マルチチャネル型能動騒音制御の統計力学的解析*

邨田 朋生[†]・梶川 嘉延[‡]・三好 誠司[‡]

Statistical-Mechanical Analysis of Multi-channel Active Noise Control*

Tomoki MURATA[†], Yoshinobu KAJIKAWA[‡] and Seiji MIYOSHI[‡]

We analyze the behaviors of the Multiple-Error Filtered-X LMS (MEFXLMS) algorithm for multiple-channel active noise control(ANC). Correlations between the impulse response of a primary path and an adaptive filter are treated as macroscopic variables. We analytically solve the equations to obtain the correlations and finally compute the MSE. The derived theory can predict the behaviors including the phenomenon that the MSE is affected by the secondary path that is not directly connected.

1. はじめに

近年のデジタル信号処理技術の進歩によって、身の回りのさまざまな場面で能動騒音制御が用いられるようになってきた[1,2]。能動騒音制御は、騒音が伝搬する未知システム（一次経路）の同定にデジタル信号処理の主要な技術である適応フィルタを用いることにより実現される。ただし、一般に能動騒音制御においては二次音源スピーカから誤差を検出するエラーマイクロホンまでの伝搬系（二次経路）が存在することに注意する必要がある。

適応フィルタの代表的なアルゴリズムとしてLMSアルゴリズムがよく知られている[3–5]。LMSアルゴリズムを能動騒音制御に適用する場合、通常は二次経路を事前に何らかの手法で同定しておき、それに通した入力を用いることになる。二次経路のインパルス応答を考慮してLMSアルゴリズムを一般化したこのようなアルゴリズムはFiltered-X LMS(FXLMS)アルゴリズムとよば

れる[1,2]。

FXLMSアルゴリズムの理論解析に関してはいくつかの先行研究がある。ひとつは独立仮定（独立理論）に基づく解析である[6]。Bjarnasonは独立仮定に基づきFXLMSアルゴリズムの解析を行った[7,8]。FIRフィルタにおいては入力信号はタップつき遅延線をシフトしていくが、このような入力の影響を理論的に取り扱うことは容易ではない。そこで、タップ入力ベクトルが各時刻ステップで独立に生成されると仮定するのが独立仮定である。しかし、実際の入力はタップ付き遅延線をシフトしていくだけなので、もちろん独立ではない。そのため、独立仮定に基づく解析の結果は一般には実験結果を正しく説明することはできない[4,7]。独立仮定に基づく解析以外には、周期信号を仮定する解析[9]や、ステップサイズが小さい場合の解析[10,11]などがある。また、Tobias[11,12]やCosta[13]らは適応フィルタの係数ベクトルとタップ入力ベクトルの相関がタップ入力ベクトル間の相関に対して無視できると仮定してFXLMSアルゴリズムの解析を行った。

一方、物理学の中に統計力学とよばれる分野がある。統計力学は、分子や原子といったミクロな構成要素の性質から、気体や磁石のマクロな性質を理解するために構築された物理学である。統計力学ではこれまでに種々の理論解析手法、数値計算手法が開発されてきた。これらの手法を用いて情報に関するいろいろな問題にアプローチする枠組みは情報統計力学とよばれる[14,15]。情報統計力学はシステムサイズが大きい極限を考えることに

* 原稿受付 2017年7月19日
第61回システム制御情報学会研究発表講演会にて発表(2017年5月)

[†] 関西大学大学院 理工学研究科 Graduate School of Science and Engineering, Kansai University; 3-3-35 Yamate-cho, Suita-shi, Osaka 564-8680, JAPAN

[‡] 関西大学 システム理工学部 Faculty of Engineering Science, Kansai University ; 3-3-35 Yamate-cho, Suita-shi, Osaka 564-8680, JAPAN

Key Words: active noise control, multiple-channel, adaptive filter, MEFXLMS algorithm, statistical mechanics.

より問題の個別詳細によらない普遍的性質を巨視的に議論する [16] ことをその精神としており、連想記憶 [17]、誤り訂正符号 [18]、無線通信 [19]、画像処理 [20]、統計的学習 [21] など多くの分野で成果をあげている。また、Miyoshi らは統計力学的手法を用いて LMS アルゴリズムや FXLMS アルゴリズムのふるまいを理論的に明らかにした [22–24]。

能動騒音制御において、参照マイクロホン、エラーマイクロホン、二次音源スピーカがそれぞれ 1 個ずつの場合がシングルチャネル型とよばれるのに対し、それ以外の場合はマルチチャネル型とよばれる [25–27]。また、マルチチャネル型における FXLMS アルゴリズムはとくに Multiple-Error Filtered-X LMS (MEFXLMS) アルゴリズムとよばれることもある [25]。

本論文では [22–24] の解析に基づきマルチチャネル型能動騒音制御の解析を行う [28]。

2. マルチチャネル型能動騒音制御の解析モデル

本論文では参照マイクロホンが 1 個、エラーマイクロホンが M 個、二次音源スピーカが S 個のマルチチャネル型能動騒音制御を扱う。たとえば、 $M=S=2$ の場合のブロック図は Fig. 1 のようになる。

