システム

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1}$$

を考える。ここで、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態、 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ は入力、 $y(t) \in \mathbb{R}^p$ は出力であり、 A はフルビッツ行列とする。

このシステムが混合 H_2/H_∞ 平衡実現であるとは、 H_2 性能 $\gamma_2 = (\text{tr} C \Sigma C^T)^{1/2}$ に関する Lyapunov 方程式

$$AX + XA^T + BB^T = 0$$

の解 $X > 0$ と、 H_∞ 性能 γ_∞ に対応する Riccati 方程式

$$A^T P + PA + C^T C + \gamma_\infty^{-2} P B B^T P = 0$$

の解 $P > 0$ が同一の対角行列

* 原稿受付 2015 年 8 月 6 日

第 59 回システム制御情報学会研究発表講演会にて発表 (2015 年 5 月)

[†] 大阪大学 大学院 情報科学研究科 Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University; 1-5 Yamadaoka, Suita, Osaka 565-0871, JAPAN

[‡] 大阪大学 工学部 (現在, 株式会社ショーワ) Faculty of Engineering, Osaka University; 2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka 565-0871, JAPAN

Key Words: model reduction, balanced realization.

$$X = P = \Sigma = \text{blkdiag}(\sigma_1 I_{n_1}, \sigma_2 I_{n_2}, \dots, \sigma_q I_{n_q}),$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_q > 0, \quad \sum_{i=1}^q n_i = n$$

となることである¹。ここで、 I_{n_i} は n_i 次の単位行列を表す。なお、論文を通して γ_∞ はこのシステムの H_∞ ノルムより大きく選ばれているとする。

この実現は可制御かつ可観測で安定な線形時不変システムの状態変数を座標変換することにより得られる。実際、変換前のシステムを

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

と書くとき、変換行列 T を適切に選び、各係数行列を

$$A = T\bar{A}T^{-1}, \quad B = T\bar{B}, \quad C = \bar{C}T^{-1}$$

と変換することで、混合 H_2/H_∞ 平衡実現が得られる。

この変換行列 T は、システム (2) の H_2 性能 $\gamma_2 = (\text{tr} \bar{C}\bar{X}\bar{C}^T)^{1/2}$ に関する Lyapunov 方程式

$$\bar{A}\bar{X} + \bar{X}\bar{A}^T + \bar{B}\bar{B}^T = 0$$

の解 $\bar{X} > 0$ と、 H_∞ 性能 γ_∞ に対応する Riccati 方程式

$$\bar{A}^T \bar{P} + \bar{P}\bar{A} + \bar{C}^T \bar{C} + \gamma_\infty^{-2} \bar{P}\bar{B}\bar{B}^T \bar{P} = 0$$

の解 $\bar{P} > 0$ から構成した行列 $\bar{X}^{1/2} \bar{P} \bar{X}^{1/2}$ の特異値分解

$$\bar{X}^{1/2} \bar{P} \bar{X}^{1/2} = U \Sigma^2 U^T$$

より得られる直交行列 U と正定対角行列 Σ を用いて、

$$T = \Sigma^{1/2} U^T \bar{X}^{-1/2}$$

と与えられる。

得られた Σ がシステム (1) の Lyapunov 方程式と Riccati 方程式の解であることは、 $T^{-1} \Sigma T^{-T} = \bar{X}$ より

$$\begin{aligned} A\Sigma + \Sigma A^T + BB^T \\ &= T(\bar{A}\bar{X} + \bar{X}\bar{A}^T + \bar{B}\bar{B}^T)T^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり、また $T^T \Sigma T = \bar{P}$ より

$$\begin{aligned} A^T \Sigma + \Sigma A + C^T C + \gamma_\infty^{-2} \Sigma B B^T \Sigma \\ &= T^{-T}(\bar{A}^T \bar{P} + \bar{P}\bar{A} + \bar{C}^T \bar{C} + \gamma_\infty^{-2} \bar{P}\bar{B}\bar{B}^T \bar{P})T^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることから確認できる。

(注意 1) 混合 H_2/H_∞ 平衡実現は、従来の平衡実現を特別な場合として含む自然な拡張となっている。実際、 $\gamma_\infty \rightarrow \infty$ とおくと、平衡実現が得られる。

