入出力誤差分散推定を用いた 多入力多出力システムのパラメータ同定法*

小松 信雄[†]

An Identification Method for Multiple-Input Multiple-Output Linear Systems with Estimation of Variance of Input-Output Noises*

Nobuo KOMATSU[†]

A new algorithm is proposed to estimate parameters of MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) system. The algorithm is an expansion of the previously proposed algorithm by the author for SISO (Single-Input Single-Output) system and MISO (Multiple-Input Single-Output) system. Those algorithms use an iterative calculation and they consist of two parts. One part is the estimation of the system parameters using the variances of errors. The other part is the estimation of the variances of errors using the system parameters. The estimation of the system parameters is one of the least squares identification algorithms using eigenvector. The variances of errors are estimated by solving linear simultaneous equations derived from the transfer functions of the system. Some simulations show the effectiveness of the proposed method.

1. 緒論

本論文では、すでに発表された入出力誤差分散推定を用いた一入力一出力システム（以下では SISO システムとする）および、多入力一出力システム（以下では MISO システムとする）に対するパラメータ同定法 [1,2] の多入力多出力システム（以下では MIMO システムとする）への拡張について述べる。

システム同定問題に対して現在まで多くの研究が行われている。最小二乗法、補助変数法、部分空間法などが提案されさまざまな方法が知られている [3–7]。また、近年はロバスト同定などについての研究が進んでいる。

本論文が対象とするシステムのモデルは、入出力誤差モデルを対象としたものであり、統計学の分野では変数誤差モデル (errors-in-variables model [8]) とよばれる。このようなモデルに対する同定法としては、古典的同定法の最小二乗法の改良である固有ベクトル法 [7] があり、提案手法もその一種といえる。

一般に固有ベクトル法は、各時間における入出力の計測値が与えられたとき、それらによって決まる行列の固

有ベクトルを求めることによって解が得られる。ただし、入出力誤差の分散について、少なくともそれらの比の値が必要である。そこで、固有ベクトルを用いて誤差の分散からパラメータ推定値を求め、パラメータ推定値から誤差分散を求めることを繰り返す同定法が考えられる。入出力誤差の分散の値を求める方法として、入出力データの相関関数を用いるものや、同定次数を変化させて得られる誤差分散に関する連立非線形方程式を用いるものなどが提案されている [8–10]。しかし、それらは計算量が多い方法であったり、解が求めにくい方法であるなどの問題点がある。

それに対し著者は、一入力一出力システムに対し、入出力関係から誤差分散についての線形な連立方程式を導出することにより、比較的容易に誤差分散の値を求める方法を提案した [1]。さらに、MISO システムを対象として、伝達関数のパラメータから計算される合成パラメータを導出し、それにより SISO システムの場合と同様にパラメータ推定を行う同定法を提案した [2]。そして、各出力とその要素への入力の組合せに対して、MISO システム同定を行うことにより、MIMO システムの同定を行えることが指摘されている。

そこで本論文では、MISO システムに対する同定法を拡張した MIMO システムの同定アルゴリズムを提案する。また、すでに提案した同定法では、固有ベクトル法を用いる際の重み行列の計算において、誤差の分散が 0

* 原稿受付 2015 年 7 月 15 日

[†] 大阪工業大学 情報科学部 Faculty of Information Science, Osaka Institute of Technology; 1-79-1 Kitayama, Hirakata city, Osaka 573-0196, JAPAN

Key Words: system identification, eigenvector method, digital transfer function.

に近くなると、計算機の計算精度上好ましくない場合があるため、誤差の分散値の下限を決め、計算ループが止まらないように工夫がされている。しかし、下限の値を計算能力に応じて適切に決める必要がある。そこで本論文では、新しい重み行列を定義することにより、下限を設定する必要がない計算法を実現している。

なお、本同定アルゴリズムは、合成パラメータと誤差分散の相互を繰り返し求める計算ループと、収束後の合成パラメータから伝達関数パラメータを求める計算からなっている。

まず、対象とする MIMO システムについて述べ、伝達関数パラメータから作られる合成パラメータを定義する。合わせて、合成パラメータから伝達関数パラメータを決定する方法を示す。つぎに、同定アルゴリズムを示し、誤差分散の推定値から合成パラメータを求める方法、合成パラメータから誤差分散の推定値を求める方法、誤差分散推定計算に必要な係数を再帰的な関数によって求める方法を順に示す。

さらに、本方式の有効性を確認するために行った、二入力二出力システムに対するシミュレーションの内容、およびその結果について述べる。

2. MIMO システムの同定

2.1 対象とするシステム

提案する同定アルゴリズムは、Fig.1 に示されるような MIMO システムに対するものである。

各 $G_{ij}(z)$ で示される要素に対する入力および出力を、 $\xi_{j,t}, \eta_{i,t}$ ($i=1, \dots, r; j=1, \dots, m; t=1, \dots, N$) とする。そして、 $y_{i,t}, u_{j,t}, \eta_{i,t}, \xi_{j,t}$ を z 変換したものをそれぞれ $y_i(z), u_j(z), \eta_i(z), \xi_j(z)$ とする。さらに、 $u_{j,t}, \eta_{i,t}$ に、互いに無相関な正規白色雑音 $\Delta u_{j,t}, \Delta \eta_{i,t}$ が誤差として加えられ、それらの分散を $\sigma_{u_j}^2, \sigma_{\eta_i}^2$ とする。ただし、 $\sigma_{u_j}^2, \sigma_{\eta_i}^2$ の値は未知とする。なお、 $t \leq 0$ に対して、 $y_{i,t}, u_{j,t}, \eta_{i,t}, \xi_{j,t}$ がすべて 0 とする。

Fig. 1 MIMO-system

Fig.1 における各伝達関数 $G_{ij}(z)$ の次数を n_{ij} とし、既知とする。また、伝達関数を、

$$G_{ij}(z) = \frac{N_{ij}(z)}{D_{ij}(z)} \quad (1)$$

$$N_{ij}(z) = \sum_{k=1}^{n_{ij}} b_{ij,k} z^{-k} \quad (2)$$

$$D_{ij}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n_{ij}} a_{ij,k} z^{-k} \quad (3)$$

とする。このとき、

$$\eta_i(z) = \sum_{j=1}^m G_{ij}(z) \xi_j(z) \quad (4)$$

となる。

まず (4) 式、(1) 式より、

$$\eta_i(z) - \sum_{j=1}^m \frac{N_{ij}(z)}{D_{ij}(z)} \xi_j(z) = 0 \quad (5)$$

となる。

ここで、(5) 式第 2 項の分母である $D_{ij}(z)$ を消去すると、

$$\left(\prod_{k=1}^m D_{ik}(z) \right) \eta_i(z) - \sum_{j=1}^m \left(\prod_{k=1}^m D_{ik}(z) \right) \frac{N_{ij}(z)}{D_{ij}(z)} \xi_j(z) = 0 \quad (6)$$