Fig. 1 マルチチャネル型能動騒音制御のブロック図 ($M=S=2$)

一次経路 $P_m (m=1, \dots, M)$ はタップ長 N の FIR フィルタでモデル化される。その係数ベクトルは $\mathbf{p}_m = [p_{m,1}, p_{m,2}, \dots, p_{m,N}]^T$ であり、各要素は平均 0、分散 σ^2 の分布に従い、独立に生成される。ここで $\top$ は転置を表す。適応フィルタ $H_s (s=1, \dots, S)$ はタップ長が N である FIR フィルタで構成されており、その係数ベクトルは $\mathbf{h}_s(n) =$

$[h_{s,1}(n), h_{s,2}(n), \dots, h_{s,N}(n)]^T$ である。ここで n は時刻ステップを表す。参照信号 $x(n)$ は平均 0、分散 σ^2/N の分布に従い、独立に生成される。FIR フィルタにおいては入力にタップつき遅延線をシフトしていくので、タップ入力ベクトルは $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$ である。この場合、 $\mathbf{p}_m(n)$ 、 $\mathbf{h}_s(n)$ のノルムは $O(\sqrt{N})$ である。

P_m と H_s はいずれも FIR フィルタであるので、それらの出力はタップ係数ベクトルと入力の畳み込みである。よって、一次経路 P_m の出力を $d_m(n)$ 、適応フィルタ H_s の出力を $u_s(n)$ とすると、これらはそれぞれ

$$d_m(n) = \mathbf{p}_m^T(n) \mathbf{x}(n) \quad (1)$$

$$u_s(n) = \mathbf{h}_s^T(n) \mathbf{x}(n) \quad (2)$$

である。また、二次経路 $C_{m,s} (m=1, \dots, M, s=1, \dots, S)$ はタップ長 K の FIR フィルタでモデル化される。その係数ベクトル $\mathbf{c}_{m,s} = [c_{m,s,1}, c_{m,s,2}, \dots, c_{m,s,K}]^T$ は時不変である。二次経路 $C_{m,s}$ においても畳み込み演算が行われるのでその出力を $y_{m,s}(n)$ とすると

$$y_{m,s}(n) = \sum_{k=1}^K c_{m,s,k} u_s(n-k+1) \quad (3)$$

である。 m 番目のエラーマイクロホンの出力は誤差信号 $e_m(n)$ であり、これは $d_m(n)$ と $\sum_{s=1}^S y_{m,s}(n)$ の差に独立な背景雑音 $\xi_m(n)$ を加えたもので

$$e_m(n) = d_m(n) - \sum_{s=1}^S y_{m,s}(n) + \xi_m(n) \quad (4)$$

である。ここで、背景雑音 $\xi_m(n)$ は平均 0、分散 σ_ξ^2 である。適応フィルタの更新には LMS アルゴリズムを用いる。ただし、ここで二次経路 $C_{m,s}$ の係数ベクトル $\mathbf{c}_{m,s}$ は一般には未知である。そこで、あらかじめ他の手法で推定された推定二次経路 $\tilde{C}_{m,s}$ を用いて適応フィルタのタップ係数ベクトルを更新する。これが、MEFXLMS アルゴリズムである。推定二次経路 $\tilde{C}_{m,s}$ が K 次の FIR フィルタであり、その係数ベクトルが $\tilde{\mathbf{c}}_{m,s} = [\tilde{c}_{m,s,1}, \tilde{c}_{m,s,2}, \dots, \tilde{c}_{m,s,K}]^T$ であるとする、MEFXLMS アルゴリズムの更新式は

$$\mathbf{h}_s(n+1) = \mathbf{h}_s(n) + \mu \sum_{m=1}^M e_m(n) \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(n-k+1) \tilde{c}_{m,s,k} \quad (5)$$

となる。ここで μ はステップサイズパラメータである。なお、MEFXLMS アルゴリズムによる更新時には二次経路 $C_{m,s}$ 、推定二次経路 $\tilde{C}_{m,s}$ は固定であり、先行研究 [22–24] と同様にその同定は行わないことに注意する。

3. 理論

ここでは、統計力学的手法を用いて MEFXLMS アルゴリズムの動的ふるまい（学習曲線）に関する理論解析を行う。二乗平均誤差 (MSE) は

$$\begin{aligned}
& \langle (e_m(n))^2 \rangle \\
&= \left\langle \left(d_m(n) + \xi_m(n) - \sum_{s=1}^S y_{m,s}(n) \right)^2 \right\rangle \quad (6) \\
&= \langle (d_m(n))^2 \rangle - 2 \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^S c_{m,s,k} \langle d_m(n) u_s(n-k+1) \rangle \\
&\quad + \sum_{s=1}^S \sum_{s'=1}^S \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K c_{m,s,k} c_{m,s',k'} \langle u_s(n-k+1) u_{s'}(n-k'+1) \rangle \\
&\quad + \sigma_{\xi_m}^2 \quad (7)
\end{aligned}$$

