比例積分補償器の出力を時変係数とする定常発振制御系の安定性解析*

小林 泰秀[†]

Stability Analysis of Constant Oscillation Control System of which Proportional-Integral Controller's Output is used as Time-Varying Gain*

Yasuhide KOBAYASHI[†]

In order to estimate the critical temperature ratio (CTR) of thermoacoustic engines experimentally, a constant oscillation control method which regulates the pressure amplitude to a reference (constant) value has been proposed: the control system has a non-negative state variable of the pressure amplitude; the control law is of a proportional-integral (PI) controller driven by the tracking error; the output of the PI controller is utilized as a time-varying gain in driving signal of a loudspeaker to absorb or inject a power in the acoustic tube. A condition on PI gains for the equilibrium point to be asymptotically stable has been derived, which was agreed with the stability condition in experiments. In this paper, we focus on the fact that the closed-loop system with the zero P-gain becomes a marginal stable system of which differential equation is in separation of variables, a Lyapunov function candidate is constructed by modifying the initial-condition dependent constant of the system. As a result, global asymptotic stability is shown on the basis of the Lyapunov stability criterion without linear approximation.

1. はじめに

燃焼を伴う熱音響自励発振現象（燃焼振動）を抑制する研究が古くから数多く行われており、能動騒音制御など制御工学を適用した報告もある[1–9]。一方、熱音響自励発振現象を有効利用する熱音響システムに対しては制御工学を適用した研究報告はまだ少ない。熱音響システムは、自動車や工場からの廃熱など、エネルギーの有効利用に有望な技術であるとして近年おもに応用物理学の分野で開発が進められており[10–15]、廃熱を利用して冷凍を行う熱音響冷凍機[11]や、熱音響発電機[12]、最も基本的な音波の生成を担う熱音響エンジン[10]などが知られている。発振や振動を抑制するのではなくむしろ維持・促進が望ましいこと、エネルギーの有効利用が目的であるため電力の投入が通常許されないことが、このようなシステムに対して制御工学の応用が進まない一因であると考えられる。このような振動を維持・促進する

システム設計・開発に制御工学を役立てることが本研究の動機である。本論文では熱音響エンジンの臨界温度比の推定問題を取り扱う。

臨界温度比とは、音波と熱のエネルギー変換を行うスタック（蓄熱器）両側の温度比の臨界値、すなわち自励発振が生じる最小の温度比である。細管流路をもつスタック中を通過する音波のパワー（音響パワー）は温度比に依存して増幅されることが知られているが、スタックやその両側に設置される熱交換器の構造が複雑な場合には、システム設計時に臨界温度比を正確に予測することは困難であり、実験的な推定手法が研究されている[15–18]。燃焼振動にもそのような報告がある[19]。

熱音響システム分野ではこれまで、臨界温度比より温度比が低く自励発振が生じない状況を前提とした推定手法と、十分な温度比が与えられて自励発振が生じる状況を前提とした手法に大別されており、両者の関係が明確でない問題があった。これを解決するためにわれわれはこれまでに、温度比によらず管内の圧力を目標値一定に保持するよう音源を駆動する定常発振制御系を提案し、簡便に臨界温度比推定が行えることを実験的に示した[20–23]。

提案する定常発振制御系は管内圧力の振幅とその目標

* 原稿受付 2018年4月11日
第60回自動制御連合講演会にて発表(2017年11月)

[†] 長岡技術科学大学 工学部 Faculty of Engineering, Nagaoka University of Technology; 1603-1 Kamitomioka, Nagaoka city, Niigata 940-2112, JAPAN

Key Words: constant oscillation control, thermoacoustic system, Lyapunov stability criterion.

Fig. 1 Experimental apparatus

Fig. 2 Block diagram of the feedback system

値の偏差により駆動されるPI（比例・積分）補償器に基づき、PI補償器の出力信号そのものを、圧力センサの出力信号から音源の駆動信号を生成する際の時変係数として用いる。この結果、定常発振制御系は圧力振幅などを状態変数とする非線形系となるが、PI補償器のゲインを適切に調整すれば、幅広い温度比に対して圧力振幅が目標値に保持される実験結果が得られること、平衡点回りの線形近似に基づいて、実験的に得られた安定条件の妥当性を理論的に示した。本論文では、Lyapunovの安定定理に基づいて、線形近似を用いることなく非線形系の大域的安定性を示すことを目的とする。

