零空間を用いた入力多重型二重レートサンプル値制御系の設計*

佐藤 孝雄[†]・川口 夏樹[†]・荒木 望[†]・小西 康夫[†]

Design of an Input-multiple Dual-rate Sampled-data Control System Using Null Space*

Takao SATO[†], Natsuki KAWAGUCHI[†], Nozomu ARAKI[†] and Yasuo KONISHI[†]

This paper discusses a design method for an input multiple single-input single-output dual-rate control system, where the sampling interval of the plant output is an integer multiple of the hold interval of the control input. A dual-rate control law that stabilizes a closed-loop system is extended using null-space. In the extended control system, a redundant input that is designed independently of the closed-loop system, is obtained. Because the redundant input is designed so that the control input is constant in the steady-state, the intersample ripples are eliminated without changing the reference response from the reference input to the plant output. Finally, the effectiveness of the proposed method is demonstrated through numerical examples.

1. はじめに

連続時間系である実際の制御対象に対し、デジタルコンピュータを用いた離散時間系の制御器を用いて制御系を設計する場合、連続時間系の出力信号をサンプリングして離散時間信号へ変換し、離散時間系の入力信号を零次ホールド等を用いて連続時間信号へ変換することとなる。このような制御系はサンプル値制御系とよばれる[1,2]。出力のサンプリング周期と入力の更新周期は一般には任意に設定できないため、入力と出力の周期が異なる二重レート系として設計することが考えられる[3]。本研究では、入力の更新周期に比べて出力のサンプリング周期が長い制御系の設計を行う。

出力のサンプル点間で入力を一定にするシングルレート系に比べて、より短い間隔で入力を更新する二重レート系は制御性能を向上することができる。有限時間整定サーボ系においては、シングルレート系よりも少ないサンプリング回数で整定させることができる[4]。しかし、サンプル点間で入力の变化を許容するため、制御器が動

作する離散時間系の出力応答であるサンプル点上の出力が目標値に追従したとしても、サンプル点間でリップルとよばれる振動を引き起こす恐れがある[4,5]。シングルレート系として設計すれば容易にこの問題は解決するが、二重レート系に比べて過渡応答の性能低下を招くこととなるため、サンプル点間のリップルを抑制するためには定常状態で制御入力に振動しなければよい[4,6]。このためには新たに積分器を導入するなどして制御系を再設計すればよいが、常に入力の変更を抑制してしまうと過渡応答も同時に抑制することになるため、過渡状態における制御入力を抑制することなく定常状態のみで入力を一定にしなければならない。このため、制御器を再設計することでサンプル点間で出力が振動しない制御系を設計してもよいが、既存の離散時間応答が望ましいものであったとしても同時に変更されてしまう。それに対して、既存の離散時間系の応答を変更することなく、制御器を再設計する方法が提案されている[7,8]。この設計方法は制御対象のモデルを用いて参照入力から出力への離散時間系閉ループ系とは独立に制御則を拡張し、既存の離散時間系の応答を保存したままで定常状態のリップルを抑制することができる。

一方、状態空間モデルを用いて表現された多入力系を対象として、冗長な入力を設計する方法が連続時間系において提案されている[9]。この設計手法は、入力飽和が存在する対象に対して入力を再配置することで、入力飽

* 原稿受付 2016年11月16日
第60回システム制御情報学会研究発表講演会において講演(2016年5月)

[†] 兵庫県立大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, University of Hyogo; 2167, Shosha, Himeji, Hyogo 671-2280, JAPAN

Key Words: dual-rate system, sampled-data control system, null space, redundant input, intersample ripple.