である。ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は平均を表す。 $\mathbf{x}(n)$ と $\mathbf{h}_s(n)$ の相関が無視できるという仮定 [11–13] を用いて (6) 式を展開し、(7) 式を得た。また、背景雑音 $\xi_m(n)$ は独立に生成されるので他の確率変数とは相関をもたず、その平均と分散がそれぞれ 0、 σ_{ξ}^2 であることを用いた。(7) 式には時刻ステップがずれた d_m と u_s の積の平均、 u_s と $u_{s'}$ の積の平均が含まれている。これを計算するために、 N 次元ベクトル $\mathbf{k}_{s,j}(n) = [k_{s,j,1}(n), k_{s,j,2}(n), \dots, k_{s,j,N}(n)]^\top$ を導入する。その要素は $k_{s,j,i}(n) = h_{s,i+j}(n)$ である。つまり $\mathbf{k}_{s,j}(n)$ は適応フィルタのタップ係数ベクトル $\mathbf{h}_s(n)$ を j だけ要素方向にずらしたベクトルである。

以下では $N \rightarrow \infty$ の極限を考えることにする。ただし、これから導出する理論の目的はあくまでもタップ長 N が有限の実験の典型的な性能を評価することであり、4 節では N が比較的小さい場合の実験との比較を行うことを強調しておく。 j が $O(1)$ である場合を考えると適応フィルタの端の部分の影響は無視できるので、 $\mathbf{k}_{s,j}(n)$ について、

$$u(n) = \mathbf{h}_s(n)^\top \mathbf{x}(n) \simeq \mathbf{k}_{s,j}(n)^\top \mathbf{x}(n-j) \quad (8)$$

が成り立つ。このように、タップ入力ベクトルの時間方向のずれを適応フィルタの係数ベクトルの要素方向のずれに置き換えることができる。さらに、以下のように定義される巨視的変数 $R_{m,s,j}(n)$ 、 $Q_{s,s',j}(n)$ を新たに導入する。

$$R_{m,s,j}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_{m,i} k_{s,j,i}(n) \quad (9)$$

$$Q_{s,s',j}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_{s,i}(n) k_{s',j,i}(n) \quad (10)$$

$\mathbf{h}_s(n)$ を要素方向にずらしたベクトルが $\mathbf{k}_{s,j}(n)$ であるから、 $R_{m,s,j}(n)$ は $\mathbf{p}_m(n)$ と $\mathbf{h}_s(n)$ の相互相関、 $Q_{s,s',j}(n)$ は $\mathbf{h}_s(n)$ の自己相関である。これにより時刻ステップのずれた d_m と u_s の積の平均、 u_s と $u_{s'}$ の積の平均は、それぞれ

$$\langle d_m(n) u_s(n+j) \rangle = \sigma^2 R_{m,s,j} \quad (11)$$

$$\langle u_s(n) u_{s'}(n+j) \rangle = \sigma^2 Q_{s,s',j} \quad (12)$$

と表すことができる。これらを用いると (7) 式は

$$\begin{aligned}
\langle e_m^2(n) \rangle &= \sigma^2 \left[1 + \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K c_{m,s,k} \left(\sum_{s'=1}^S \sum_{k'=1}^K c_{m,s',k'} Q_{s,s',k-k'} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2R_{m,s,1-k} \right) \right] + \sigma_{\xi}^2 \quad (13)
\end{aligned}$$

となる。このように MSE は巨視的変数 $R_{m,s,j}$ と $Q_{s,s',j}$ の関数であるから、 $R_{m,s,j}$ と $Q_{s,s',j}$ のふるまいを記述する微分方程式を求めることができればその学習曲線が求まることになる。よって、つぎに $R_{m,s,j}$ と $Q_{s,s',j}$ の微分方程式を導出する。

まず $R_{m,s,j}$ の微分方程式を導出する。適応フィルタの係数ベクトル $\mathbf{h}_s$ が更新されると、それを要素方向に j だけずらしたベクトルである $\mathbf{k}_{s,j}$ も変化する。その式は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{s,j}(n+1) &= \mathbf{k}_{s,j}(n) + \mu \sum_{m=1}^M e_m(n) \\
&\quad \times \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(n-k+1-j) \tilde{c}_{m,s,k} \quad (14)
\end{aligned}$$

と書ける。(5) 式と比較すると、タップ入力ベクトル $\mathbf{x}$ の時刻ステップが j だけずれていることに注意する。(14) 式の両辺に左側から $\mathbf{p}_m^\top$ を乗ずると

$$\begin{aligned}
NR_{m,s,j}(n+1) &= NR_{m,s,j}(n) + \mu \sum_{m=1}^M e_m(n) \\
&\quad \times \sum_{k=1}^K d_m(n-k+1-j) \tilde{c}_{m,s,k} \quad (15)
\end{aligned}$$