2. 定常発振制御系の構成

臨界温度比推定の対象となる定在波型熱音響エンジンの概要をFig. 1に示す。詳細は文献[20–23]を参照されたい。内径 50 mm のステンレス管、スピーカ、圧力センサ、熱音響コアから構成される。熱音響コアはスタック（直径47mm、長さ50mmで1mm角の流路をもつハニカムセラミクス）と高温側および低温側の熱交換器から構成される。スタック両端の温度比 T_H/T_C を変更して実験を行う。圧力センサの出力 p は A/D 変換され PC に入力される。スピーカの駆動信号 u が D/A 変換、ローパスフィルタ (LPF) とパワーアンプ (PA) を介してスピーカを駆動する。

Fig. 2 に制御系のブロック線図を示す。 p の振幅が目標値に一致するように u を生成することが制御目的である。そのために振幅の推定値 $\hat{P}$ と目標値 P^* の差を PI 補償器

$$\dot{x}_c = \hat{P} - P^* \quad (1)$$

$$G = K_I x_c + K_P \dot{x}_c \quad (2)$$

に入力し、その出力信号 $G(t)$ そのものを時変係数として用いて駆動信号 $u(t)$ を次のように生成する。

$$u(t) = G(t)p(t-\tau) \quad (3)$$

ただし x_c は PI 補償器の状態、 K_P と K_I は比例および積分ゲインである。振幅の推定値 $\hat{P}$ は、絶対値関数を用いて $p(t)$ を全波整流した信号を一次のローパスフィルタ (LPF) に通して平滑化することで、次のように得る。

$$\dot{x}_f = -\omega_f x_f + \omega_f |p(t)|, \quad \hat{P} = \frac{\pi}{2} x_f \quad (4)$$

ここで x_f は LPF の状態、 $\omega_f := 1$ [rad/s] はカットオフ角周波数である。ただし、 $p(t)$ における直流成分をカットするためカットオフ周波数 3Hz のハイパスフィルタ (HPF) を挿入している。できるだけ小さな正定数の $G(t)$ で自励発振が抑制されるように実験的に $\tau = 11.5$ [ms] と定めた。また $P^* = 100$ [Pa] を用いる。

本制御系は T_H/T_C が臨界温度比より高い場合に行った実験の経験から次のように構成された。(1) まず $G=0$ とすると熱音響自励発振により一定振幅の圧力変動が生じる。(2) つぎに、 G を適当な正数とすると能動騒音制御の研究で行われているように発振は抑制され定常圧力は 0 となる。(3) これらの中間の値に G を手動調整すると定常振幅の値を調整できた。以上より、PI 補償器を用いて G を自動調整する本制御系を構成したところ、圧力振幅が目標値 P^* に自動調整された。さらに、(4) T_H/T_C が臨界温度比より低い場合には、本制御系により G は負数の範囲で自動調整され、スピーカが発振を補助することで圧力振幅が目標値に制御されることがわかった。

$T_H/T_C = 1.0$ （熱入力なし）の場合の時間応答の例をFig. 3に示す。薄い実線、濃い実線、破線はそれぞれ圧力 p 、振幅の推定値 $\hat{P}$ 、時変係数 G である。発振が開始するよう G が負の方向に増加している。PI 補償器のゲインを適切に調整すると図 (a) に示すように、目標圧力の 100 Pa 一定で発振するように G は自動的に調整される。 $p(t)$ は共振周波数の約 60 Hz で振動している。PI 補償器のゲインが適切でない場合、図 (b) に示すように、振幅の推定値 $\hat{P}$ と G には振動が生じる。ほかの温度比でも同様の結果が得られ、温度比によらず共通の PI 補償器のゲインで目標圧力振幅に制御できることもわかった。

Fig. 4 に温度比と G の定常値の関係を示す。両者がほぼ直線関係であることを利用すると、直線と $G=0$ の交点を、目標圧力振幅が生じるための臨界温度比と推定できる。

本論文では (i) 熱音響エンジンの臨界温度比推定の場合を扱うが、定常発振制御はほかにも (ii) 音響系の周波数応答計測において、測定管の長さによらず管内圧力を一

(a) $T_H/T_C = 1.0$, $K_P = 1.0$, $K_I = 0.1$ (b) $T_H/T_C = 1.0$, $K_P = 0.05$, $K_I = 0.1$

Fig. 3 Time responses of the feedback system

Fig. 4 Relation between T_H/T_C and gain G

定とするための音源の駆動信号の振幅制御 [24] や, (iii) 振動発電において, 振動体の振幅一定を維持しつつ発電を行うための負荷の動的な制御 [25] に適用されている. これらの制御問題はそれぞれ, (i) 外部からのエネルギー生成と散逸の両方により定常発振させる問題, (ii) 外部からのエネルギー生成のみにより定常発振させる問題, (iii) 外部へのエネルギー散逸のみにより定常発振させる問題, と分類できる. 本論文では (i) に対する安定性解析を取り扱うが, これら三つの問題を含むより一般的な安定条件を示すことが本研究の最終目的である.