となる。これにより、(6) 式第 2 項の分母である $D_{ij}(z)$ は、 $\prod_{k=1}^m D_{ik}(z)$ の積の項の一つと相殺される。つぎに、

$$\mathbf{z} = [z^{-1}, \dots, z^{-n_i}]^T \quad (7)$$

$$n_i = \sum_{j=1}^m n_{ij} \quad (8)$$

とする。

さらに、 $a_{ij,k}, b_{ij,k}$ から作られる合成パラメータ $\alpha_{i,k}, \beta_{ij,k}$ ($k=1, \dots, n_i$) を考え、合成パラメータベクトル α_i, β_{ij} を、

$$\alpha_i = [\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n_i}]^T \in \mathbf{R}^{n_i} \quad (9)$$

$$\beta_{ij} = [\beta_{ij,1}, \dots, \beta_{ij,n_i}]^T \in \mathbf{R}^{n_i} \quad (10)$$

とし、

$$1 + \alpha_i^T \mathbf{z} = \prod_{k=1}^m D_{ik}(z) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^T \mathbf{z} &= \left(\prod_{k=1}^m D_{ik}(z) \right) \frac{N_{ij}(z)}{D_{ij}(z)} \\ &= N_{ij}(z) \prod_{k \neq j}^m D_{ik}(z) \end{aligned} \quad (12)$$

が満たされるように $\alpha_{i,k}, \beta_{ij,k}$ を決める。

一方、伝達関数パラメータベクトル $\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}$ を、

$$\mathbf{a}_{ij} = [a_{ij,1}, \dots, a_{ij,n_{ij}}]^T \in \mathbf{R}^{n_{ij}} \quad (13)$$

$$\mathbf{b}_{ij} = [b_{ij,1}, \dots, b_{ij,n_{ij}}]^T \in \mathbf{R}^{n_{ij}} \quad (14)$$

とする。

ここで、合成パラメータベクトルの推定値 $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_{ij}$ が与えられたとき、 $\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}$ の推定値 $\hat{\mathbf{a}}_{ij}, \hat{\mathbf{b}}_{ij}$ を求める方法について述べる。ただし、MISO に対する同定法 [2] と共通であるので、詳細は省略する。

まず、(11), (12) 式より、

$$(\beta_{ij}^T \mathbf{z}) D_{ij}(z) = (1 + \alpha_i^T \mathbf{z}) N_{ij}(z) \quad (15)$$

が得られる。そこで、係数比較を行い、パラメータ間の関係式を求めることにより、次式が導出される [2]。

$$[\beta'_{ij}, M_1] \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{ij} \end{bmatrix} = [\alpha'_{ij}, M_2] \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}_{ij} \end{bmatrix} \quad (16)$$

ただし、

$$\alpha'_{ij} = [\alpha_{i,1} \ \dots \ \alpha_{i,n_i} \ 0 \ \dots \ 0]^T \in \mathbf{R}^{n_i+n_{ij}} \quad (17)$$

$$\beta'_{ij} = [\beta_{ij,1} \ \dots \ \beta_{ij,n_{ij}} \ 0 \ \dots \ 0]^T \in \mathbf{R}^{n_i+n_{ij}} \quad (18)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{ij,1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \beta_{ij,1} \\ \beta_{ij,n_i} & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{ij,n_i} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(n_i+n_{ij}) \times n_{ij}} \quad (19)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{i,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \alpha_{i,1} \\ \alpha_{i,n_i} & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{i,n_i} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(n_i+n_{ij}) \times n_{ij}} \quad (20)$$

とする。

したがって、

$$\beta'_{ij} + M_1 \mathbf{a}_{ij} = M_2 \mathbf{b}_{ij} \quad (21)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{p}_{Gij} = [-\mathbf{a}_{ij}^T, \mathbf{b}_{ij}^T]^T \quad (22)$$

$$M = [M_1, M_2] \in \mathbf{R}^{(n_i+n_{ij}) \times 2n_{ij}} \quad (23)$$

とすると、

$$\beta'_{ij} = M \mathbf{p}_{Gij} \quad (24)$$

が得られる。

そこで、この式の M および β'_{ij} を、 $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_{ij}$ から (23) 式 および (18) 式、(19) 式、(20) 式 を用いて構成し、 $\mathbf{p}_{Gij}$ について解く。ただし、 M の行数 ($=n_i+n_{ij}$) は列数 ($=2n_{ij}$) 以上であり、また M, β'_{ij} の要素には誤差が含まれると考えられるので、推定値 $\hat{\mathbf{p}}_{Gij}$ を次のように最小二乗法を用いて求める。

$$\hat{\mathbf{p}}_{Gij} = (M^T M)^{-1} M^T \beta'_{ij} \quad (25)$$

以上より、 $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_{ij}$ から、(18) 式、(19) 式、(20) 式を用いて、 β'_{ij}, M_1, M_2 を作り、(23) 式を用いて M を構成し、(25) 式を用いると $\hat{\mathbf{p}}_{Gij}$ が求められ、伝達関数 $G_{ij}(z)$ のパラメータベクトルの推定値 $\hat{\mathbf{a}}_{ij}, \hat{\mathbf{b}}_{ij}$ が求められることが示された。

つぎに合成パラメータベクトルを、システムの入出力データから推定する方法について述べる。まず、(6) 式より、

$$(1 + \alpha_i^T \mathbf{z}) \eta_i(z) - \sum_{j=1}^m \beta_{ij}^T \mathbf{z} \xi_j(z) = 0 \quad (26)$$

となる。ここで、

$$\beta_i = [\beta_{i1}^T, \dots, \beta_{im}^T]^T \in \mathbf{R}^{mn_i} \quad (27)$$

$$\xi_i(z) = [\mathbf{z}^T \xi_1(z), \dots, \mathbf{z}^T \xi_m(z)]^T \in \mathbf{C}^{mn_i} \quad (28)$$

とすると、

$$(1 + \alpha_i^T \mathbf{z}) \eta_i(z) - \beta_i^T \xi_i(z) = 0 \quad (29)$$

となる。さらに、

$$\eta_{i,t} = [\eta_{i,t-1}, \dots, \eta_{i,t-n_i}]^T \in \mathbf{R}^{n_i} \quad (30)$$

$$\xi_{i,t} = [\xi_{i1,t}^T, \dots, \xi_{im,t}^T]^T \in \mathbf{R}^{mn_i} \quad (31)$$

$$\xi_{ij,t} = [\xi_{j,t-1}, \dots, \xi_{j,t-n_i}]^T \in \mathbf{R}^{n_i} \quad (32)$$

とすると、入出力データの関係は次式のように表される。

$$[\eta_{i,t}, \boldsymbol{\eta}_{i,t}^T, -\boldsymbol{\xi}_{i,t}^T] \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = 0 \quad (33)$$