となる。(15) 式の左辺と右辺の第一項が $O(N)$ であるのに対し、右辺第二項は $O(1)$ である。このため $R_{m,s,j}$ が $O(1)$ 変化するためには (15) 式の更新を $O(N)$ 回実行しなければならない。それ以後は時刻ステップ n をタップ長 N で正規化した値を連続変数 t とし、これを巨視的変数の時間変化を表す添え字として用いることにする。いま微小時間 dt の間に Ndt 回の更新を行ったとすると、以下のように Ndt 個の式が書ける。

$$\begin{aligned}
NR_{m,s,j}(n+1) &= NR_{m,s,j}(n) \\
&\quad + \mu \sum_{m=1}^M e_m(n) \\
&\quad \times \sum_{k=1}^K d_m(n-k+1-j) \tilde{c}_{m,s,k} \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
NR_{m,s,j}(n+2) &= NR_{m,s,j}(n+1) \\
&\quad + \mu \sum_{m=1}^M e_m(n+1) \\
&\quad \times \sum_{k=1}^K d_m(n-k+2-j) \tilde{c}_{m,s,k} \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\begin{aligned}
NR_{m,s,j}(n+Ndt) &= NR_{m,s,j}(n+Ndt-1) \\
&\quad + \mu \sum_{m=1}^M e_m(n+Ndt-1) \\
&\quad \times \sum_{k=1}^K d_m(n-k+Ndt-j) \tilde{c}_{m,s,k} \quad (18)
\end{aligned}$$

つぎに、(16)–(18) 式をすべて足すと

$$N(R_{m,s,j} + dR_{m,s,j}) = NR_{m,s,j} + Ndt\mu \left\langle \sum_{m=1}^M e_m(n') \times \sum_{k=1}^K d_m(n' - k + 1 - j) \tilde{c}_{m,s,k} \right\rangle \quad (19)$$

となる。ここで添え字 n' は時刻ステップのずれを表現するために導入された補助的時刻ステップである。(19) 式の右辺第二項において、 $R_{m,s,j}$ が $dR_{m,s,j}$ だけ変化するために更新が Ndt 回 (すなわち $O(N)$ 回 = 非常にたくさん) 実行されているので、確率変数の影響をそれに関する平均で置き換えている (自己平均性) [14,15]. (3), (4), (11), (19) 式より $R_{m,s,j}$ の動的ふるまいを記述する微分方程式を

$$\frac{dR_{m,s,j}}{dt} = \mu\sigma^2 \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \tilde{c}_{m,s,k} \left(\delta_{k+j,1} - \sum_{s=1}^S \sum_{k'=1}^K c_{m,s,k'} R_{m,s,-k'+k+j} \right) \quad (20)$$

と決定論的な形で導出することができる。(20) 式の導出の詳細については付録 1 に示す。ここで、 δ は

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (21)$$

で定義されるクロネッカーのデルタである。 $Q_{s,s',j}$ の微分方程式は (5) 式と (14) 式の辺々掛け合わせて、上と同様の操作を行うことにより以下のように導出することができる。

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{s,s',j}}{dt} = & \mu\sigma^2 \sum_{a=1}^M \tilde{c}_{a,s',k} \left(R_{a,s',\gamma} - \sum_{k''=1}^K \sum_{b=1}^S (\tilde{c}_{a,b,k''} Q_{b,s',-k+k''+j}) \right. \\ & - \mu\sigma^2 \text{sgn}(\gamma) \sum_{k'=1}^M \sum_{d=1}^M \left(\tilde{c}_{d,s',\zeta} \left(\delta_{a,d} \delta_{0,\alpha} \right. \right. \\ & - \sum_{k''=1}^K \sum_{b=1}^S \left(c_{d,b,k''} R_{a,b,\alpha-k''+1} + c_{a,b,k''} \left(R_{d,b,-k''+1-\alpha} \right. \right. \\ & - \sum_{k'''=1}^K \sum_{e=1}^S (c_{d,e,k''} Q_{e,b,-k''-\alpha+k''}) \left. \left. \right) \right) \left. \right) + \delta_{d,a} \sigma_{\xi_a}^2 \left. \right) \\ & + \mu\sigma^2 \sum_{a=1}^M \tilde{c}_{a,s',k} \left(R_{a,s',\epsilon} - \sum_{k''=1}^K \sum_{b=1}^S (\tilde{c}_{a,b,k''} Q_{b,s',-k+k''-j}) \right. \\ & - \mu\sigma^2 \text{sgn}(\epsilon) \sum_{k'=1}^M \sum_{d=1}^M \left(\tilde{c}_{d,s',\eta} \left(\delta_{a,d} \delta_{0,\beta} \right. \right. \\ & - \sum_{k''=1}^K \sum_{b=1}^S \left(c_{d,b,k''} R_{a,b,\beta-k''+1} + c_{a,b,k''} \left(R_{d,b,-k''+1-\beta} \right. \right. \\ & - \sum_{k'''=1}^K \sum_{e=1}^S (c_{d,e,k''} Q_{e,b,-k''-\beta+k''}) \left. \left. \right) \right) \left. \right) + \delta_{d,a} \sigma_{\xi_a}^2 \left. \right) \\ & + \mu\sigma^4 \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \delta_{k,k'+j} \tilde{c}_{a,s,k} \tilde{c}_{b,s',k'} \left(\delta_{a,b} + \frac{\sigma_{\xi_a}}{\sigma^2} \delta_{a,b} \right. \\ & - \sum_{k''=1}^K \sum_{d=1}^S \left(c_{b,d,k''} R_{a,d,-k''+1} + c_{a,d,k''} R_{b,d,-k''+1} \right. \\ & \left. \left. - \sum_{k'''=1}^K \sum_{f=1}^S (c_{a,d,k''} c_{b,f,k'''} Q_{d,f,-k'''+k''}) \right) \right) \quad (22) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \Theta(\gamma)\gamma - k', & \beta &\equiv \Theta(\epsilon)\epsilon - k' \\ \gamma &\equiv j + 1 - k, & \epsilon &\equiv -j + 1 - k \\ \zeta &\equiv \Theta(-\gamma)(-\gamma) - k' + 1, & \eta &\equiv \Theta(-\epsilon)(-\epsilon) - k' + 1 \end{aligned}$$