和が存在しない場合と同じ制御性能を実現することができ、川口らは、この冗長入力を用いて耐故障適応制御系をシングルレート系において設計している [10]。また、サンプル点間のリップルに関する研究ではないが冗長性に着目したものとして、冗長なアクチュエータを切り替える方法も提案されている [11,12]。本研究では、入力の冗長性を利用した設計方法 [9] を用いて二重レート系を設計する方法を提案する。これにより、アクチュエータを複数用意するのではなく、二重レート系として設計することで仮想的に冗長なアクチュエータを得ることができ、従来の設計方法 [7] では制御対象の入出力モデルに新たに多項式を付加して制御則を拡張しているため、拡張後に得られる制御則はモデルの制約を受ける。それに対して、提案手法では新たな入力信号を付加して制御則を拡張するため、新たに付加した信号自体はモデルの制約を受けることなく設計することができる。

本論文では、 $\mathbf{R}$ を実数の集合とし、 $\mathbf{R}^n$ を n 次元実ベクトルの集合とする。また、遅れ演算子を z^{-1} とし、多項式を $A(z^{-1})$ 、多項式ベクトルと多項式行列を $\mathbf{A}(z^{-1})$ と表すこととする。

2. 制御対象と制御則の記述

本研究では、以下の仮定のもとで議論を進める。

(仮定 1) 連続時間系のモデルは未知である。

(仮定 2) 制御対象の出力のサンプリング周期に制約があるが、制御入力には自由に更新周期を変更できる。また、出力のサンプリング周期は制御入力の更新周期の最小値の整数 (l) 倍である。ただし、 $l > 1$ とする。

二重レート系の制御対象として以下の一入出力離散時間モデルを考える。

$$\begin{aligned} A(z^{-1})y(k) &= \mathbf{B}(z^{-1})^T \mathbf{u}(k-l) \\ A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-l} + a_2 z^{-2l} + \cdots + a_n z^{-nl} \\ \mathbf{B}(z^{-1}) &= [B_1(z^{-1}) \ B_2(z^{-1}) \ \cdots \ B_l(z^{-1})]^T \\ B_i(z^{-1}) &= b_{i,0} + b_{i,1} z^{-l} + \cdots + b_{i,m} z^{-ml} \\ &\quad (i=1, 2, \dots, l) \\ \mathbf{u}(k) &= [u(k) \ u(k+1) \ \cdots \ u(k+l-1)]^T \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $y(k) \in \mathbf{R}$ と $u(k) \in \mathbf{R}$ は制御対象の出力と入力である。

つぎに、以下の制御則を考える。

$$\mathbf{Y}(z^{-1})\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}(z^{-1})r(k) - \mathbf{X}(z^{-1})y(k) \quad (2)$$

ここで、 $r(k) \in \mathbf{R}$ は参照入力、 $\mathbf{K}(z^{-1})$ と $\mathbf{X}(z^{-1})$ は l 次の多項式ベクトル、 $\mathbf{Y}(z^{-1})$ は l 次の多項式正方行列であり正則とする。この制御則を用いた閉ループ系として以下を得る。

$$y(k) = \frac{z^{-l}\mathbf{B}(z^{-1})^T \mathbf{Y}(z^{-1})^{-1} \mathbf{K}(z^{-1})}{A(z^{-1}) + z^{-l}\mathbf{B}(z^{-1})^T \mathbf{Y}(z^{-1})^{-1} \mathbf{X}(z^{-1})} r(k) \quad (3)$$

本研究では、以下の仮定を設ける。

(仮定 3) 制御則 (2) 式を構成する $\mathbf{K}(z^{-1})$ 、 $\mathbf{X}(z^{-1})$ 、 $\mathbf{Y}(z^{-1})$ はすでに適切に設計されていることとし、離散時間系の閉ループ系 (3) 式は安定な理想の挙動を示す。

3. 零空間を用いた制御則の拡張

まず、以下の多項式行列 $\mathbf{B}_\perp(z^{-1})$ を定義する。

【定義 1】 l 行 n 列の $\mathbf{B}_\perp(z^{-1})$ は $\mathbf{B}(z^{-1})^T$ の零空間 ($\mathcal{N}(\mathbf{B}(z^{-1})^T)$) を表し、以下を満たす。

$$\mathbf{B}(z^{-1})^T \mathbf{B}_\perp(z^{-1}) = \mathbf{0}_{1,n} \quad (4)$$

ここで、 n は任意の自然数である。また、 $\mathbf{0}_{i,j}$ は要素をすべて 0 とする i 行 j 列の行列であり、 i または j が正の値でない場合、 $\mathbf{0}_{i,j}$ は空とする。