(注意 2) 混合 H_2/H_∞ 平衡実現は、 H_2 性能 $\gamma_2 =$

$(\text{tr} B^T Y B)^{1/2}$ に関する Lyapunov 方程式

$$A^T Y + Y A + C^T C = 0$$

と、 H_∞ 性能 γ_∞ に対応する Riccati 方程式

$$AQ + QA^T + BB^T + \gamma_\infty^{-2} QC^T C Q = 0$$

を用いておこなうことも可能である。次節で、混合 H_2/H_∞ 平衡実現を用いて得られる低次元化モデルの性質を述べるが、それらの性質も同様に成り立つ。ただし、方程式の組合せを変えた際に求まる実現は一般に異なる。

3. 混合 H_2/H_∞ 平衡実現による低次元化

混合 H_2/H_∞ 平衡実現されたシステムの係数行列を

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

のように分割する。ただし、 $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$, $\bar{r} = \sum_{i=1}^r n_i$ であるとし、 $A_{11} \in \mathbb{R}^{\bar{r} \times \bar{r}}$ とする。このとき、 σ_{r+1} , σ_{r+2} , $\dots$, σ_q に対応する要素は入出力に関してシステムへの寄与が小さいとみなし打ち切ると、低次元化システムは

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_{11}x_r(t) + B_1u(t) \\ y(t) &= C_1x_r(t) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。この低次元化システムの H_2 ノルムは大きくなることが保証される。

【定理 1】 システム (1) の H_2 ノルムが γ_2 ならば、低次元化システム (3) の H_2 ノルムは γ_2 以下である。

(証明) H_2 性能に関する Lyapunov 方程式

$$A\Sigma + \Sigma A^T + BB^T = 0$$

をブロック単位で考え

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

とすると、(1,1) ブロックは

$$A_{11}\Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11}^T + B_1 B_1^T = 0$$

である。よって、システム (3) は内部安定であり、その H_2 ノルムは

$$(\text{tr} C_1 \Sigma_1 C_1^T)^{1/2}$$

である。一方、システム (1) の H_2 ノルムは

$$\begin{aligned} (\text{tr} C \Sigma C^T)^{1/2} &= (\text{tr} C_1 \Sigma_1 C_1^T + \text{tr} C_2 \Sigma_2 C_2^T)^{1/2} \\ &\geq (\text{tr} C_1 \Sigma_1 C_1^T)^{1/2} \end{aligned}$$

¹本論文では、 $\text{tr} XY$ は $\text{tr}(XY)$ を表すものとする。

であることから、定理を示せた。□

同様の考え方で、 H_∞ ノルムについても保証を与えることができる。

【定理 2】 システム (1) の H_∞ ノルムが γ_∞ 以下ならば、低次元化システム (3) の H_∞ ノルムも γ_∞ 以下である。

(証明) 定理 1 の証明と同様に Riccati 方程式の (1,1) ブロックを考えると、

$$A_{11}^T \Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11} + C_1^T C_1 + \gamma_\infty^{-2} \Sigma_1 B_1 B_1^T \Sigma_1 = 0$$

である。行列 Σ_1 がこの方程式を満足するため、システム (3) の H_∞ ノルムが γ_∞ 以下である。□

ここまでで、低次元化システム (3) の H_2 ノルムと H_∞ ノルムがもとのシステム (1) の各ノルムより大きくなることを示した。つぎに、誤差について評価を行う。

【定理 3】 システム (1) の伝達関数を $G(s)$ 、低次元化システム (3) の伝達関数を $G_r(s)$ とすると、

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^q \sigma_i$$

が成り立つ。ただし、 $\|\cdot\|_\infty$ は H_∞ ノルムを表す。

(証明) まず、システム (1) に出力 $z(t) = \gamma_\infty^{-1} B^T \Sigma x(t)$ を追加したシステム

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ \hat{y}(t) &= \hat{C}x(t), \\ \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C \\ \gamma_\infty^{-1} B^T \Sigma \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

を考える。このシステムの平衡実現を求めるために解くべき方程式は、

$$\begin{aligned} 0 &= A\Sigma + \Sigma A^T + BB^T \\ 0 &= A^T Y + Y A + \hat{C}^T \hat{C} \\ &= A^T Y + Y A + C^T C + \gamma_\infty^{-2} \Sigma B B^T \Sigma \end{aligned}$$