である。また、 $\text{sgn}(\cdot)$ は符号関数であり、 $\Theta(\cdot)$ は

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (23)$$

で定義されるステップ関数である。(22) 式の導出の詳細については付録 2 に示す。いま、 $R_{m,s,j}$ と $Q_{s,s',j}$ に対してそれぞれ $j = -L, \dots, L$ の $2L+1$ 個を考えると、(20), (22) 式から以下の形の一階 $(2L+1)(S^2+MS)$ 元の非齊次常微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{z} = \mathbf{G} \mathbf{z} + \mathbf{b} \quad (24)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = [& Q_{1,1,-L}, \dots, Q_{1,1,0}, \dots, Q_{1,1,L}, \dots, \\ & Q_{S,S,-L}, \dots, Q_{S,S,0}, \dots, Q_{S,S,L}, \\ & R_{1,1,-L}, \dots, R_{1,1,0}, \dots, R_{1,1,L}, \dots, \\ & R_{M,S,-L}, \dots, R_{M,S,0}, \dots, R_{M,S,L}] \quad (25) \end{aligned}$$

であり、行列 $\mathbf{G}$ は (20), (22) 式により決定される。 $t=0$ における $\mathbf{z}$ の値 $\mathbf{z}_0$ を用いて (24) 式は以下のように解析的に解くことができる。

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{G}t} (\mathbf{z}_0 - \mathbf{G}^{-1} e^{-\mathbf{G}t} \mathbf{b} + \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}) \quad (26)$$

ここで $e^{\mathbf{D}}$ は

$$e^{\mathbf{D}} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{D}^k = \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \mathbf{D} + \frac{1}{2!} \mathbf{D}^2 + \dots \quad (27)$$

で定義される行列指数関数である。

4. 結果と考察

理論と計算機実験による学習曲線を Fig. 2, Fig. 3 に示す。条件はともに $\mu=0.1$, $\sigma^2=1$, $K=2$ とした。また、推定二次経路 $\tilde{C}_{m,s}$ には誤差がないものとした。すなわち、 $\tilde{\mathbf{c}}_{m,s} = \mathbf{c}_{m,s}$ とした。理論計算は $L=50$ の場合について微分方程式 (24) を解いて得られる $R_{m,s,j}$, $Q_{s,s',j}$ を (13) 式に代入した結果をプロットした。ただし、このとき解析解である (26) 式の数値計算には数値不安定性が伴うので、本論文では (24) 式をルンゲ・クッタ法で数値的に解いた。これらの理論計算の結果は統計力学的手法を用いて導出されたことから滑らかで決定的な曲線となっていることがわかる。

Fig. 2 は $M=S=1$ としたときの学習曲線である。計算機実験は 500 回のアンサンブル平均をプロットし、 $\mathbf{c}_{1,1} = [1, 1]^T$ である。この条件はシングルチャネル型に相当する。ここでは計算機実験のタップ長 N を $N=50$,

Fig. 2 学習曲線 ($M=S=1$) Fig. 3 エラーマイクロホン 1 の学習曲線 ($M=S=2$)

100, 500, 1000 とし, $N \rightarrow \infty$ で導出された理論がどれぐらいのタップ長の計算機実験の結果を定量的に示すのかを検証した. $N=50, 100$ はタップ長が小さいため, 理論とのずれがやや大きいことがわかる. これは有限サイズ効果 [29] によるものである. $N=500, 1000$ はシングルチャネル型に関する先行研究 [22,23] と同様に理論と計算機実験のずれがほとんどないことから, 理論はおおよそ $N=500$ 以上の計算機実験をよく説明していることがわかる. また, 計算機実験の結果のばらつきは有限の N で実行したことによる自己平均性の破れによるものである.