3. 線形近似に基づく安定性解析

制御対象の正確なモデルを得ることは困難であるため, これまでに単純な二次振動系に基づいて, 提案する定常発振制御系の安定性解析が行われている [20,21]¹. Fig. 2

のブロック線図において, u から p までの制御対象を二次振動系 (P) に置き換えた制御系を Fig. 5 に示す. ただし, 制御対象 P の出力を改めて y と表す.

つぎの二次振動系を考える.

$$\ddot{x} = -\omega_n^2 x - 2\zeta\omega_n \dot{x} + u, \quad y = 2\alpha\omega_n \dot{x} \quad (5)$$

この伝達関数 $P(s)$ は次のように与えられる.

$$P(s) = \frac{2\alpha\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6)$$

ただし x , ω_n , ζ はそれぞれ状態, 固有角振動数, 減衰比である. α は与えられた実数で, この正負で入出力信号間の位相関係を定める. ここでは, (3) 式のむだ時間 τ が, 正の $G(t)$ で自励発振が抑制されるよう調整されている² ことに対応させて $\alpha < 0$ を仮定する. むだ時間は制御系の時定数に比べて十分短いことから, むだ時間を省略し, 制御入力 u を次のように与える.

$$u(t) = G(t)y(t) \quad (7)$$

簡単のため $y(t)$ の角周波数は ω_n 一定とし, 時変の振幅 $Y(t)$ をもつ正弦波信号

$$y(t) = Y(t)\cos\omega_n t \quad (8)$$

を仮定する. さらに, この振幅 Y が変化する時定数は共振の周期に比べて十分長く, (4) 式の代わりに次式が成り立つとする.

$$\dot{x}_f = -\omega_f x_f + \omega_f \frac{2}{\pi} Y(t), \quad Y_f = \frac{\pi}{2} x_f \quad (9)$$

すなわち, ローパスフィルタには全波整流された信号の代わりに, すでに平滑化された信号 $(2/\pi)Y(t)$ が入力されると仮定する. ただし Y_f は LPF の出力である.

一方, G により振幅 Y が変化する動特性を得るために, (8) 式に対応させて

$$x(t) = X(t)\sin\omega_n t \quad (10)$$

とおくと, (5) 式, (7) 式より次式が成り立つ.

$$\dot{X} = \omega_n(\alpha G - \zeta)X \quad (11)$$

すなわち, Y についても同様に次式が成り立つ.

$$\dot{Y} = \omega_n(\alpha G - \zeta)Y \quad (12)$$

ただし, (10) 式を (5) 式, (7) 式に代入した結果

$$\begin{aligned} & \ddot{X}\sin\omega_n t + 2\dot{X}\omega_n\cos\omega_n t \\ &= 2\omega_n(\alpha G - \zeta)(\dot{X}\sin\omega_n t + X\omega_n\cos\omega_n t) \end{aligned}$$

¹ モデルを用いることも考えられる.

² むだ時間は自励発振の周期約 17 ms の範囲内で調整され, 半周期ずらすと自励発振を抑制する $G(t)$ の正負が逆転する.

¹ 熱音響自励発振現象は振幅依存性を示すため, Van der Pol 振動子などのように非線形性を有するより正確な

Fig. 5 Closed-loop system with time-varying gain $G(t)$

の両辺において、比較的大きな係数 ω_n をもつ項を残し、次のように近似した。

$$\begin{aligned}\ddot{X} \sin \omega_n t + 2\dot{X} \omega_n \cos \omega_n t &\simeq 2\dot{X} \omega_n \cos \omega_n t \\ \dot{X} \sin \omega_n t + X \omega_n \cos \omega_n t &\simeq X \omega_n \cos \omega_n t\end{aligned}\quad (13)$$