であるが、後者の方程式の解は $Y = \Sigma$ であるため、システム (4) は平衡実現である。また、この Σ は混合 H_2/H_∞ 平衡実現を行うために解かなければならない Riccati 方程式の解と同じである。

そこで、システム (4) の係数行列を

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix}, \\ \hat{C}_1 &= \begin{bmatrix} C_1 \\ \gamma_\infty^{-1} B_1^T \Sigma_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 \\ \gamma_\infty^{-1} B_2^T \Sigma_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と分割し、低次元化システムを

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_{11} x_r(t) + B_1 u(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{C}_1 x_r(t) \end{aligned} \quad (5)$$

と構成する。平衡実現による低次元化誤差の上界は

$$\|\hat{G}(s) - \hat{G}_r(s)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^q \sigma_i$$

と評価できる [2]。ただし、 $\hat{G}(s)$ はシステム (4) の伝達関数、 $\hat{G}_r(s)$ はシステム (5) の伝達関数である。さらに、 $\hat{G}(s)$ 、 $\hat{G}_r(s)$ は $G(s)$ 、 $G_r(s)$ に出力チャンネル $z(t)$ を追加したシステムなので、

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \|\hat{G}(s) - \hat{G}_r(s)\|_\infty$$

が成り立つ。よって、定理の結果を得る。□

この定理は、通常の平衡実現の場合と同様に、誤差システムの H_∞ ノルムが、打ち切った状態変数に対応する Σ の対角要素の和で評価することができることを主張している。同様に H_2 ノルムについても評価を行う。まず、誤差システムの H_2 ノルムの上界を、あるシルベスタ方程式の解により特徴づける。

【補題 1】 システム (1) の伝達関数を $G(s)$ 、低次元化システム (3) の伝達関数を $G_r(s)$ とすると、

$$\begin{aligned} \|G(s) - G_r(s)\|_2^2 &\leq \text{tr} C_2 \Sigma_2 C_2^T + \gamma_\infty^{-2} \text{tr} \Sigma_2 B_2 \Sigma_2 B_2^T \Sigma_2 \\ &\quad + 2 \text{tr} \tilde{X}_{23} A_{21}^T \Sigma_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $\|\cdot\|_2$ は H_2 ノルムを表し、 $\tilde{X}_{23} \in \mathbb{R}^{(n-\bar{r}) \times \bar{r}}$ 、 $\tilde{X}_{13} \in \mathbb{R}^{\bar{r} \times \bar{r}}$ は、Sylvester 方程式

$$A \begin{bmatrix} \tilde{X}_{13} \\ \tilde{X}_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{X}_{13} \\ \tilde{X}_{23} \end{bmatrix} A_{11}^T + B B_1^T = 0 \quad (6)$$

を満たすとする。

なお、(6) 式の可解性は A 、 A_{11} がフルビッツ行列であることから保証される。補題の証明は付録に示す。この補題を用いて、誤差システムの H_2 ノルムの上界が得られる。

【定理 4】 システム (1) の伝達関数を $G(s)$ 、低次元化システム (3) の伝達関数を $G_r(s)$ とすると、

$$\begin{aligned} \|G(s) - G_r(s)\|_2^2 &\leq \text{tr} C_2 \Sigma_2 C_2^T + \gamma_\infty^{-2} \text{tr} \Sigma_2 B_2 \Sigma_2 B_2^T \Sigma_2 \\ &\quad + 2\bar{r} \|H(s)\|_\infty \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、

$$H(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \Sigma_2 A_{12}^T \\ \hline 0 & A_{21}^T \Sigma_2 & 0 \end{array} \right]$$

とおいた。

(証明) 行列 $\tilde{X}_{13}$ 、 $\tilde{X}_{23}$ 、 Σ_1 は Sylvester 方程式

$$A \begin{bmatrix} \tilde{X}_{13} - \Sigma_1 \\ \tilde{X}_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{X}_{13} - \Sigma_1 \\ \tilde{X}_{23} \end{bmatrix} A_{11}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_2 A_{12}^T \end{bmatrix}$$

を満たす. この方程式の解は

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{13} - \Sigma_1 \\ \tilde{X}_{23} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\bar{r}} (\lambda_i I + A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_2 A_{12}^T \end{bmatrix} v_i \hat{v}_i^*$$