Fig. 3 は $M=S=2$ としたときの学習曲線である. 計算機実験は $N=1000$ とし, 500 回のアンサンブル平均をプロットした. このときシステムのブロック図は Fig. 1 のようになるが, この場合エラーマイクロホン 1 と 2 は対称であるため, それらの学習曲線は本質的に同一となる. よってここではエラーマイクロホン 1 の学習曲線のみを示した. 4 個の二次経路のうち $\mathbf{c}_{1,1}=[1,1]^T$, $\mathbf{c}_{2,2}=[1,1]^T$ とし, $\mathbf{c}_{1,2}, \mathbf{c}_{2,1}$ の値を変化させた. Fig. 3 においても理論と計算機実験はよく一致している. $\mathbf{c}_{1,2}=[0.7,0.7]^T$ (○印) と $\mathbf{c}_{1,2}=[0.2,0.2]^T$ (●印) の学習曲線の違いは二次経路 $\mathbf{c}_{1,2}$ を変化させたときの変化を示している. Fig. 1 より

$\mathbf{c}_{1,2}$ はエラーマイクロホン 1 に直接に接続されている二次経路であるから, $\mathbf{c}_{1,2}$ を変化させたときに学習曲線に違いが生じるのは自然である. 一方, $\mathbf{c}_{2,1}=[0.7,0.7]^T$ (+印) と $\mathbf{c}_{2,1}=[0.2,0.2]^T$ (×印) の学習曲線の違いは二次経路 $\mathbf{c}_{2,1}$ を変化させたときの変化を示している. Fig. 1 より $\mathbf{c}_{2,1}$ はエラーマイクロホン 1 に直接には接続されていない二次経路であるが, これを変化させたときにも学習曲線に違いが生じている. これは $\mathbf{c}_{2,1}$ が直接に接続されているエラーマイクロホン 2 の出力と LMS アルゴリズムを介してエラーマイクロホン 1 の出力に影響を与えているからだと考えられる. このように, 導出された理論は複数の二次経路が相互に影響を与えるマルチチャネル型能動騒音制御のふるまいを定量的に予測することができる.

5. おわりに

本論文では能動騒音制御に関する [22–24] の解析に基づき, シングルチャネル型の理論を拡張することで, マルチチャネル型の理論解析を行った. 導出された理論は計算機実験の結果を定量的に予測できる. とくに, 複数の二次経路が相互に影響を与えるマルチチャネル型特有のふるまいを定量的に予測できる. 本論文では参照信号が白色である場合を扱ったが, これが有色である場合についての解析は今後の課題である.

謝 辞

本研究の一部は科研費 (15K00256, 17K06449) による.

参考文献

- [1] S. M. Kuo and D. R. Morgan: Active noise control: A tutorial review; *Proc. of IEEE*, Vol. 87, No. 6, pp. 943–973 (1999)
- [2] Y. Kajikawa, W. S. Gan and S. M. Kuo: Recent advances on active noise control: open issues and innovative applications; *APSIPA Trans. Signal and Information Processing*, e3, Vol. 1 (2012)
- [3] B. Widrow and M. E. Hoff, Jr.: Adaptive switching circuits; *IRE WESCON Conv. Rec.*, Pt.4, pp. 96–104 (1960)
- [4] S. Haykin: *Adaptive Filter Theory*, Fourth ed., Prentice Hall (2002)
- [5] A. H. Sayed: *Fundamentals of Adaptive Filtering*, Wiley (2003)
- [6] B. Widrow, J. M. McCool, M. G. Larimore and C. R. Johnson, Jr.: Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter; *Proc. IEEE*, Vol. 64, No. 8, pp. 1151–1162 (1976)
- [7] E. Bjarnason: Analysis of the Filtered-X LMS algorithm; *IEEE Trans. Speech and Audio Process.*, Vol. 3, No. 6, pp. 504–514 (1995)
- [8] I. T. Ardekani and W. Abdulla: Theoretical convergence analysis of FxLMS algorithm; *Signal Process.*,