そこで、

$$n_{mi} = n_i + mn_i + 1 \quad (34)$$

$$\mathbf{q}_{i,t} = [\eta_{i,t}, \boldsymbol{\eta}_{i,t}^T, -\boldsymbol{\xi}_{i,t}^T]^T \in \mathbf{R}^{n_{mi}} \quad (35)$$

$$\mathbf{p}_i = [1, \alpha_i^T, \beta_i^T]^T \in \mathbf{R}^{n_{mi}} \quad (36)$$

とすると次式が得られ、 $\mathbf{q}_{i,t}$ と $\mathbf{p}_i$ は直交することがわかる。

$$\mathbf{q}_{i,t}^T \mathbf{p}_i = 0 \quad (37)$$

2.2 同定アルゴリズム

まず、合成パラメータからなるベクトル $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_i$ より作られる $\mathbf{p}_i$ の推定値を、

$$\hat{\mathbf{p}}_i = [1, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^T, \hat{\boldsymbol{\beta}}_i^T]^T \quad (38)$$

とし、 $\sigma_{u_j}^2$, $\sigma_{y_i}^2$ の推定値を $\hat{\sigma}_{u_j}^2$, $\hat{\sigma}_{y_i}^2$ とする。そこで、つぎのような同定アルゴリズムを提案する。

S1 $\hat{\sigma}_{u_j}^2 = \hat{\sigma}_{y_i}^2 = 1 (j=1, \dots, m; i=1, \dots, r)$ として、計測データから $\hat{\mathbf{p}}_i$ を求める。

S2 $\hat{\mathbf{p}}_i (i=1, \dots, r)$ を用いて計測データから $\hat{\sigma}_{u_j}^2$, $\hat{\sigma}_{y_i}^2$ を求める。

S3 $\hat{\sigma}_{u_j}^2$, $\hat{\sigma}_{y_i}^2$ を用いて計測データから、つぎのループの $\hat{\mathbf{p}}_i$ を求める。

S4 S2, S3 を、 $\hat{\mathbf{p}}_i$ の値が収束判定条件を満たすまで繰り返す。

S5 $\hat{\mathbf{p}}_i$ から、 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ が決まるので、それらを用いて伝達関数 $G_{ij}(z)$ のパラメータベクトル $\mathbf{a}_{ij}$, $\mathbf{b}_{ij}$ の推定値 $\hat{\mathbf{a}}_{ij}$, $\hat{\mathbf{b}}_{ij}$ を求める。

なお、S4における収束判定条件は、 ℓ 回目のループでの推定パラメータ $\hat{\mathbf{p}}_{i,\ell}$ に対して、

$$\hat{\mathbf{p}}_{i,\ell} = [1, \hat{\mathbf{p}}_{i,\ell}^T]^T \quad (39)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{i,\ell}^T = [\hat{\mathbf{p}}_{1,\ell}^T, \dots, \hat{\mathbf{p}}_{r,\ell}^T]^T \quad (40)$$

として、ある打ち切り判定係数 μ を決め、次式で与える。

$$\frac{\|\hat{\mathbf{p}}_{i,\ell} - \hat{\mathbf{p}}_{i,\ell-1}\|}{\|\hat{\mathbf{p}}_{i,\ell}\|} \leq \mu \quad (41)$$

2.3 $\hat{\sigma}_{u_j}^2$, $\hat{\sigma}_{y_i}^2$ を用いて $\hat{\mathbf{p}}_i$ を求める方法

同定アルゴリズムの S1, S3 における、 $\sigma_{u_j}^2$, $\sigma_{y_i}^2$ を用いて $\hat{\mathbf{p}}_i$ を求める方法について述べる。

まず、

$$y_{i,t} = \eta_{i,t} + \Delta y_{i,t} \quad (42)$$

$$\xi_{j,t} = u_{j,t} + \Delta u_{j,t} \quad (43)$$

である。

ここで、

$$\mathbf{y}_{i,t} = [y_{i,t-1}, \dots, y_{i,t-n_i}]^T \quad (44)$$

$$\mathbf{u}_t = [\mathbf{u}_{1,t}^T, \dots, \mathbf{u}_{m,t}^T]^T \quad (45)$$

$$\mathbf{u}_{j,t} = [u_{j,t-1}, \dots, u_{j,t-n_j}]^T \quad (46)$$

$$\Delta \mathbf{y}_{i,t} = [\Delta y_{i,t-1}, \dots, \Delta y_{i,t-n_i}]^T \quad (47)$$

$$\Delta \mathbf{u}_t = [\Delta \mathbf{u}_{1,t}^T, \dots, \Delta \mathbf{u}_{m,t}^T]^T \quad (48)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{j,t} = [\Delta u_{j,t-1}, \dots, \Delta u_{j,t-n_j}]^T \quad (49)$$

とすると、(42) 式、(43) 式より、

$$\begin{bmatrix} y_{i,t} \\ \mathbf{y}_{i,t} \\ -\mathbf{u}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{i,t} \\ \boldsymbol{\eta}_{i,t} \\ -\boldsymbol{\xi}_{i,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta y_{i,t} \\ \Delta \mathbf{y}_{i,t} \\ \Delta \mathbf{u}_t \end{bmatrix} \quad (50)$$

となる。

さらに、

$$\mathbf{q}'_{i,t} = [y_{i,t}, \mathbf{y}_{i,t}^T, -\mathbf{u}_t^T]^T \quad (51)$$

$$\Delta \mathbf{q}_{i,t} = [\Delta y_{i,t}, \Delta \mathbf{y}_{i,t}^T, \Delta \mathbf{u}_t^T]^T \quad (52)$$

とすると、

$$\mathbf{q}'_{i,t} = \mathbf{q}_{i,t} + \Delta \mathbf{q}_{i,t} \quad (53)$$

となる。

また、雑音についての仮定より、

$$E[\Delta \mathbf{q}_{i,t}] = 0 \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & E[\Delta \mathbf{q}_{i,t} \Delta \mathbf{q}_{i,t}^T] \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{y_i}^2 I_{n_i+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{u_1}^2 I_{n_i} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \hat{\sigma}_{u_m}^2 I_{n_i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (55)$$

となる。なお、 $E[*]$ は t についての平均を表すものとする。

(37) 式より、 $\mathbf{q}_{i,t}$ は $\mathbf{p}_i$ と直交する超平面に含まれる。しかし、雑音 $\Delta \mathbf{q}_{i,t}$ によって、 $\mathbf{q}'_{i,t}$ は、その超平面外にあると考えられる。そこで、超平面から $\mathbf{q}'_{i,t}$ までの距離 $e_{i,t}$ を考え、 $e_{i,t}^2$ の総和を評価関数として、

$$J = \sum_{t=1}^N e_{i,t}^2 \quad (56)$$

と定義し、 J を最小とする $\mathbf{p}_i$ をその推定値 $\hat{\mathbf{p}}_i$ とする。

まず、距離 $e_{i,t}$ については、 $\Delta y_{i,t}$, $\Delta u_{j,t}$ それぞれの標準偏差の違いを考慮し、誤差を標準偏差で割り正規化したものを用いることとする。したがって、 $\mathbf{p}_i$ と直交する超平面上の任意のベクトル $\mathbf{q}$ を用いて、次のように定義できる。

$$e_{i,t}^2 = \min_{\mathbf{q}} \|W_i^{-1}(\mathbf{q}'_{i,t} - \mathbf{q})\|^2 \quad (57)$$