定義した $\mathbf{B}_\perp(z^{-1})$ を用いて、制御則 (2) 式を以下のように拡張する。

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z^{-1})(\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_\perp(z^{-1})\mathbf{w}(k)) \\ = \mathbf{K}(z^{-1})r(k) - \mathbf{X}(z^{-1})y(k) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{B}_\perp(z^{-1})$ の列数を $l-1$ とし、 $\mathbf{w}(k) \in \mathbf{R}^{l-1}$ は新たに付加した信号である。 $\mathbf{B}_\perp(z^{-1})$ と $\mathbf{w}(k)$ の構造は以下で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\perp(z^{-1}) &= [\mathbf{B}_{\perp,1}(z^{-1}) \ \mathbf{B}_{\perp,2}(z^{-1}) \ \cdots \ \mathbf{B}_{\perp,l-1}(z^{-1})] \\ \mathbf{w}(k) &= [w_1(k) \ w_2(k) \ \cdots \ w_{l-1}(k)]^T \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{B}_{\perp,i}(z^{-1})$ ($i=1, \dots, l-1$) は l 次の多項式ベクトルである。

【定理 1】 以下で与えられる $\mathbf{B}_{\perp,i}(z^{-1})$ を用いて設計した制御則 ((5) 式) による閉ループ系は拡張前の制御則 ((2) 式) を用いた場合と同じである。

$$\mathbf{B}_{\perp,i}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{i-1,1} \\ B_{i+1}(z^{-1}) \\ -B_i(z^{-1}) \\ \mathbf{0}_{l-i-1,1} \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, l-1) \quad (6)$$

(証明) 拡張した制御則 (5) 式を用いた閉ループ系は以下となる。

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{z^{-l}\mathbf{B}(z^{-1})^T \mathbf{Y}(z^{-1})^{-1} \mathbf{K}(z^{-1})}{A(z^{-1}) + z^{-l}\mathbf{B}(z^{-1})^T \mathbf{Y}(z^{-1})^{-1} \mathbf{X}(z^{-1})} r(k) \\ &\quad - \frac{z^{-l}\mathbf{B}(z^{-1})^T \mathbf{B}_\perp(z^{-1})}{A(z^{-1}) + z^{-l}\mathbf{B}(z^{-1})^T \mathbf{Y}(z^{-1})^{-1} \mathbf{X}(z^{-1})} \mathbf{w}(k) \end{aligned} \quad (7)$$

(6) 式として設計した $\mathbf{B}_\perp(z^{-1})$ を用いると以下が成り立つ。

$$\mathbf{B}(z^{-1})^T \mathbf{B}_\perp(z^{-1}) = \mathbf{0}_{1,l-1}$$

以上から、(7) 式右辺第二項の影響は制御対象の出力へ影響しないため、拡張した制御則を用いた場合でももとの閉ループ系の挙動は保存される。□

【補題 1】 (5) 式の $w(k)$ は目標値から出力の応答に対して冗長な入力である。
証明は定理 1 より以下が成り立つため明らかである。

$$B(z^{-1})^T B_{\perp}(z^{-1})w(k) = 0$$

このため、 $w(k)$ は閉ループ系の挙動とは独立に設計が可能である。 $A(z^{-1})$ が未知であっても $B(z^{-1})$ さえ既知であれば、閉ループ系の応答とは独立に設計される $w(k)$ が得られる。以下では、定常状態においてサンプル点間で切り替える制御入力に起因するサンプル点間の振動を抑制するために、ステップ状の参照入力に対し定常状態で制御入力を一定にする $w(k)$ を求める。

(1) 式と (5) 式より、外部入力信号である $r(k)$ と $w(k)$ から制御入力への閉ループ系は以下となる。

$$u(k) = R(z^{-1})r(k) - W(z^{-1})w(k) \quad (8)$$

ただし、

$$\begin{aligned} R(z^{-1}) &= A(z^{-1}) \\ (A(z^{-1})Y(z^{-1}) + z^{-l}X(z^{-1})B(z^{-1})^T)^{-1}K(z^{-1}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} W(z^{-1}) &= A(z^{-1}) \\ (A(z^{-1})Y(z^{-1}) + z^{-l}X(z^{-1})B(z^{-1})^T)^{-1} \\ Y(z^{-1})B_{\perp}(z^{-1}) \end{aligned} \quad (10)$$