- Vol. 90, pp. 3046–3055 (2010)
- [9] Y. Hinamoto and H. Sakai: Analysis of the Filtered-X LMS algorithm and a related new algorithm for active control of multitone noise; *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, Vol. 14, No. 1, pp. 123–130 (2006)
- [10] H. J. Butterweck: The independence assumption: a dispensable tool in adaptive filter theory; *Signal Process.*, Vol. 57, pp. 305–310 (1997)
- [11] O. J. Tobias, J. C. M. Bermudez and N. J. Bershad: Mean weight behavior of the Filtered-X LMS algorithm; *IEEE Trans. Signal Process.*, Vol. 48, No. 4, pp. 1061–1075 (2000)
- [12] O. J. Tobias, J. C. M. Bermudez, R. Seara and N. J. Bershad: An improved model for the second moment behavior of the Filtered-X LMS algorithm; *Proc. IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symp.*, pp. 337–341 (2000)
- [13] M. H. Costa, J. C. M. Bermudez and N. J. Bershad: Stochastic analysis of the Filtered-x LMS algorithm in systems with nonlinear secondary paths; *IEEE Trans. Signal Process.*, Vol. 50, No. 6, pp. 1324–1342 (2002)
- [14] 西森: スピングラス理論と情報統計力学, 岩波書店 (1999)
- [15] H. Nishimori: *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction*, Oxford University Press (2001)
- [16] 田中: 情報通信への情報統計力学的アプローチ: 「たくさんあること」がもたらすもの; 日本神経回路学会誌, Vol. 15, No. 2, pp. 126–135 (2008)
- [17] M. Okada: Notions of associative memory and sparse coding; *Neural Networks*, Vol. 9, No. 8, pp. 1429–1458 (1996)
- [18] Y. Kabashima and D. Saad: Statistical mechanics of error correcting codes; *Europhys. Lett.*, Vol. 45, pp. 97–103 (1999)
- [19] T. Tanaka: A statistical-mechanics approach to largesystem analysis of CDMA multiuser detectors; *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 48, No. 11, pp. 2888–2910 (2002)
- [20] K. Tanaka: Statistical-mechanical approach to image processing; *J. Phys. A.*, Vol. 35, pp. R81–R150 (2002)
- [21] A. Engel and C. V. Broeck: *Statistical Mechanics of Learning*, Cambridge University Press (2001)
- [22] S. Miyoshi and Y. Kajikawa: Statistical-mechanics approach to the Filtered-X LMS algorithm; *Electronics Letters*, Volume 47, Issue 17, pp. 997–999 (2011)
- [23] S. Miyoshi and Y. Kajikawa: Statistical-mechanical analysis of the FXLMS algorithm with actual primary path; *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP2015)*, pp. 3502–3506 (2015)
- [24] N. Ishibushi, Y. Kajikawa and S. Miyoshi: Statistical-mechanical analysis of LMS algorithm for time-varying unknown system; *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 86, No. 2, 024803 (2017)
- [25] S. M. Kuo and D. R. Morgan: *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*, Wiley (1996)
- [26] S. Elliott, I. Stothers and P. Nelson: A multiple error LMS algorithm and its application to the active control of sound and vibration; *IEEE Trans. Speech Acoustics Process.*, Vol. 35, No. 10, pp. 1423–1434 (1987)
- [27] T. K. Yeung and S. F. Yau: Convergence analysis of multichannel ANC system using FXLMS algorithm with inexact secondary path model; *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP2013)*, pp. V-576–V-579 (2003)
- [28] T. Murata, Y. Kajikawa and S. Miyoshi: Statistical-mechanical analysis of the FXLMS algorithm for multiple-channel active noise control; *Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA ASC2017)* (submitted)
- [29] S. Miyoshi and Y. Kajikawa: A theory of the FXLMS algorithm based on statistical-mechanical method; *Proc. The International Symposium on Precision Approach and Performance Based Navigation (ISPA2013)*, pp. 638–643 (2013)

付 録

付録 1. (20) 式の導出

(19) 式を整理すると,

$$\frac{dR_{m,s,j}}{dt} = \mu \left\langle \sum_{m=1}^M e_m(n') \sum_{k=1}^K d_m(n' - k + 1 - j) \tilde{c}_{m,s,k} \right\rangle \quad (\text{A1})$$

となる, (A1) 式の中の平均部分は, (3), (4), (11) 式より

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{m=1}^M e_m(n') \sum_{k=1}^K d_m(n' - k + 1 - j) \tilde{c}_{m,s,k} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{m=1}^M \left(d_m(n') - \sum_{s=1}^S y_{m,s}(n') + \xi_m(n') \right) \sum_{k=1}^K d_m(n' - k + 1 - j) \tilde{c}_{m,s,k} \right\rangle \\ &= \sigma^2 \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \tilde{c}_{m,s,k} \left(\delta_{k+j,1} - \sum_{s=1}^S \sum_{k'=1}^K c_{m,s,k'} R_{m,s,-k'+k+j} \right) \quad (\text{A2}) \end{aligned}$$

であるので, $R_{m,s,j}$ の動的ふるまいを記述する微分方程式を (20) 式のように決定論的な形で導出することができる.

付録 2. (22) 式の導出

$\mathbf{h}$ と $\mathbf{k}$ の更新式 (5), (14) の辺々をかけ合わせると

$$\begin{aligned} & NQ_{s,s',j}(n+1) \\ &= NQ_{s,s',j}(n) + \mu \sum_{m=1}^M e_m(n) \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(n-k+1) \mathbf{k}_{s',j}(n) \tilde{c}_{m,s,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu \sum_{m=1}^M e_m(n) \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(n-k+1-j) \mathbf{h}_s(n) \tilde{c}_{m,s',k} \\
& + \mu^2 \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M e_m(n) e_{m'}'(n) \\
& \times \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K x(n-k+1) x(n-k'+1-j) c_{m,s,k} c_{m',s',k'} \quad (A3)
\end{aligned}$$

となる。つぎに (5) 式の右辺第二項を移行すると

$$\mathbf{h}_s(n) = \mathbf{h}_s(n+1) - \mu \sum_{m=1}^M e_m(n) \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(n-k+1) \tilde{c}_{m,s,k} \quad (A4)$$