このとき、 W_i は $\hat{\sigma}_{u_j}, \hat{\sigma}_{y_i}$ によって、次式で与えられる。

$$W_i = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{y_i} I_{n_i+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{u_1} I_{n_i} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \hat{\sigma}_{u_m} I_{n_i} \end{bmatrix} \quad (58)$$

さて、 $e_{i,t}^2$ を求めるため $\mathbf{q}$ を変数として、(37) 式、(57) 式より評価関数を、

$$\begin{aligned} J_1 &= (\mathbf{q}'_{i,t} - \mathbf{q})^T W_i^{-2} (\mathbf{q}'_{i,t} - \mathbf{q}) + \lambda \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{p}}_i \\ &= \mathbf{q}'_{i,t}{}^T W_i^{-2} \mathbf{q}'_{i,t} - 2\mathbf{q}'_{i,t}{}^T W_i^{-2} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T W_i^{-2} \mathbf{q} \\ &\quad + \lambda \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{p}}_i \end{aligned} \quad (59)$$

とする。そしてラグランジュの未定定数法を用いて、 J_1 最小の条件を求める。つまり、(59) 式を $\mathbf{q}, \lambda$ について偏微分し 0 とおき、 $\mathbf{q}$ を消去して λ を求めることにより、

$$\mathbf{q}'_{i,t} - \mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}'_{i,t}{}^T \hat{\mathbf{p}}_i}{\hat{\mathbf{p}}_i^T W_i^2 \hat{\mathbf{p}}_i} W_i^2 \hat{\mathbf{p}}_i \quad (60)$$

が得られる。したがって、(57) 式より、

$$e_{i,t}^2 = \frac{(\mathbf{q}'_{i,t}{}^T \hat{\mathbf{p}}_i)^2}{\hat{\mathbf{p}}_i^T W_i^2 \hat{\mathbf{p}}_i} = \left(\mathbf{q}'_{i,t}{}^T W_i^{-1} \frac{W_i \hat{\mathbf{p}}_i}{\|W_i \hat{\mathbf{p}}_i\|} \right)^2 \quad (61)$$

となる。

ここで、

$$Z_N = [\mathbf{q}'_{i,1}, \dots, \mathbf{q}'_{i,N}]^T W_i^{-1} \in R^{N \times n_{mi}} \quad (62)$$

$$\mathbf{n} = \frac{W_i \hat{\mathbf{p}}_i}{\|W_i \hat{\mathbf{p}}_i\|} \in R^{n_{mi}} \quad (63)$$

とおくと、(56) 式、(61) 式より、

$$J = \|Z_N \mathbf{n}\|^2 \quad (64)$$

となる。

さらに、 J が最小となるときの $\mathbf{n}$ を求めることにより $\hat{\mathbf{p}}_i$ を決定する。評価関数を、

$$J_2 = (Z_N \mathbf{n})^T (Z_N \mathbf{n}) + \lambda (1 - \mathbf{n}^T \mathbf{n}) \quad (65)$$

とする。そしてラグランジュの未定定数法を用いて、 $\mathbf{n}, \lambda$ について偏微分し 0 とおくことにより、

$$Z_N^T Z_N \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \quad (66)$$

となる。

したがって、(63) 式、(66) 式の $\mathbf{n}$ は、 $Z_N^T Z_N$ の単位固有ベクトルとなる。なお、 J の最小値は $Z_N^T Z_N$ の最小固有値で与えられる。またそのとき、 $\mathbf{n}$ を用いて、(63) 式より、

$$\hat{\mathbf{p}}_i = \|W_i \hat{\mathbf{p}}_i\| W_i^{-1} \mathbf{n} \quad (67)$$

となる。ここで、

$$W_i^{-1} \mathbf{n} = [w_1, w_2, \dots, w_{n_{mi}}]^T \quad (68)$$

とすると、

$$\hat{\mathbf{p}}_i = [1, \hat{\alpha}_i^T, \hat{\beta}_i^T]^T = \|W_i \hat{\mathbf{p}}_i\| [w_1, \dots, w_{n_{mi}}]^T \quad (69)$$

となり、

$$\|W_i \hat{\mathbf{p}}_i\| w_1 = 1 \quad (70)$$

となる。よって (69) 式、(70) 式より、

$$[\hat{\alpha}_i^T, \hat{\beta}_i^T] = w_1^{-1} [w_2, \dots, w_{n_{mi}}] \quad (71)$$

となり、

$$\hat{\mathbf{p}}_i = w_1^{-1} [w_1, \dots, w_{n_{mi}}]^T \quad (72)$$

となる。

以上より、計測データ $\mathbf{q}'_{i,t}$ と、 W_i^{-1} を用いて、(62) 式から Z_N を作り、 $Z_N^T Z_N$ の最小固有値に対する単位固有ベクトル $\mathbf{n}$ を求めると、 W_i^{-1} を用いて、(68) 式から $w_1, w_2, \dots, w_{n_{mi}}$ が求められるので、(71) 式より $\hat{\alpha}_i$ および $\hat{\beta}_i$ すなわち $\hat{\beta}_{ij}$ が求められ、(72) 式より、 $\hat{\mathbf{p}}_i$ が求められることが示された。

ところで、重み行列 W_i の要素は、 $\hat{\sigma}_{y_i}, \hat{\sigma}_{u_k}$ であるため、それらの中に 0 に近くなるものがあると、 W_i^{-1} が計算できなくなる可能性がある。

W_i^{-1} は、(58) 式より、

$$W_i^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{y_i}^{-1} I_{n_{i+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{u_1}^{-1} I_{n_i} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \hat{\sigma}_{u_m}^{-1} I_{n_i} \end{bmatrix} \quad (73)$$

となる。ここで、 $j = 1, \dots, m$ として、

$$\sigma_A = \hat{\sigma}_{y_i} \hat{\sigma}_{u_1} \cdots \hat{\sigma}_{u_m} \quad (74)$$

$$\sigma_{Y_i} = \hat{\sigma}_{u_1} \cdots \hat{\sigma}_{u_m} \quad (75)$$

$$\sigma_{U_{ij}} = \hat{\sigma}_{y_i} \hat{\sigma}_{u_j}^{-1} \prod_{k=1} \hat{\sigma}_{u_k} = \hat{\sigma}_{y_i} \prod_{k \neq j} \hat{\sigma}_{u_k} \quad (76)$$

とする。そして、 $W_i'^{-1}$ を、

$$\begin{aligned} W_i'^{-1} &= \sigma_A W_i^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{Y_i} I_{n_{i+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{U_{i1}} I_{n_i} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \sigma_{U_{im}} I_{n_i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (77)$$