以上より、PI 補償器と合わせて安定性解析の対象が次式で与えられる。

$$\dot{Y} = \omega_n(\alpha G - \zeta)Y \quad (14)$$

$$\dot{x}_c = Y_f - Y^*, \quad G = K_I x_c + K_P \dot{x}_c \quad (15)$$

$$\dot{x}_f = -\omega_f x_f + \omega_f \frac{2}{\pi} Y, \quad Y_f = \frac{\pi}{2} x_f \quad (16)$$

ただし、 Y^* は振幅 Y の目標値である。この系は、(14) 式に Y と x_c 、および Y と x_f の積を含む非線形系であることに注意する。

従来研究 [20,21] では平衡点

$$Y = Y^*, \quad x_c = \frac{\zeta}{\alpha K_I}, \quad x_f = \frac{2}{\pi} Y^* \quad (17)$$

回りで線形化した系を用いて、平衡点の局所的な漸近安定性のみを示していた：拡大された状態 $\hat{x}(t)$ とその平衡点 $\bar{x}$ を

$$\hat{x}(t) := \begin{bmatrix} Y(t) \\ x_c(t) \\ x_f(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} := \begin{bmatrix} Y^* \\ \frac{\zeta}{\alpha K_I} \\ \frac{2}{\pi} Y^* \end{bmatrix} \quad (18)$$

と定義する。次の条件

$$\alpha K_P < 0, \quad \alpha K_I < 0, \quad \alpha(K_I - \omega_f K_P) > 0 \quad (19)$$

が成り立つならば、平衡点 $\bar{x}$ は漸近安定、すなわち $\hat{x} \rightarrow \bar{x}$ が成り立つ¹。この結果は次のように示される。 $\hat{x}$ を微分すると次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = \hat{A}(Y)(\hat{x} - \bar{x}) \quad (20)$$

ここで $\hat{A}(Y)$ は Y 依存の行列で、次式で定義される。

$$\hat{A}(Y) := \begin{bmatrix} 0 & \omega_n \alpha K_I Y & \frac{\pi}{2} \omega_n \alpha K_P Y \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi} \omega_f & 0 & -\omega_f \end{bmatrix} \quad (21)$$

平衡点 $\hat{x} = \bar{x}$ 回りで線形化すると

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = \hat{A}(Y^*)(\hat{x} - \bar{x}) \quad (22)$$

を得る。Lyapunov の線形化法 [26] より、この線形化された系が安定、すなわち行列 $\hat{A}(Y^*)$ が安定行列ならば平衡点 $\bar{x}$ は元の非線形系において漸近安定となる。 $\hat{A}(Y^*)$ が安定行列である条件がフルビッツの安定判別より (19) 式に帰着される。

実際には実験とシミュレーション共に、平衡点から大きく外れた任意の初期値から始まる応答も常に平衡点に収束し、その安定条件に初期値依存性は見られなかった。このことは (19) 式が平衡点の局所的な漸近安定性だけでなく、初期値によらない大域的な漸近安定性を保証する可能性を示唆している。

4. 主要結果

本節では、Lyapunov 関数を構成する基本的なアイデアについて述べるため、LPF のない簡単な場合をまず取り扱う。その結果を拡張して、つぎに LPF がある場合について述べる。

4.1 LPF がない場合

(14)–(16) 式の代わりに、LPF を省略し $\omega_n = 1$, $\alpha = 1$, $\zeta = 0$ とおいたより単純な場合

$$\dot{Y} = GY \quad (23)$$

$$\dot{x}_c = Y - Y^* \quad (24)$$

$$G = K_I x_c + K_P \dot{x}_c \quad (25)$$

を考える。まず、(23) 式について、 $Y(t)$ の符号は初期値 $Y(0)$ によって $G(t)$ とは無関係に一意に決定されることを注意しておく（もし $Y(0)$ が正ならば、 $Y(t)$ もすべての時刻 $t > 0$ で常に正である）。よって以降では、振幅とその目標値が正数であることから $Y(t) > 0$, $Y^* > 0$ を仮定し、 Y については $Y > 0$ の範囲を大域的と表現する。