と書くことができる [2]. ただし, λ_i は, A_{11} の固有値, $v_i, \hat{v}_i$ は λ_i に対応する正規化された右固有ベクトル, 左固有ベクトル ($\|v_i\| = \|\hat{v}_i\| = 1$) である. これより,

$$\begin{aligned} \text{tr } \tilde{X}_{23} A_{21}^T \Sigma_2 &= \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & A_{21}^T \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_{13} - \Sigma_1 \\ \tilde{X}_{23} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{\bar{r}} \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & A_{21}^T \Sigma_2 \end{bmatrix} (\lambda_i I + A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_2 A_{12}^T \end{bmatrix} v_i \hat{v}_i^* \end{aligned}$$

である. 各項のトレースについて,

$$\begin{aligned} &\text{tr} \begin{bmatrix} 0 & A_{21}^T \Sigma_2 \end{bmatrix} (\lambda_i I + A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_2 A_{12}^T \end{bmatrix} v_i \hat{v}_i^* \\ &= \hat{v}_i^* \begin{bmatrix} 0 & A_{21}^T \Sigma_2 \end{bmatrix} (\lambda_i I + A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_2 A_{12}^T \end{bmatrix} v_i \\ &\leq \|\hat{v}_i\| \left\| \begin{bmatrix} 0 & A_{21}^T \Sigma_2 \end{bmatrix} (\lambda_i I + A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_2 A_{12}^T \end{bmatrix} v_i \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 0 & A_{21}^T \Sigma_2 \end{bmatrix} (\lambda_i I + A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_2 A_{12}^T \end{bmatrix} v_i \right\| \\ &\leq \sigma_{\max} \left(\begin{bmatrix} 0 & A_{21}^T \Sigma_2 \end{bmatrix} (\lambda_i I + A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_2 A_{12}^T \end{bmatrix} \right) \\ &\leq \|H(s)\|_\infty \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, はじめの不等式を導くため, コーシー・シュワルツの不等式を用いた. $\|\cdot\|$ は 2 ノルムまたは誘導 2 ノルム, $\sigma_{\max}$ は行列の最大特異値である. これを補題 1 に用いると定理の成立を確認できる. □
この定理で与えた上界の各項は, それぞれ Σ_2 について, 一次, 三次, 二次となっており, 小さな Σ_2 を選ぶと誤差システムの H_2 ノルムの上界が小さくなるのがわかる.

4. 二組の入出力チャンネルをもつプラントのモデル低次元化への拡張

本節では, 二組の入出力チャンネルをもつプラント

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \bar{A}\tilde{x}(t) + \bar{B}_1 w(t) + \bar{B}_2 u(t) \\ z(t) &= \bar{C}_1 \tilde{x}(t) \\ y(t) &= \bar{C}_2 \tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

を対象に, 入力 u から出力 y までの H_∞ ノルムと入力 w から出力 z までの H_2 ノルムを保存するモデル低次元化を考える. この低次元化は w から z までの H_2 性能 $\gamma_2 = (\text{tr } \bar{C}_1 \bar{X} \bar{C}_1^T)^{1/2}$ に関する Lyapunov 方程式

$$\bar{A}\bar{X} + \bar{X}\bar{A}^T + \bar{B}_1 \bar{B}_1^T = 0$$

の解 $\bar{X} > 0$ と, u から y までの H_∞ 性能 γ_∞ に対応する Riccati 方程式

$$\bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A} + \bar{C}_2^T \bar{C}_2 + \gamma_\infty^{-2} \bar{P} \bar{B}_2 \bar{B}_2^T \bar{P} = 0$$

の解 $\bar{P} > 0$ をもとに同じ手順で座標変換行列 T を求め, 座標変換を行い,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) \end{aligned}$$

を得た後に, 状態変数の打ち切りを考えればよい. 混合 H_2/H_∞ 平衡実現した後に係数行列を

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と分割して書いたとき, 低次元化システムを

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_{11} x_r(t) + B_{11} w(t) + B_{12} u(t) \\ z(t) &= C_{11} x_r(t) \\ y(t) &= C_{21} x_r(t) \end{aligned}$$

とすると,

$$\begin{aligned} \|G_r^{(zw)}(s)\|_2 &\leq \|G^{(zw)}(s)\|_2 \\ \|G_r^{(yu)}(s)\|_\infty &\leq \|G^{(yu)}(s)\|_\infty \end{aligned}$$

が保証される. ただし, G, G_r はそれぞれ元のシステムと低次元化システムの伝達関数を表し, 上付きの (zw) と (yu) は, 入力 w から出力 z , 入力 u から出力 y までの伝達関数であることを表す.