と定義する。

ここで、(57) 式において導入された W_i は $\Delta \mathbf{q}_{i,t}$ の要素の標準偏差の比を考慮したものであり、 σ_A 倍してもよい。そこで、 $W_i'^{-1}$ を (57) 式の W_i^{-1} の代わりに使うことを提案する。これにより、(76) 式の $\hat{\sigma}_{u_j}^{-1}$ が消去され、 $\hat{\sigma}_{y_i}, \hat{\sigma}_{u_k}$ の中に 0 に近くなるものがあったとしても、 W_i^{-1} が計算可能となる。

なお、 $\hat{\sigma}_{y_i}, \hat{\sigma}_{u_k}$ は、 $\sigma_{y_i}, \sigma_{u_k}$ の計算上の推定値であり、 $\sigma_{y_i}, \sigma_{u_k}$ が 0 に近くなっても、データ数が少ない場合などでは、雑音の影響により値が変動し 0 に近くなることもある。そのような場合、 W_i の要素には発散する要素が現れ計算不能となる。そこで、すでに発表された論文 [1,2] による方法では、 $\hat{\sigma}_{y_i}, \hat{\sigma}_{u_k}$ の下限値を設けることでそれを回避していた。ただし下限値以下の値は求めるこ

とができないため、下限値は可能な限り小さな値にする必要があるが、計算能力による限界がある。とくに標準偏差の真値が0に近い場合、そのような下限値を選ぶことが困難となる。

しかし、 $\hat{\mathbf{p}}_i$ は W_i の逆行列を用いて計算されるので、 W_i^{-1} を使うという本提案方法では、そのような下限値を設ける必要がなくなり、より有効な計算方法となっている。

また、

$$Q_N = [\mathbf{q}'_{i,1}, \dots, \mathbf{q}'_{i,N}] \quad (78)$$

とすると (62) 式より、

$$Z_{N+1}^T Z_{N+1} = (W_i^{-1})^T Q_{N+1} Q_{N+1}^T W_i^{-1} \quad (79)$$

$$Q_{N+1} Q_{N+1}^T = Q_N Q_N^T + \mathbf{q}'_{i,N+1} \mathbf{q}'_{i,N+1}^T \quad (80)$$

となり、 N に対して $Z_N^T Z_N$ を逐次的に求めることができ、計算の高速化が可能である。

2.4 $\hat{\mathbf{p}}_i$ を用いて $\hat{\sigma}_{u_j}^2, \hat{\sigma}_{y_i}^2$ を求める方法

同定アルゴリズムの S2 における、 $\hat{\mathbf{p}}_i$ を用いて $\hat{\sigma}_{u_j}^2, \hat{\sigma}_{y_i}^2$ を求める方法について述べる。

なお本節では、推定されたパラメータベクトルを α_i, β_i のように表し、 $\wedge$ 記号を省略する。

まず、 $k, \ell (1 \leq k < \ell \leq n_i)$ および、 $i, j (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq m)$ に対して、 $\Delta k = \ell - k + 1$ として、 $\alpha_{i,k:\ell}, \beta_{i,k:\ell}$ を、

$$\alpha_{i,k:\ell} = [\alpha_{i,k}, \alpha_{i,k+1}, \dots, \alpha_{i,\ell}]^T \in R^{\Delta k} \quad (81)$$

$$\beta_{i,k:\ell} = [\beta_{i1,k:\ell}^T, \dots, \beta_{im,k:\ell}^T]^T \in R^{m\Delta k} \quad (82)$$

$$\beta_{ij,k:\ell} = [\beta_{ij,k}, \beta_{ij,k+1}, \dots, \beta_{ij,\ell}]^T \in R^{\Delta k} \quad (83)$$

とする。さらに、 $k, \ell (1 \leq k < \ell \leq N)$ に対して、 $\eta_{i,\ell:k}, \xi_{i,\ell:k}$ を、

$$\eta_{i,\ell:k} = [\eta_{i,\ell}, \eta_{i,\ell-1}, \dots, \eta_{i,k}]^T \in R^{\Delta k} \quad (84)$$

$$\xi_{i,\ell:k} = [\xi_{i1,\ell:k}, \dots, \xi_{im,\ell:k}]^T \in R^{m\Delta k} \quad (85)$$

$$\xi_{j,\ell:k} = [\xi_{j,\ell}, \xi_{j,\ell-1}, \dots, \xi_{j,k}]^T \in R^{\Delta k} \quad (86)$$

とする。

まず、(26) 式より、

$$\eta_{i,t} = -\alpha_{i,1:n_i}^T \eta_{i,t-1:t-n_i} + \beta_{i,1:n_i}^T \xi_{i,t-1:t-n_i} \quad (87)$$

が得られる。また、(87) 式の t を $t-1$ とすることにより、

$$\eta_{i,t-1} = -\alpha_{i,1:n_i}^T \eta_{i,t-2:t-n_i-1} + \beta_{i,1:n_i}^T \xi_{i,t-2:t-n_i-1} \quad (88)$$

となる。この (88) 式を用いると、(87) 式は、

$$\begin{aligned} \eta_{i,t} &= -\alpha_{i,1} \eta_{i,t-1} - \alpha_{i,2:n_i}^T \eta_{i,t-2:t-n_i} \\ &\quad + \beta_{i,1:n_i}^T \xi_{i,t-1:t-n_i} \\ &= -\alpha_{i,1} (-\alpha_{i,1:n_i}^T \eta_{i,t-2:t-n_i-1} \\ &\quad + \beta_{i,1:n_i}^T \xi_{i,t-2:t-n_i-1}) \end{aligned} \quad (89)$$

$$-\alpha_{i,2:n_i}^T \eta_{i,t-2:t-n_i} + \beta_{i,1:n_i}^T \xi_{i,t-1:t-n_i} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} &= (\alpha_{i,1} \alpha_{i,1:n_i}^T - [\alpha_{i,2:n_i}^T, 0]) \eta_{i,t-2:t-n_i-1} \\ &\quad + (-\alpha_{i,1} [0, \beta_{i,1:n_i}^T] + [\beta_{i,1:n_i}^T, 0]) \xi_{i,t-1:t-n_i-1} \end{aligned} \quad (91)$$

となり、これより、

$$\eta_{i,t} = \mathbf{c}_{2,i}^T \eta_{i,t-2:t-n_i-1} + \mathbf{d}_{2,i}^T \xi_{i,t-1:t-n_i-1} \quad (92)$$

ただし、

$$\mathbf{c}_{2,i} = \alpha_{i,1} \alpha_{i,1:n_i} - [\alpha_{i,2:n_i}^T, 0]^T \in R^{n_i} \quad (93)$$

$$\mathbf{d}_{2,i} = [\mathbf{d}_{2,i,1}^T, \mathbf{d}_{2,i,2}^T, \dots, \mathbf{d}_{2,i,m}^T]^T \in R^{m(n_i+1)} \quad (94)$$

$$\mathbf{d}_{2,i,j} = -\alpha_{i,1} [0, \beta_{ij,1:n_i}^T]^T + [\beta_{ij,1:n_i}^T, 0]^T \in R^{n_i+1} \quad (95)$$