上記の微分方程式に対して、 $Y(0) = 0.1$, $Y^* = 1.5$, $x_c(0) = 0$, $K_I = -0.001$ として数値シミュレーションを行った結果を Fig. 6 に示す。(a) $K_P < 0$ のとき、軌跡は平衡点 $x_c = 0$, $Y = Y^* = 1.5$ に収束し安定、(b) $K_P = 0$ のとき、軌跡は閉曲線を描き安定限界、(c) $K_P > 0$ のときには軌跡が発散する不安定な結果となっていることがわかる。パラメータを変更して同様にシミュレーションを行い、 $K_P = 0$ で $K_I < 0$ のとき、 x_c – Y 平面上の軌跡が図の (b) と同様に初期値に依存する閉曲線を描く結果を得た。このことは、 $K_P = 0$, $K_I < 0$ のもとで一定値をとる Lyapunov 関数が存在する可能性を示唆してい

¹(19) 式の安定条件は減衰比 ζ に依存しない。 ζ の変化は温度比の変化に対応するため、この安定条件は、温度比によらず共通の PI 補償器のゲインで目標振幅に制御できた実験結果に整合する。

Fig. 6 Phase trajectories in x_c - Y plane by numerical simulation

る. 実際, つぎの結果が成り立つ.

【補題 1】 $K_I < 0$ とし, V を

$$V := Y - Y^* - Y^* \log \frac{Y}{Y^*} - \frac{1}{2} K_I x_c^2 \quad (26)$$

とおく. このとき

- (i) 任意の Y, x_c に対し $V \geq 0$ が成り立つ (等号は $Y = Y^*$ かつ $x_c = 0$ のときのみ成り立つ).
- (ii) (23)–(25) 式のもとで $\dot{V} = K_P \dot{x}_c^2$ が成り立つ.

(ii) より $K_P = 0$ のとき V は一定値をとる. さらに, $K_P < 0$ ならば閉ループ系は安定となる. すなわち, つぎの結果が成り立つ.

【定理 1】 $K_I < 0$ かつ $K_P < 0$ のとき, (23)–(25) 式の閉ループ系は大域的漸近安定である. すなわち $Y \rightarrow Y^*, x_c \rightarrow 0, G \rightarrow 0$ が成り立つ.

(証明) (定理 1) 仮定 $K_I < 0$ と補題 1 より, (26) 式で定義される V について $V \geq 0$ が成り立つ. また, 仮定 $K_P < 0$ より $\dot{V} \leq 0$ が成り立ち閉ループ系は安定となる. さらに大域的漸近安定性を示すために $\dot{V} = 0$ となる状態の集合 ($\mathbf{R}$ とする) を考えると, これは $\dot{x}_c = 0$ (すなわち $Y = Y^*$) かつ x_c は全実数となる. $x_c \neq 0$ とすると, (25) 式より $G \neq 0$ となり, (23) 式より $\dot{Y} \neq 0$ となることから, Y は Y^* から外れ $\dot{x}_c \neq 0$ となる. よって, 集合 $\mathbf{R}$ における最大不変集合は $\dot{x}_c = 0$ ($Y = Y^*$) かつ $x_c = 0$ の一点のみである. さらに, V は Y と x_c に関して radially unbounded である. すなわち, (26) 式の最後の項より x_c については明らか. それ以外の Y に関する項より, $Y \rightarrow \infty$ または $Y \rightarrow 0$ のとき $V \rightarrow \infty$ が成り立つ. よって, Global Invariant Set Theorem[26] より, 平衡点 $\dot{x}_c = 0, x_c = 0$ は大域的漸近安定である. すなわち $x_c \rightarrow 0$ ($Y \rightarrow Y^*$), $x_c \rightarrow 0, G \rightarrow 0$ が成り立つ. $\square$

(26) 式の V はつぎのように構成された. $K_P = 0$ のとき次式が成り立つ.

$$\ddot{x}_c = \dot{Y} = GY = K_I x_c Y = K_I x_c (\dot{x}_c + Y^*) \quad (27)$$

ここで,

$$\ddot{x}_c = \dot{x}_c \frac{d\dot{x}_c}{dx_c} \quad (28)$$

に注意すると, (27) 式は次の変数分離形の微分方程式と等価である.

$$\dot{x}_c \frac{d\dot{x}_c}{dx_c} = K_I x_c (\dot{x}_c + Y^*) \quad (29)$$

よってこれは解けて,

$$\dot{x}_c - Y^* \log |\dot{x}_c + Y^*| = K_I \frac{x_c^2}{2} + C \quad (30)$$

または

$$C = Y - Y^* - Y^* \log Y - \frac{K_I}{2} x_c^2 \quad (31)$$

を得る. ここで C は積分定数である. この微分が 0

$$\dot{C} = (Y - Y^*) \frac{\dot{Y}}{Y} - K_I x_c \dot{x}_c = K_P \dot{x}_c^2 = 0 \quad (32)$$

となることから, C は初期値 $Y(0)$ と $x_c(0)$ に依存する定数である. V は C の最小値 (負数) を相殺する定数 $Y^* \log Y^*$ を

$$V = C + Y^* \log Y^* \quad (33)$$

と加えたものである.