5. 数値例

システムの係数行列を

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -50 & -79 & -33 & -5 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} 50 & 15 & 5 & 0.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

に選ぶ. このとき, H_2 ノルムは 0.6385, H_∞ ノルムは 1.0 である. そこで, $\gamma_\infty = 1.00001$ と選び, 混合 H_2/H_∞ 平衡実現を行うと,

$$\Sigma = \text{diag}(0.7333, 0.1222, 0.1070, 0.0553)$$

となり, 係数行列として

$$A = \begin{bmatrix} -0.7298 & -0.1493 & -0.4877 & 0.6005 \\ -0.2180 & -0.1212 & -5.0876 & 1.5088 \\ 0.7133 & 5.0965 & -0.9678 & 1.6585 \\ -0.8819 & -1.5179 & 1.6655 & -3.1812 \end{bmatrix}$$

Table 1 低次元化システムの H_2 ノルムと H_∞ ノルム

	H_2 ノルム	H_∞ ノルム
元システム	0.6385	1.0000
平衡実現	0.6168	1.2053
有界実平衡	0.6610	1.0000
混合 H_2/H_∞ 平衡実現	0.6211	0.9780

Table 2 誤差システムの H_2 ノルムと H_∞ ノルム

	H_2 ノルム	H_∞ ノルム
平衡実現	0.0958	0.0850
有界実平衡	0.1694	0.1272
混合 H_2/H_∞ 平衡実現	0.1140	0.0859

$$B = \begin{bmatrix} -1.0346 \\ -0.1721 \\ 0.4551 \\ -0.5930 \end{bmatrix}$$

$$C = [-0.7034 \ -0.1708 \ -0.4525 \ 0.5921]$$

が得られた。そこで、 $\sigma_4 = 0.0553$ が σ_3 に比べて小さいので、一次元の低次元化を行った。平衡実現または有界実平衡を用いて得られた低次元化モデルの各ノルムとともに、結果を Table 1 に示す。なお、平衡実現、有界実平衡における Σ に対応する値はそれぞれ

$$\Sigma_b = \text{diag}(0.5280, 0.1172, 0.1026, 0.0425)$$

$$\Sigma_{br} = \text{diag}(0.9961, 0.1265, 0.1147, 0.0720)$$

であり、一次元低次元化することは、これらの方法においても妥当である。混合 H_2/H_∞ 平衡実現による低次元化では、 H_∞ ノルムと H_2 ノルムがともに小さくなっていることが確認できる。一方、平衡実現では H_∞ ノルムが大きくなっており、有界実平衡では H_2 ノルムが大きくなった。また低次元化モデルの誤差を H_2 ノルムと H_∞ ノルムで測った結果を Table 2 に示す。表より、

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty = 0.0859 \leq 2\sigma_4 = 0.11106$$

であり、定理 3 を満たしていることが確認できる。また、 H_2 ノルムについても、

$$\|G(s) - G_r(s)\|_2 = 0.1140 \leq 0.2469$$

であり、定理 4 を満たしている。

6. おわりに

本論文では、平衡実現と有界実平衡の利点を併せもつ混合 H_2/H_∞ 平衡実現を提案した。これは、平衡実現で表れるグラミアンに対応する Lyapunov 方程式と有界実平衡の際に表れる Riccati 方程式の解を平衡させるよう状態空間の座標変換を行った後に、状態変数の打ち切りを行うものである。得られた低次元化モデルは H_2 ノルム

と H_∞ ノルムが元のシステムの各ノルムより大きな値にはならないことを示した。また、低次元化モデルと元のシステムの誤差について、 H_2 ノルム、 H_∞ ノルムのそれぞれで測った場合の解析結果を与えた。さらに、提案手法を二組の入出力チャンネルをもつシステムに拡張すると、各入出力チャンネルのそれぞれについて、異なるノルムで評価しつつ低次元化モデルを構成できることを示した。