である。仮定より閉ループ系は安定に設計されているため、定常状態における制御入力は以下により得られる。

$$u(\infty) = R(1)r(\infty) - W(1)w(\infty)$$

このとき、以下の定理を得る。

【定理 2】 以下を満たす $w(k)$ を用いた場合、定常状態で制御入力は振動しない。

$$\bar{W}(1)w(\infty) = \bar{R}(1)r(\infty) \quad (11)$$

ここで、 $\bar{W}(z^{-1})$ は $l-1$ 次の多項式正方行列であり、正則であると仮定する。また、 $\bar{W}(z^{-1})$ の第 i, j 要素は以下で与えられる。

$$\bar{W}_{i,j}(z^{-1}) = W_{i,j}(z^{-1}) - W_{i+1,j}(z^{-1}) \quad (12)$$

ただし、 $W_{i,j}(z^{-1})$ は $W(z^{-1})$ の第 i, j 要素である。また、 $\bar{R}(z^{-1})$ は $l-1$ 次の多項式ベクトルであり、第 i 要素は以下である。

$$\bar{R}_i(z^{-1}) = R_i(z^{-1}) - R_{i+1}(z^{-1}) \quad (13)$$

ただし、 $R_i(z^{-1})$ は $R(z^{-1})$ の第 i 要素である。

証明は付録 1 に示す。

(注意 1) 制御対象が積分器を含む場合、冗長入力 $w(k)$ により u_{∞} を一定にすることができない。しかし積分器が含まれている場合は、拡張せずとも制御入力は

一定となるためサンプル点間のリップルは生じない。

4. 入出力関係を用いた従来の方法との比較

従来の設計方法 [7] について簡潔に述べ、その後、提案手法との比較を行う。

従来の設計方法では (2) 式の制御則を構成する $Y(z^{-1})$ は以下に表す対角多項式行列に限定して設計している。

$$Y(z^{-1}) = \text{diag}\{Y_1(z^{-1}), \dots, Y_l(z^{-1})\} \quad (14)$$

さらに、(14) 式として設計されている $Y(z^{-1})$ を用いた (2) 式の制御則を以下のように拡張している。

$$\begin{aligned} Y_e(z^{-1})u(k) &= K(z^{-1})r(k) - X_e(z^{-1})y(k) \quad (15) \\ Y_e(z^{-1}) &= Y(z^{-1}) - z^{-l}U_u(z^{-1})B(z^{-1})^T \\ X_e(z^{-1}) &= X(z^{-1}) + U_y(z^{-1})A(z^{-1}) \end{aligned}$$

ただし、 $U_u(z^{-1})$ と $U_y(z^{-1})$ は以下の多項式ベクトルである。

$$\begin{aligned} U_u(z^{-1}) &= [U_{u,1}(z^{-1}) \dots U_{u,l}(z^{-1})]^T \\ U_y(z^{-1}) &= [U_{y,1}(z^{-1}) \dots U_{y,l}(z^{-1})]^T \end{aligned}$$

また、これらの要素は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} U_{u,i}(z^{-1}) &= U_i(z^{-1})B_{i+1}(z^{-1})Y_i(z^{-1}) \quad (i \neq l) \\ U_{u,l}(z^{-1}) &= U_l(z^{-1})B_1(z^{-1})Y_l(z^{-1}) \\ U_{y,1}(z^{-1}) &= U_l(z^{-1})B_l(z^{-1})Y_1(z^{-1}) \\ U_{y,i}(z^{-1}) &= U_{i-1}(z^{-1})B_{i-1}(z^{-1})Y_i(z^{-1}) \quad (i \neq 1) \end{aligned}$$

さらに、従来法における (8) 式に相当する関係から、定常状態において制御入力が一定となるように $U_i(z^{-1})$ ($i=1, \dots, l$) が設計される。