(証明) (補題 1)

(i) : 任意の $Y \geq 0$ に対して次の関係式が成り立つ.

$$\frac{Y}{Y^*} - 1 - \log \frac{Y}{Y^*} \geq 0 \quad (34)$$

(等号は $Y = Y^*$ のときのみ成り立つ.) これはつぎのように示される: (34) 式の左辺を y とおくと, その微分 $\frac{dy}{dY} = \frac{1}{Y^*} - \frac{1}{Y}$ が $Y = Y^*, Y < Y^*, Y > Y^*$ の場合にそれぞれ 0, 負, 正 の値をとることから, y は $Y = Y^*$ において最小値 $y = 0$ をとる. よって, $-\frac{1}{2} K_I x_c^2 \geq 0$ であることと合わせて, $V \geq 0$ が成り立ち, $Y = Y^*$ かつ $x_c = 0$ のときのみ $V = 0$ が成り立つ.

(ii) : V を微分し, (23)–(25) 式より次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (Y - Y^*) \frac{\dot{Y}}{Y} - K_I x_c \dot{x}_c \\ &= \dot{x}_c (K_I x_c + K_P \dot{x}_c) - K_I x_c \dot{x}_c = K_P \dot{x}_c^2 \end{aligned}$$

$\square$

4.2 一般の場合

LPF をもつもの系 (14)–(16) 式を考える。まず、簡単な表現を得るために変数 x_n

$$x_n := x_c + \frac{\dot{x}_c}{\omega_f} \quad (35)$$

を導入すると、等価な系

$$\dot{Y} = \omega_n(\alpha G - \zeta)Y \quad (36)$$

$$\dot{x}_n = Y - Y^* \quad (37)$$

$$G = K_I x_c + K_P \dot{x}_c \quad (38)$$

を得る。ただし、次の関係式を用いた。

$$\ddot{x}_c = \dot{Y}_f = \frac{\pi}{2} \dot{x}_f = -\omega_f Y_f + \omega_f Y = \omega_f (Y - \dot{x}_c - Y^*)$$

以下に示す Lyapunov 関数は、この等価な閉ループ系に基づき構成された。すなわち、前節で $K_P = 0$ の場合を利用したように、 K_P について特別な場合 ($K_I - \omega_f K_P = 0$) を考えると

$$G = K_I x_c + K_P \dot{x}_c = K_I x_c + \frac{K_I}{\omega_f} \dot{x}_c = K_I x_n$$

が成り立つことから、この場合の閉ループ系は (23)–(25) 式で $K_P = 0$ とおいて x_c を x_n と読み替えた場合に相当する。実際、 Y – x_n 平面上の軌跡は閉曲線を描き、(27)–(33) 式と同様の手順で Lyapunov 関数の候補を構成できる。

【補題 2】 $\alpha K_I < 0$ かつ $\alpha(K_I - \omega_f K_P) > 0$ で V を

$$V := C + \frac{\omega_n \alpha (K_I - \omega_f K_P)}{2\omega_f^2} \dot{x}_c^2 \quad (39)$$

$$C := Y - Y^* - Y^* \log \frac{Y}{Y^*} - \frac{\omega_n \alpha K_I}{2} \left(x_n - \frac{\zeta}{\alpha K_I} \right)^2 \quad (40)$$

とおく。このとき、

(i) 任意の $Y, x_c, \dot{x}_c$ に対し $V \geq 0$ が成り立つ（等号は $Y = Y^*, x_c = \frac{\zeta}{\alpha K_I}, \dot{x}_c = 0$ のときのみ成り立つ）。

(ii) $\dot{V} = -\frac{\omega_n \alpha (K_I - \omega_f K_P)}{\omega_f} \dot{x}_c^2$ が成り立つ。

（証明）(i)：補題 1 (i) より明らか。

(ii)： C を微分し (35)–(38) 式を代入して整理すると

$$\dot{C} = -\frac{\omega_n \alpha (K_I - \omega_f K_P)}{\omega_f} \dot{x}_c \dot{x}_n$$