参考文献

- [1] 大日方, アンダーソン (システム制御情報学会 (編)): 制御システム設計 — コントローラの低次元化, システム制御情報ライブラリー 21, 朝倉書店 (1999)
- [2] A. C. Antoulas: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*, SIAM (2005)
- [3] B. C. Moore: Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, No. 1, pp. 17–32 (1981)
- [4] P. C. Opdenacker and E. A. Jonckheere: A contraction mapping preserving balanced reduction scheme and its infinity norm error bounds; *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 35, No. 2, pp. 184–189 (1988)
- [5] K. Unneland, P. V. Dooren and O. Egeland: A novel scheme for positive real balanced truncation; *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, pp. 947–952 (2007)

付 録

補題 1 の証明

定理 3 の証明中で定義したシステム (4) とその低次元化システム (5) ならびに対応する伝達関数 $\hat{G}(s)$ と $\hat{G}_r(s)$ を考える。それらの出力の誤差システム

$$\hat{G}(s) - \hat{G}_r(s) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & A_{11} & B_1 \\ \tilde{C} - \tilde{C}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の H_2 ノルムの 2 乗は、Lyapunov 方程式

$$\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{A}^T + \tilde{B}\tilde{B}^T = 0$$

の解 $\tilde{X}$ を用いて、

$$\|G(s) - G_r(s)\|_2^2 = \text{tr} \tilde{C}\tilde{X}\tilde{C}^T$$

と書ける。ただし、Lyapunov 方程式の構造に着目すると解 $\tilde{X}$ は、

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & \tilde{X}_{13} \\ 0 & \Sigma_2 & \tilde{X}_{23} \\ \tilde{X}_{13}^T & \tilde{X}_{23}^T & \Sigma_1 \end{bmatrix}$$

となることがわかる。この方程式を $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ の定義を用い

てさらに展開すると, $\tilde{X}_{13}$, $\tilde{X}_{23}$ は

$$A \begin{bmatrix} \tilde{X}_{13} \\ \tilde{X}_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{X}_{13} \\ \tilde{X}_{23} \end{bmatrix} A_{11}^T + B B_1^T = 0$$

の解であることもわかる.

つぎに, H_2 ノルムの 2 乗の表現を展開すると,

$$\|\hat{G}(s) - \hat{G}_r(s)\|_2^2 = \text{tr} \hat{C}_2 \Sigma_2 \hat{C}_2^T + 2 \text{tr} \hat{C}_1 \Sigma_1 \hat{C}_1^T - 2 \text{tr} \hat{C}_1 \tilde{X}_{13} \hat{C}_1^T - 2 \text{tr} \hat{C}_2 \tilde{X}_{23} \hat{C}_1^T$$

が得られる. ここで, Lyapunov 方程式

$$\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{C}_1^T \\ \hat{C}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} = 0$$

の (1,2) ブロック

$$\hat{C}_1^T \hat{C}_2 = -A_{21}^T \Sigma_2 - \Sigma_1 A_{12}$$

より,

$$\text{tr} \hat{C}_2 \tilde{X}_{23} \hat{C}_1^T = -\text{tr} \tilde{X}_{23} A_{21}^T \Sigma_2 - \text{tr} \tilde{X}_{23} \Sigma_1 A_{12}$$

が成り立っている. また, 上述の $\tilde{X}_{13}$, $\tilde{X}_{23}$ に関する Sylvester 方程式の (1,1) ブロックが

$$A_{12} \tilde{X}_{23} = -A_{11} \tilde{X}_{13} - \tilde{X}_{13} A_{11}^T - B_1 B_1^T$$

であるため,

$$\begin{aligned} & \text{tr} \tilde{X}_{23} \Sigma_1 A_{12} \\ &= -\text{tr} \Sigma_1 A_{11} \tilde{X}_{13} - \text{tr} \Sigma_1 \tilde{X}_{13} A_{11}^T - \text{tr} \Sigma_1 B_1 B_1^T \end{aligned}$$

となる.