となる。また、 $h=1, \dots, h_0$ に対して、

$$t_h = t - h \quad (96)$$

とし、

$$n_I = n_i - 1 \quad (97)$$

とすると、

$$\eta_{i,t} = \mathbf{c}_{2,i}^T \eta_{i,t_2:t_2-n_I} + \mathbf{d}_{2,i}^T \xi_{i,t_1:t_2-n_I} \quad (98)$$

となる。

また、 $h=1$ の場合については (87) 式より、

$$\eta_{i,t} = \mathbf{c}_{1,i}^T \eta_{i,t_1:t_1-n_I} + \mathbf{d}_{1,i}^T \xi_{i,t_1:t_1-n_I} \quad (99)$$

$$\mathbf{c}_{1,i} = -\alpha_{i,1:n_I+1} \quad (100)$$

$$\mathbf{d}_{1,i} = \beta_{i,1:n_I+1} \quad (101)$$

となる。

さらに、代入計算によって $h=2, \dots, h_0$ に対して $\mathbf{c}_{h,i}, \mathbf{d}_{h,i}$ が求められ、それらを使って、

$$\eta_{i,t} = \mathbf{c}_{h,i}^T \eta_{i,t_h:t_h-n_I} + \mathbf{d}_{h,i}^T \xi_{i,t_1:t_h-n_I} \quad (102)$$

と表すことができる。

なお、

$$\mathbf{c}_{h,i} = [c_{h,i,1}, \dots, c_{h,i,n_I+1}]^T \in R^{n_I+1} \quad (103)$$

$$\mathbf{d}_{h,i} = [\mathbf{d}_{h,i,1}^T, \dots, \mathbf{d}_{h,i,m}^T]^T \in R^{m(n_I+h)} \quad (104)$$

$$\mathbf{d}_{h,i,j} = [d_{h,i,j,1}, \dots, d_{h,i,j,n_I+h}]^T \in R^{n_I+h} \quad (105)$$

とする。

ここで、 $k, \ell (1 \leq k < \ell \leq N)$ に対して、 $\Delta k = \ell - k + 1$ として、 $\mathbf{y}_{i,\ell:k}, \mathbf{u}_{\ell:k}, \Delta \mathbf{y}_{i,\ell:k}, \Delta \mathbf{u}_{\ell:k}$ を、

$$\mathbf{y}_{i,\ell:k} = [y_{i,\ell}, y_{i,\ell-1}, \dots, y_{i,k}]^T \in R^{\Delta k} \quad (106)$$

$$\mathbf{u}_{\ell:k} = [u_{1,\ell:k}, \dots, u_{m,\ell:k}]^T \in R^{m\Delta k} \quad (107)$$

$$\mathbf{u}_{j,\ell:k} = [u_{j,\ell}, u_{j,\ell-1}, \dots, u_{j,k}]^T \in R^{\Delta k} \quad (108)$$

$$\Delta \mathbf{y}_{i,\ell:k} = [\Delta y_{i,\ell}, \Delta y_{i,\ell-1}, \dots, \Delta y_{i,k}]^T \in R^{\Delta k} \quad (109)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{\ell:k} = [\Delta \mathbf{u}_{1,\ell:k}, \dots, \Delta \mathbf{u}_{m,\ell:k}]^T \in R^{m\Delta k} \quad (110)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{j,\ell:k} = [\Delta u_{j,\ell}, \Delta u_{j,\ell-1}, \dots, \Delta u_{j,k}]^T \in R^{\Delta k} \quad (111)$$

とすると, (42) 式, (43) 式より, (102) 式は,

$$y_{i,t} - \Delta y_{i,t} = \mathbf{c}_{h,i}^T (\mathbf{y}_{i,t_h:t_h-n_I} - \Delta \mathbf{y}_{i,t_h:t_h-n_I}) + \mathbf{d}_{h,i}^T (\mathbf{u}_{t_1:t_h-n_I} + \Delta \mathbf{u}_{t_1:t_h-n_I}) \quad (112)$$

となる. したがって,

$$\Delta y_{i,t} - \mathbf{c}_{h,i}^T \Delta \mathbf{y}_{i,t_h:t_h-n_I} + \mathbf{d}_{h,i}^T \Delta \mathbf{u}_{t_1:t_h-n_I} = y_{i,t} - \mathbf{c}_{h,i}^T \mathbf{y}_{i,t_h:t_h-n_I} - \mathbf{d}_{h,i}^T \mathbf{u}_{t_1:t_h-n_I} \quad (113)$$

となる. ここで,

$$\epsilon_{h,i,t} = y_{i,t} - \mathbf{c}_{h,i}^T \mathbf{y}_{i,t_h:t_h-n_I} - \mathbf{d}_{h,i}^T \mathbf{u}_{t_1:t_h-n_I} \quad (114)$$

とすると, (113) 式は,

$$\Delta y_{i,t} - \mathbf{c}_{h,i}^T \Delta \mathbf{y}_{i,t_h:t_h-n_I} + \mathbf{d}_{h,i}^T \Delta \mathbf{u}_{t_1:t_h-n_I} = \epsilon_{h,i,t} \quad (115)$$

となる. そして, データ数 N が十分大きいとして, (115) 式の両辺の二乗平均をとると,

$$(1 + \|\mathbf{c}_{h,i}\|^2) \sigma_{y_i}^2 + \sum_{j=1}^m \|\mathbf{d}_{h,i,j}\|^2 \sigma_{u_j}^2 = E[\epsilon_{h,i,t}^2] \quad (116)$$

となる.

よって (116) 式は, $\sigma_{u_j}^2, \sigma_{y_i}^2$ についての線形な方程式となる.

ここで, $h_0 > \frac{m}{r} + 1$ として,

$$F = \begin{bmatrix} F_{C,1} & F_{D,1} \\ \vdots & \vdots \\ F_{C,h_0} & F_{D,h_0} \end{bmatrix} \in R^{h_0 r \times (r+m)} \quad (117)$$

$$F_{C,h} = \begin{bmatrix} 1 + \|\mathbf{c}_{h,1}\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + \|\mathbf{c}_{h,r}\|^2 \end{bmatrix} \quad (118)$$

$$F_{D,h} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{d}_{h,11}\|^2 & \dots & \|\mathbf{d}_{h,1m}\|^2 \\ \vdots & & \\ \|\mathbf{d}_{h,r1}\|^2 & \dots & \|\mathbf{d}_{h,rm}\|^2 \end{bmatrix} \quad (119)$$

また,

$$\boldsymbol{\phi} = [\hat{\sigma}_{y_1}^2, \dots, \hat{\sigma}_{y_r}^2, \hat{\sigma}_{u_1}^2, \dots, \hat{\sigma}_{u_m}^2]^T \in R^{r+m} \quad (120)$$

$$\boldsymbol{\psi}_h = [\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_{h_0}]^T \in R^{h_0 r} \quad (121)$$