となる。よって $\dot{V}$ がつぎのように求まる。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{C} + \frac{\omega_n \alpha (K_I - \omega_f K_P)}{\omega_f} \dot{x}_c \frac{\ddot{x}_c}{\omega_f} \\ &= -\frac{\omega_n \alpha (K_I - \omega_f K_P)}{\omega_f} \dot{x}_c \left(\dot{x}_n - \frac{\ddot{x}_c}{\omega_f} \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{\omega_n \alpha (K_I - \omega_f K_P)}{\omega_f} \dot{x}_c^2$$

□

【定理 2】 $\alpha K_I < 0$ かつ $\alpha(K_I - \omega_f K_P) > 0$ のとき、(14)–(16) 式（または等価な (35)–(38) 式）の閉ループ系は大域的漸近安定である。すなわち $Y \rightarrow Y^*, x_c \rightarrow \frac{\zeta}{\alpha K_I}$,

$G \rightarrow \frac{\zeta}{\alpha}, x_f \rightarrow \frac{2}{\pi} Y^*, Y_f \rightarrow Y^*$ が成り立つ。

（証明）定理 1 と同様に示せる。 □

定理 2 の安定条件は (19) 式の線形近似に基づく結果と同一である ($\alpha K_P < 0$ は自動的に成り立つ)。すなわち、(19) 式は非線形系の平衡点が局所的に漸近安定であるというだけでなく、大域的漸近安定性を保証することが示された。

5. おわりに

熱音響システムにおける臨界温度比の推定や定常発振時の振幅推定のための周波数応答計測、振動発電における負荷のフィードバック制御など、一定振幅で持続発振することを目的とする制御系に対して、提案する PI 補償器の出力を時変係数とする定常発振制御が経験的に利用できる。

本論文では、熱音響システムの臨界温度比推定に本制御系を適用した際に制御系が安定となる理論的根拠を与えるため、単純な二次振動系モデルに基づく安定性解析を行った。比例ゲインが 0 のとき、システムの応答は初期値に依存する閉曲線を描き、それが変数分離形の微分方程式解として導出できることを利用して、圧力振幅に関する対数項を含む Lyapunov 関数を構成した。この結果、これまで線形近似に基づいて平衡点が漸近安定となる条件として導出されていた PI ゲインとローパスフィルタのカットオフ周波数に関する条件が大域的漸近安定条件であることを示した。

振動発電などほかの問題において得られている安定条件に対して理論的根拠を与えることと、より抽象化した制御対象を用いて議論することが今後の課題である。

謝 辞

本研究は平成 29 年度科学研究費助成事業基盤研究 (C)(課題番号:15K06135) の助成を受けた。ここに謝意を表します。

参 考 文 献

- [1] A. M. Annaswamy, M. Fleifil, J. W. Rumsey, R. Prasanth, J.-P. Hathout and A. F. Ghoniem: Thermoacoustic instability: Model-based optimal control designs and experimental validation; *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 8, No. 6, pp. 905–918 (2000)
- [2] J. P. Hathout, A. M. Annaswamy, M. Fleifil and A. F.