提案する設計方法は従来の設計方法に比べ以下の利点が挙げられる。

- (1) 制御則 (2) 式を構成する $u(k)$ に係る多項式行列 $Y(z^{-1})$ は、対角行列に限定しない。そのため、提案法は従来の方法に比べてより一般的な設計が可能である。
- (2) 従来の設計方法では目標値から出力の応答とは独立に制御則を拡張する際に離散時間系のモデル全体（極、零点、ゲイン）が必要であったが、提案手法では零点とゲイン（多項式 $B(z^{-1})$ ）が既知であれば冗長な入力を得ることができる。
- (3) 従来の方法では制御対象のモデルを利用しているため、制御開始時からむだ時間分までの制御入力は調整することができなかった。それに対して、提案する方法では制御開始時のむだ時間の影響を受けることがないため、より早い時間での立上り時の応答の調整が可能となる。
- (4) 従来の方法では独立に設計可能なパラメータはゲインであったが、提案する方法では冗長な信号を

新たに付加している．そのため，閉ループ系とは独立に印加される入力的设计自由度が高い．

5. 数値例

制御対象として以下の一入出力連続時間系を与える．

$$G(s) = \frac{1}{(3s+1)(4s+1)} \quad (16)$$

ここで，制御対象の出力のサンプリング周期は1秒であり，制御入力の更新周期は0.5秒であるとする．離散時間モデルは以下となる．

$$(1 - 1.5z^{-2} + 0.56z^{-4})y(k) = \begin{bmatrix} 0.025 + 0.0064z^{-2} & 0.0095 + 0.022z^{-2} \end{bmatrix} u(k-2) \quad (17)$$

上記の制御対象に対して，単位ステップ信号に制御対象を追従させる制御系を設計する．以下の制御則を用いて，離散時間系の出力を参照値へ追従させることができる．

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1.0 + 0.27z^{-2} & 0 \\ -0.10z^{-2} & 1.0 \end{bmatrix} u(k) \\ &= \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \end{bmatrix} r(k) - \begin{bmatrix} 59 - 25z^{-2} \\ 1.0 \end{bmatrix} y(k) \end{aligned} \quad (18)$$

(18)式を用いた場合の制御結果をFig. 1とFig. 2に示す．Fig. 1において，サンプル点上の出力応答を黒い丸で示し，連続時間系の出力応答は実線が示している．(18)式で与えられた制御測は離散時間系の応答のみから設計されているため，離散時間系の応答は問題なく目標値へ追従している．しかし，Fig. 2からサンプル点間で制御入力は切り替わっていることがわかる．そのため，サンプル点間応答は振動してしまっている．

つぎに，零空間を用いて制御則を拡張する． $B(z^{-1})^T$ に直交する $B_{\perp}(z^{-1})$ は(6)式より以下として得られる．

$$B_{\perp}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.0095 + 0.022z^{-2} \\ -0.025 - 0.0064z^{-2} \end{bmatrix}$$

この場合， $W(z^{-1})$ と $R(z^{-1})$ の定常ゲインは以下となる．

$$W(1) = \begin{bmatrix} 0.0314 & 0 \\ -0.0313 & 0 \end{bmatrix}, \quad R(1) = \begin{bmatrix} -13.0 \\ 15.0 \end{bmatrix}$$

さらに， $\bar{W}(1)$ と $\bar{R}(1)$ は(12)式と(13)式からそれぞれ以下が求められる．

$$\bar{W}(1) = 0.0627, \quad \bar{R}(1) = -28.0$$

以上から，定常状態で制御入力が振動しないためには，以下を満たす $w(k)$ を付加すればよい．

$$w(\infty) = -447 \quad (19)$$

Fig. 1 Output response obtained using the original controller

Fig. 2 Input response obtained using the original controller

本節では， $w(k)$ を定数として設計し，(19)式で計算される値を与える．上記の設計による制御結果をFig. 3とFig. 4に示す．Fig. 3から，黒い丸で示されるサンプル点上の応答は拡張前の応答を保存していることがわかる．さらに，定常状態では制御入力が一定となっていることがFig. 4により示されており，その結果サンプル点間の振動が抑制されていることがわかる．過渡応答の設計方法については明らかなわけではないが，若干サンプル点間応答の過渡応答も改善されていることがわかる．以上から，提案手法を用いて設計した場合，サンプル点上の応答とは独立にサンプル点間の振動を抑制することができると示された．