が得られる。(A4) 式において $\Delta(n) = \mu \sum_{m=1}^M e_m(n) \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(n-k+1) \tilde{c}_{m,s,k}$ とおく。 $\mathbf{h}$ の時刻ステップをずらしていくことにより

$$\mathbf{h}_s(n) = \begin{cases} \mathbf{h}_s(n+j) - \sum_{k=1}^j \Delta(n+j-k), & j \geq 0 \\ \mathbf{h}_s(n+j) + \sum_{k=1}^{-j} \Delta(n-k), & j < 0 \end{cases} \quad (A5)$$

が得られる。ここで、(23) 式で定義されるステップ関数を用いると (A5) 式を

$$\mathbf{h}_s(n) = \mathbf{h}_s(n+j) - \text{sgn}(j) \sum_{k=1}^{|j|} \Delta(n+\Theta(j)j-k) \quad (A6)$$

と書き換えることができる。(1)-(4), (8), (A6) 式から、(A3) 式の右辺第二項の $\mathbf{x}(n-k+1) \mathbf{k}_{s',j}(n)$ は

$$\begin{aligned}
& \mathbf{x}(n-k+1) \mathbf{k}_{s',j}(n) = \mathbf{x}(n-k+1+j) \mathbf{h}_{s'}(n) \\
& = \mathbf{x}(n+j+1-k) \left(\mathbf{h}_s(n+j+1-k) - \text{sgn}(j+1-k) \right. \\
& \quad \times \sum_{k'=1}^{|j+1-k|} \Delta(n+\Theta(j+1-k)(j+1-k)-k') \Big) \\
& = u(n+\gamma) - \mu \text{sgn}(\gamma) \sum_{k'=1}^{|\gamma|} \sum_{m=1}^M \left(d_m(n+\Theta(\gamma)\gamma-k) \right. \\
& \quad - \sum_{s=1}^S \sum_{k''=1}^K c_{m,s,k''} u_s(n+\Theta(\gamma)\gamma-k-k''+1) \\
& \quad \left. + \xi_m(n+\Theta(\gamma)\gamma-k) \sum_{k''=1}^K \tilde{c}_{m,s,k''} \sigma_{\xi}^2 \right) \quad (A7)
\end{aligned}$$

となる。よって、(1)-(4), (A7) 式より (A3) 式の右辺第二項の平均は

$$\left\langle \mu \sum_{m=1}^M e_m(n) \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(n-k+1) \mathbf{k}_{s',j}(n) \tilde{c}_{m,s,k} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
& = \mu \sigma^2 \sum_{a=1}^M \left(\tilde{c}_{a,s,k} \left(R_{a,s',\gamma} - \sum_{k''=1}^K \sum_{b=1}^S (\tilde{c}_{a,b,k''} Q_{b,s',-k+k''+j}) \right. \right. \\
& \quad - \mu \sigma^2 \text{sgn}(\gamma) \sum_{k'=1}^{|\gamma|} \sum_{d=1}^M \left(\tilde{c}_{d,s',\zeta} \left(\delta_{a,d} \delta_{0,\alpha} \right. \right. \\
& \quad - \sum_{k''=1}^K \sum_{b=1}^S \left(c_{d,b,k''} R_{a,b,\alpha-k''+1} + c_{a,b,k''} \left(R_{d,b,-k''+1-\alpha} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \sum_{k'''=1}^K \sum_{e=1}^S (c_{d,e,k''} Q_{e,b,-k''-\alpha+k''}) \right) \right) \left. \left. \right) \right) + \delta_{d,a} \sigma_{\xi_a}^2 \Big) \Big) \quad (A8)
\end{aligned}$$

となる。同様にして (A3) 式の右辺第三項、第四項も計算することが可能で、 $Q_{s,s',j}$ の動的ふるまいを記述する微分方程式を (22) 式のように決定論的な形で導出することができる。

著者略歴

むらた 朋生 (学生会員)

2016年3月関西大学システム理工学部電気電子情報工学科卒業、同年4月同大学大学院理工学研究科システム理工学専攻電気電子情報工学分野博士課程前期課程に進学し、現在に至る。統計力学的手法を用いた信号処理の解析に従事。

かじ かわ よし のぶ
梶川 嘉延

1993年3月 関西大学大学院工学研究科博士課程前期課程修了。富士通株式会社を経て関西大学工学部に勤務、現在、関西大学システム理工学部電気電子情報工学科教授。音響分野における信号処理、とくにアクティブノイズコントロールに関する研究に従事。博士(工学)。IEEE Senior Member, 電子情報通信学会シニア会員, 日本音響学会, ASA, APSIPA, EURASIP 各会員。

み じょ せい じ
三好 誠司

1988年3月 京都大学大学院工学研究科修士課程電気工学専攻修了。NEC, 神戸市立工業高等専門学校を経て、関西大学システム理工学部に勤務、現在、同大学電気電子情報工学科教授。1998年3月 金沢大学大学院自然科学研究科博士後期課程修了。統計力学的手法などを用いた学習、記憶、情報、信号処理に関する研究に従事。博士(工学)。IEEE Senior Member, 電子情報通信学会シニア会員, 日本物理学会, 日本神経回路学会の会員。