これらを用いると,

$$\begin{aligned} & \|\hat{G}(s) - \hat{G}_r(s)\|_2^2 \\ &= \text{tr} \hat{C}_2 \Sigma_2 \hat{C}_2^T + 2 \text{tr} \hat{C}_1 \Sigma_1 \hat{C}_1^T - 2 \text{tr} \hat{C}_1 \tilde{X}_{13} \hat{C}_1^T \\ & \quad + 2 \text{tr} \tilde{X}_{23} A_{21}^T \Sigma_2 + 2 \text{tr} \tilde{X}_{23} \Sigma_1 A_{12} \\ &= \text{tr} \hat{C}_2 \Sigma_2 \hat{C}_2^T + 2 \text{tr} \hat{C}_1 \Sigma_1 \hat{C}_1^T - 2 \text{tr} \hat{C}_1 \tilde{X}_{13} \hat{C}_1^T \\ & \quad + 2 \text{tr} \tilde{X}_{23} A_{21}^T \Sigma_2 - 2 \text{tr} \Sigma_1 A_{11} \tilde{X}_{13} \\ & \quad - 2 \text{tr} \Sigma_1 \tilde{X}_{13} A_{11}^T - 2 \text{tr} \Sigma_1 B_1 B_1^T \end{aligned}$$

が得られる. ここで, Lyapunov 方程式の (1,1) ブロック

$$A_{11}^T \Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11} + \hat{C}_1^T \hat{C}_1 = 0$$

に着目すると,

$$\begin{aligned} & \|\hat{G}(s) - \hat{G}_r(s)\|_2^2 \\ &= \text{tr} \hat{C}_2 \Sigma_2 \hat{C}_2^T + 2 \text{tr} \hat{C}_1 \Sigma_1 \hat{C}_1^T + 2 \text{tr} \tilde{X}_{23} A_{21}^T \Sigma_2 \\ & \quad - 2 \text{tr} (A_{11}^T \Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11} + \hat{C}_1^T \hat{C}_1) \tilde{X}_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2 \text{tr} \Sigma_1 B_1 B_1^T \\ &= \text{tr} \hat{C}_2 \Sigma_2 \hat{C}_2^T + 2 \text{tr} \hat{C}_1 \Sigma_1 \hat{C}_1^T \\ & \quad + 2 \text{tr} \tilde{X}_{23} A_{21}^T \Sigma_2 - 2 \text{tr} \Sigma_1 B_1 B_1^T \end{aligned}$$

である. 最後に, 可制御性グラミアン, 可観測性グラミアンから導出される H_2 ノルムについての恒等式から,

$$\text{tr} \hat{C}_1 \Sigma_1 \hat{C}_1^T - \text{tr} \Sigma_1 B_1 B_1^T = 0$$

であることを利用すると,

$$\|\hat{G}(s) - \hat{G}_r(s)\|_2^2 = \text{tr} \hat{C}_2 \Sigma_2 \hat{C}_2^T + 2 \text{tr} \tilde{X}_{23} A_{21}^T \Sigma_2$$

が得られる. そして, 定理 2 の証明の最後で用いたように, H_2 ノルムに関しても

$$\|G(s) - G_r(s)\|_2^2 \leq \|\hat{G}(s) - \hat{G}_r(s)\|_2^2$$

が成り立つことを用いると, 補題を示すことができる.

著者略歴

和田 孝之 (正会員)

2009 年 3 月神戸大学大学院自然科学研究科博士後期課程機械・システム科学専攻修了. 2008 年 4 月日本学術振興会特別研究員, 2010 年 4 月神戸大学大学院システム情報学研究科学術推進研究員, 同年 10 月鈴鹿工業高等専門学校電子情報工学科助教を経て, 2012 年 4 月大阪大学大学院情報科学研究科助教となり, 現在に至る. 確率のアプローチによる制御系解析・設計の研究などに従事. 博士 (工学). 2010 年本会奨励賞受賞. 計測自動制御学会, IEEE などの会員.

藤本 寛和

2015 年 3 月大阪大学工学部応用自然科学専攻卒業. 同年 4 月株式会社ショーウ所属となり現在に至る. 在学中はモデル低次元化の研究に従事.

藤崎 泰正 (正会員)

1988 年 3 月神戸大学大学院工学研究科修士課程システム工学専攻修了. 同年 4 月 (株) 神戸製鋼所電子技術研究所研究員, 1991 年 4 月神戸大学工学部助手, 1996 年 4 月同助教などを経て, 2010 年 10 月大阪大学大学院情報科学研究科教授となり, 現在に至る. 制御工学, システム工学の教育と研究に従事. 博士 (工学). 1999 年本会学会賞論文賞受賞. 計測自動制御学会, IEEE, 日本鉄鋼協会などの会員.