とすると, 次式が得られる.

$$F\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\psi} \quad (122)$$

したがって, 最小二乗法により $\hat{\sigma}_{u_j}^2, \hat{\sigma}_{y_i}^2$ を要素とするベクトル $\boldsymbol{\phi}$ は次式で求められる.

$$\boldsymbol{\phi} = (F^T F)^{-1} F^T \boldsymbol{\psi} \quad (123)$$

以上より, $\mathbf{c}_{h,i}, \mathbf{d}_{h,i}$ から (117) 式, (118) 式, (119) 式を用いて F を作り, 計測データ $\mathbf{y}_{i,t}, \mathbf{u}_j$ から (114) 式を用いて $\epsilon_{h,i,t}$ を求め, (120) 式, (121) 式を用いて $\boldsymbol{\psi}$ を作るにより, (123) 式を用いて $\boldsymbol{\phi}$ が求められ, $\hat{\sigma}_{y_1}^2, \dots, \hat{\sigma}_{y_r}^2$ および, $\hat{\sigma}_{u_1}^2, \dots, \hat{\sigma}_{u_m}^2$ が同時に求められることが示された.

ところで, $\mathbf{c}_{h,i}, \mathbf{d}_{h,i}$ は, (87) 式から (95) 式までと同様に代入計算を繰り返すことによって導出される. ただし, つぎに述べる計算プログラムでその値を求めることが可能である.

2.5 $\mathbf{c}_{h,i}, \mathbf{d}_{h,i}$ の計算プログラム

ここでは, 前節の $\mathbf{c}_{h,i}, \mathbf{d}_{h,i}$ の要素 $c_{h,i,k}, d_{h,i,j,k}$ を再帰関数によって求めるアルゴリズムについて述べる.

ただし, MISO に対する同定法 [2] と共通であるので, 詳細は省略する.

まず, 次のように (99) 式の右辺を関数 $f_{i,1}$ としてプログラム中で定義する.

$$f_{i,1}(\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{Y}) := \mathbf{c}_{1,i}^T \mathbf{Y} + \mathbf{d}_{1,i}^T \mathbf{U}^{(1)} \quad (124)$$

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\eta}_{i,t_1:t_1-n_I} \in R^{n_I+1} \quad (125)$$

$$\mathbf{U}^{(1)} = \boldsymbol{\xi}_{t_1:t_1-n_I} \in R^{m(n_I+1)} \quad (126)$$

同様に (102) 式の右辺は, 次のような関数 $f_{i,h}$ としてプログラム中で定義する.

$$f_{i,h}(\mathbf{U}^{(h)}, \mathbf{Y}) = \mathbf{c}_{h,i}^T \mathbf{Y} + \mathbf{d}_{h,i}^T \mathbf{U}^{(h)} \quad (127)$$

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\eta}_{i,t_h:t_h-n_I} \in R^{n_I+1} \quad (128)$$

$$\mathbf{U}^{(h)} = \boldsymbol{\xi}_{t_1:t_h-n_I} \in R^{m(n_I+h)} \quad (129)$$

そして,

$$\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_{n_I+1}]^T \in R^{n_I+1} \quad (130)$$

$$\mathbf{U}^{(h)} = [\mathbf{U}_1^T, \dots, \mathbf{U}_j^T, \dots, \mathbf{U}_m^T]^T \in R^{m(n_I+h)} \quad (131)$$

$$\mathbf{U}_j = [U_{j,1}^T, \dots, U_{j,n_I+h}^T]^T \in R^{n_I+h} \quad (132)$$

とし, $\mathbf{U}_{k:\ell}^{(h)}, \mathbf{Y}_{k:\ell}$ ($k < \ell$) を

$$\mathbf{Y}_{k:\ell} = [Y_k, \dots, Y_\ell]^T \quad (133)$$

$$\mathbf{U}_{k:\ell}^{(h)} = [\mathbf{U}_{1,k:\ell}^T, \dots, \mathbf{U}_{j,k:\ell}^T, \dots, \mathbf{U}_{m,k:\ell}^T]^T \quad (134)$$

$$\mathbf{U}_{j,k:\ell} = [U_{j,k}, \dots, U_{j,\ell}]^T \quad (135)$$

とする.

このとき, $f_{i,h}(\mathbf{U}^{(h)}, \mathbf{Y})$ は次の例のようにプログラム中で再帰的に定義することが可能である [2].

・ $f_{i,h}$ の計算プログラムにおける定義の例

・ $h = 1$:

$$c_{1,i}^T \mathbf{Y} + d_{1,i}^T \mathbf{U}^{(1)} \\ \cdot h > 1 : \\ f_{i,h-1}(\mathbf{U}_{1:n_I+h-1}^{(h)}, [f_{i,1}(\mathbf{U}_{h:n_I+h}^{(h)}, \mathbf{Y}_{1:n_I+1}), \mathbf{Y}_{1:n_I}^T]^T)$$

まず, $c_{h,i,k}$ は, $k=1, \dots, n_I+1$ に対して, 次式で与えられる.

$$c_{h,i,k} = f_{i,h}(\mathbf{U}^{(h)}, \mathbf{Y}) \quad (136)$$

$$\mathbf{U}^{(h)} = \mathbf{0} \quad (137)$$

$$\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_\ell, \dots, Y_{n_I+1}]^T \quad (138)$$

$$(\ell = 1, \dots, n_I+1) \quad (139)$$

$$Y_\ell = \begin{cases} 1 & (\ell = k) \\ 0 & (\ell \neq k) \end{cases} \quad (140)$$

また, $d_{h,i,j,k}$ は, $k=1, \dots, n_I+h$ に対して, 次式で与えられる.

$$d_{h,i,j,k} = f_{i,h}(\mathbf{U}^{(h)}, \mathbf{Y}) \quad (141)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (142)$$

$$\mathbf{U}^{(h)} = [\mathbf{U}_1^T, \dots, \mathbf{U}_m^T]^T \quad (143)$$

$$\mathbf{U}_j = [U_{j,1}, \dots, U_{j,\ell}, \dots, U_{j,n_I+h}]^T \quad (144)$$

$$(\ell = 1, \dots, m(n_I+h)) \quad (145)$$

$$U_{j,\ell} = \begin{cases} 1 & (\ell = k + (j-1)(n_I+h)) \\ 0 & (\ell \neq k + (j-1)(n_I+h)) \end{cases} \quad (146)$$

3. ニ入力二出力システムに対するシミュレーション

システムおよび誤差を仮定し, パラメータ同定を行うシミュレーションを実施した.