6. おわりに

本研究では，一入出力系である制御対象の出力のサンプリング周期が制御入力の更新周期の整数倍である二重レートサンプル値制御系に対して制御系の設計を行った．

提案手法では，参照入力応答に対して冗長な入力を導入し，冗長な入力は定常状態で制御入力を一定値にする設計方法を提案した．提案した設計方法は，定常状態においてサンプル点間の振動を抑制することのみであったが，数値例において示したように，過渡応答を改善する

Fig. 3 Output response obtained using the extended controller

Fig. 4 Input response obtained using the extended controller

ことも可能性であると考えられる。そこで、今後の課題として過渡応答を改善する設計方法が挙げられる。

謝 辞

本研究はJSPS科学費16K06425の助成を受けたものです。

参 考 文 献

- [1] T. Chen and B. Francis: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer-Verlag, London (1995)
- [2] 山本：サンプリング制御理論の回顧と展望：計測と制御, Vol. 40, No. 1, pp. 76–82 (2001)
- [3] I. S. Apostolakis: An estimation algorithm for multirate sampled digital control systems; *International Journal of Control*, Vol. 56, No. 4, pp. 813–830 (1992)
- [4] 伊藤：マルチレート有限時間整定サーボ系；計測と制御, Vol. 38, No. 9, pp. 559–564 (1999)
- [5] A. Tangirala, D. Li, R. Patwardhan, S. L. Shah and T. Chen: Issues in multirate process control; *Proc. of American Control Conference*, pp. 2771–2775 (1999)
- [6] A. Tangirala, D. Li, R. Patwardhan, S. L. Shah and T. Chen: Ripple-free conditions for lifted multirate control systems; *Automatica*, Vol. 37, No. 10, pp. 1637–1645 (2001)
- [7] T. Sato: Parametric design of a dual-rate controller for improvement in steady-state intersample response; *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol. 1, No. 4, pp. 329–334 (2008)
- [8] 木村, 佐藤, 荒木, 小西: 状態空間表現を用いた多入力デュアルレート系の一設計；システム制御情報学会論文誌, Vol. 27, No. 3, pp. 80–86 (2014)
- [9] L. Zaccarian: Dynamic allocation for input redundant control systems; *Automatica*, Vol. 45, pp. 1431–1438 (2009)
- [10] 川口, 荒木, 佐藤, 小西: 入力冗長プラントを対象とした外部信号を印加可能な耐故障適応制御設計；システム制御情報学会論文誌, Vol. 30, No. 10 (2017) (掲載決定)
- [11] M. Takahashi: A self-repairing control system for plants with faulty actuators; *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1473–1475 (2003)
- [12] 高橋: アクチュエータの切り替えによる自己修復制御；計測自動制御学会論文集, Vol. 43, No. 9, pp. 782–787 (2007)

付 録

付録 1. 定理 2 の証明

(証明) 定常状態で入力が等しくなるためには、以下が成り立てばよい。

$$u_i(\infty) - u_{i+1}(\infty) = 0 \quad (i = 1, \dots, l-1) \quad (A1)$$

ただし、 $u_i(\infty)$ は $\mathbf{u}(k)$ における i 番目の要素の定常値を表し、以下で与えられる。

$$u_i(\infty) = R_i(1)r(\infty) - \sum_{j=1}^{l-1} W_{i,j}(1)w_j(\infty) \quad (A2)$$

(A1) 式をまとめると、(11) 式を得る。 □

著 者 略 歴

佐藤 孝雄 (正会員)
論文誌 Vol. 30, No. 8, p. 337 参照。

川口 夏樹
論文誌 Vol. 30, No. 8, p. 337 参照。

荒木 望
論文誌 Vol. 30, No. 8, p. 337 参照。

小西 康夫 (正会員)
論文誌 Vol. 30, No. 8, p. 337 参照。