- Ghoniem: A model-based active control design for thermoacoustic instability; *Combustion Science and Technology*, Vol. 132, No. 1, pp. 99–138 (1998)
- [3] D. U. Campos-Delgado, B. B. H. Schuermans, K. Zhou, C. O. Paschereit, E. A. Gallestei and A. Poncet: Thermoacoustic instabilities: Modeling and control; *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 11, No. 4, pp. 429–447 (2003)
- [4] Y. Huang and V. Yang: Dynamics and stability of lean-premixed swirl-stabilized combustion; *Progress in Energy and Combustion Science*, Vol. 35, No. 4, pp. 293–364 (2009)
- [5] M. A. Vaudrey, W. T. Baumann and W. R. Saunders: Stability and operating constraints of adaptive LMS-based feedback control; *Automatica*, Vol. 39, No. 4, pp. 595–605 (2003)
- [6] A. S. Morgans and A. P. Dowling: Model-based control of combustion instabilities; *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, No. 1–2, pp. 261–282 (2007)
- [7] D. Zhao and M. Reyhanoglu: Feedback control of acoustic disturbance transient growth in triggering thermoacoustic instability; *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, No. 4, pp. 3639–3656 (2014)
- [8] D. Zhao and Z. H. Chow: Thermoacoustic instability of a laminar premixed flame in rijke tube with a hydrodynamic region; *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 8, pp. 3419–3437 (2013)
- [9] G. Gelbert, J. P. Moeck, C. O. Paschereit and R. King: Feedback control of unstable thermoacoustic modes in an annular Rijke tube; *Control Engineering Practice*, Vol. 20, pp. 770–782 (2012)
- [10] S. Backhaus and G. W. Swift: A thermoacoustic stirring heat engine; *Nature*, Vol. 399, pp. 335–338 (1999)
- [11] G. W. Swift: *Thermoacoustics: A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators*, Acoustical Society of America (2002)
- [12] S. Backhaus, E. Tward and M. Petach: Traveling-wave thermoacoustic electric generator; *Applied Physics Letters*, Vol. 85, No. 6, pp. 1085–1087 (2004)
- [13] J. Wheatley, T. Hoffer, G. W. Swift and A. Migliori: Understanding some simple phenomena in thermoacoustics with applications to acoustical heat engines; *Am. J. Phys.*, Vol. 53, No. 2, pp. 147–162 (1985)
- [14] T. Yazaki, A. Iwata, T. Maekawa and A. Tominaga: Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube; *Physical Review Letters*, Vol. 81, No. 15, pp. 3128–3131 (1998)
- [15] T. Biwa, D. Hasegawa and T. Yazaki: Low temperature differential thermoacoustic stirling engine; *Applied Physics Letters*, No. 97, 034102 (2010)
- [16] M. Guedra, G. Penelet, P. Lotton and J.-P. Dalmont: Theoretical prediction of the onset of thermoacoustic instability from the experimental transfer matrix of a thermoacoustic core; *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 130, No. 1, pp. 145–152 (2011)
- [17] H. Hatori, T. Biwa and T. Yazaki: How to build a loaded thermoacoustic engine; *Journal of Applied Physics*, Vol. 111, 074905 (2012)
- [18] Y. Kobayashi, T. Nakata and N. Yamada: A Nyquist based unified analysis method on spontaneous oscillation condition for thermoacoustic systems with application to standing- and traveling-wave engines; *Proceedings of the 22nd International Congress on Sound and Vibration (ICSV22)* (2015)
- [19] W. Polifke: Black-box system identification for reduced order model construction; *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 67, pp. 109–128 (2014)
- [20] 小林, 櫻井, 山田: 臨界温度比推定のために熱音響エンジンを定常発振させる時変ゲインを用いた定エネルギー制御系の安定性解析; 第58回自動制御連合講演会, 講演番号 2H3-3 (2015)
- [21] Y. Kobayashi, K. Sakurai and N. Yamada: Constant energy control by time-varying gain for steady-state oscillation of thermoacoustic engines to estimate critical temperature ratio; *Proc. of American Control Conference*, pp. 4415–4421 (2016), <http://dx.doi.org/10.1109/ACC.2016.7525617>
- [22] K. Sakurai, Y. Kobayashi and N. Yamada: Estimation of the critical temperature ratio for thermoacoustic engines based on adaptive control which maintains closed-loop system at stability limit; *Proc. of the 22nd International Congress on Sound and Vibration (ICSV22)* (2015)
- [23] 櫻井, 小林, 中田, 山田: 定在波型熱音響エンジンの適応定常発振制御に基づく臨界温度比推定; 日本音響学会誌, Vol. 73, No. 2, pp. 93–99 (2017)
- [24] 中田, 小林: 音響の周波数応答計測において圧力振幅を一定に保持するフィードバック制御と熱音響システムの安定性解析への応用; 第59回自動制御連合講演会, 講演番号 SaA4-2, pp. 1141–1144 (2016)
- [25] 永井, 齋藤, 小林: 振動体の振幅を一定とする振動発電機負荷のフィードバック制御; 第59回自動制御連合講演会, 講演番号 SaB4-6, pp. 1328–1332 (2016)
- [26] J.-J. E. Slotine and W. Li: *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall (1991)

著者略歴

こばやし やす ひで
小林 泰 秀 (正会員)

1970年10月27日生。1995年3月東京工業大学大学院理工学研究科制御工学専攻修士課程修了。同年4月長岡技術科学大学助手。2002年3月博士(工学)取得(東京工業大学)。2007年4月長岡技術科学大学准教授となり現在に至る。能動騒音制御系など実システムのロバスト制御に関する研究に従事。計測自動制御学会, 日本機械学会, 日本音響学会の会員。