システムは Fig. 1 において,

$$G_{11}(z) = \frac{1.0z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 0.8\sqrt{3}z^{-1} + 0.64z^{-2}} \quad (147)$$

$$G_{12}(z) = \frac{-1.4z^{-1} - 0.7z^{-2}}{1 - 0.8\sqrt{3}z^{-1} + 0.64z^{-2}} \quad (148)$$

$$G_{21}(z) = \frac{1.0z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 + 0.8\sqrt{3}z^{-1} + 0.64z^{-2}} \quad (149)$$

Fig. 2 Estimated parameters of $G_{11}(z)$

Fig. 3 Estimated parameters of $G_{12}(z)$

Fig. 4 Estimated parameters of $G_{21}(z)$

Fig. 5 Estimated parameters of $G_{22}(z)$

$$G_{22}(z) = \frac{-1.4z^{-1} - 0.7z^{-2}}{1 + 0.8\sqrt{3}z^{-1} + 0.64z^{-2}} \quad (150)$$

としたものであり, $r=2$, $m=2$, $n_{11}=n_{12}=n_{21}=n_{22}=2$ となる. また, 入力 u , 出力 y の誤差 $\Delta u, \Delta y$ の分散を $\sigma_{u1}^2=0.01$, $\sigma_{u2}^2=0.02$, $\sigma_{y1}^2=0.04$, $\sigma_{y2}^2=0.08$ とした. また, 同定計算に必要なパラメータについては, $h_0=3$, $\mu=0.0001$ とした.

入出力データをシミュレーション計算で発生させ, データ数 500 ごとにその時点でのデータ全体 (総数は増加す

Fig. 6 Estimated variances

Table 1 Results with simulation

p_{Gk}, σ^2	T.V.	E.V.	E.V.-T.V.
$a_{11,1}$	-1.386	-1.394	-0.0086
$a_{11,2}$	0.640	0.648	0.0084
$b_{11,1}$	1.000	1.010	0.0097
$b_{11,2}$	0.500	0.495	-0.0051
$a_{12,1}$	-0.800	-0.802	-0.0015
$a_{12,2}$	0.640	0.641	0.0012
$b_{12,1}$	-1.400	-1.429	-0.0290
$b_{12,2}$	-0.700	-0.713	-0.0127
$a_{21,1}$	0.800	0.786	-0.0140
$a_{21,2}$	0.640	0.634	-0.0061
$b_{21,1}$	1.000	1.014	0.0145
$b_{21,2}$	0.500	0.486	-0.0135
$a_{22,1}$	1.386	1.344	-0.0414
$a_{22,2}$	0.640	0.609	-0.0307
$b_{22,1}$	-1.400	-1.413	-0.0132
$b_{22,2}$	-0.700	-0.654	0.0463
σ_{u1}^2	0.01	0.0114	0.0014
σ_{u2}^2	0.02	0.0184	-0.0016
σ_{y1}^2	0.04	0.0401	0.0001
σ_{y2}^2	0.08	0.0796	0.0004

T.V.: True values, E.V.: Estimated values

る) $\mathbf{q}_{i,t}(t=1, \dots, N)$ を用いて, パラメータ同定を行った.

N に対する伝達関数パラメータの推定値の変化を Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5 に示す. また, 誤差の分散の変化を Fig. 6 に示す.

そして $N=50000$ において得られたパラメータおよび誤差の分散の推定値を Table 1 に示す.

4. 考察

本同定法を用いたパラメータ同定のシミュレーションの結果について考察する.

まず Fig. 2, Fig. 5 より, $N > 20000$ において各パラ

メータがほぼ正しく推定されていることがわかる.

また Fig. 6 より, 分散の値は $N = 50000$ で真値に近づいていることがわかる. そのとき, Table 1 より, $\sigma_{u1}^2, \sigma_{u2}^2, \sigma_{y1}^2, \sigma_{y2}^2$ の残差は, 0.0014, -0.0016, 0.0001, 0.0004 程度であることがわかる.

なお, 本同定法の繰り返し計算アルゴリズムにおける収束性については, SISO システムの場合 [1] と同様に検証可能である.

5. 結論

今回, MIMO システムの同定法を構成するため, すでに提案された入出力誤差分散推定を用いた SISO システムのパラメータ同定法および MISO システムのパラメータ同定を拡張し, そのアルゴリズムを提案した. そして, 二入力二出力システムに対するシミュレーションを行い, パラメータ推定値が得られることを確認した.

本同定法は入力誤差を考慮しており, 入出力誤差の分散が求められるので, システムの入出力誤差の分散の値を必要とする場合, 本方式の利用が可能であると考えられる.

たとえば移動体制御システムでは, 移動に伴い, 動特性, ノイズ特性が変化するため, それらの変化に応じて制御方法を変化させることが有効となると考えられるが, そのようなシステムにおいて利用できる同定法といえる.

今後実験システムへ適用し, 本同定法の有効性について検証を行う必要があると考えられる.

参考文献

- [1] 小松: 入出力誤差分散推定を用いた一入力一出力システムのパラメータ同定アルゴリズム; システム制御情報学会論文誌, Vol. 27, No. 5, pp. 216-229 (2014)
- [2] 小松: 入出力誤差分散推定を用いた多入力一出力システムのパラメータ同定法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 28, No. 7, pp. 310-319 (2015)
- [3] 中川, 小柳: 最小二乗法による実験データ解析—プログラム SALS (UP 応用数学選書 7), 東京大学出版会 (1982)
- [4] 相良, 秋月, 中溝, 片山: システム同定, (社) 計測自動制御学会編, コロナ社 (1995)
- [5] D. G. Manolakis, V. K. Ingle and S. M. Kogon: *Statistical and Adaptive Signal Processing*, Artech House (2005)
- [6] 和田, 江口, 松本: バイアス補償最小 2 乗法による AR 過程のパラメータ推定について; システム制御情報学会論文誌, Vol. 2, No. 6, pp. 175-182 (1989)
- [7] 和田: 固有ベクトル法によるシステム同定について; システム/制御/情報, Vol. 51, No. 1, pp. 34-36 (2007)
- [8] T. Söderström: Errors-in-varialbes models in system identification; *Automatica*, Vol. 43, pp. 939-958 (2007)
- [9] S. Beghelli, R. P. Guidorzi and U. Soverini: The Frisch scheme in dynamic system identification; *Au-*

tomatica, Vol. 26, pp. 171–176 (1990)

- [10] R. Diversi, R. Guidorzi and U. Soverini: A new criterion in EIV identification and filtering applications; *13th IFAC Symposium on System Identification* (2003)

著者略歴

こまつ のぶお 小松 信雄 (正会員)

1958年8月30日生。1983年3月大阪府立大学大学院工学研究科修士課程修了(航空工学)。同年4月日立機電工業(株)(現: (株)日立プラントテクノロジー)入社。1987年9月日本スピードショア(株)入社。1988年11月大阪府立大学工学部航空宇宙工学科助手。1996年4月静岡理科大学理工学部機械工学科講師。1999年4月同助教授。2002年4月大阪工業大学情報科学部情報科学科助教授(2007年より准教授)となり現在に至る。移動体の位置計測、誘導に関する研究に従事。博士(工学)。計測自動制御学会、日本ロボット学会、日本航空宇宙学会、日本機械学会などの会員。