モード遷移確率が時変パラメータに依存する マルコフジャンプ系のゲインスケジュールド 状態フィードバック設計*

柳楽 勇士[†]・松崎 弘樹[†]・細江 陽平[†]・萩原 朋道[†]

Gain Scheduled State Feedback Synthesis for Markovian Jump Systems with Mode Transition Probabilities Depending on Time-Varying Parameters*

Yuji NAGIRA[†], Hiroki MATSUZAKI[†], Yohei HOSOE[†] and Tomomichi HAGIWARA[†]

This paper discusses gain-scheduled state feedback synthesis problems for Markovian jump systems with some time-varying parameters that are available online. In particular, we consider those systems with such time-varying parameters not only in the coefficient matrices but also in the mode transition probability matrices. This paper discusses the stability analysis and synthesis methods of the gain-scheduled state feedback under such a situation that these time-varying parameters are exploited. The effectiveness of the methods is demonstrated through numerical examples.

1. はじめに

確率的スイッチドシステム [1] は, その振舞いについて複数のモードが存在して, それらのモードのうちどれに従うかが時刻ごとに確率的に決まる (したがって時間の経過とともにモードが確率的に切り替わる) ような系である. モードの切り替わり方がマルコフ連鎖によって表現される場合はとくにマルコフジャンプシステム [2] ともよばれる. 確率的スイッチドシステムをモデルとして採用することが有用である例としては, 太陽熱発電システム [2–4] やネットワーク制御システム [5,6] などあげることができる. 確率的スイッチドシステムを対象にした制御理論を発展させることは, これらの実システムの制御性能向上につながるため重要である.

本論文では, マルコフジャンプシステムを取り扱う. とくに, ゲインスケジューリング制御 [7,8] を論じることを念頭に, 系の係数行列 (すなわちモード) およびマルコフ連鎖のモード遷移確率行列が相異なる時変な物理パラメータ θ, η にそれぞれ依存している状況を考える. 先行研究 [9–11] では, 系の係数行列あるいはモード遷移確率行列中に (不確かな) 時不変パラメータを含む場合の

マルコフジャンプ系に対するロバスト安定解析および制御器設計に関する研究がなされており, 本論文の成果は先行研究の拡張とみなすことができる. ただし, 本論文で扱うマルコフ連鎖は時変パラメータ η に依存するため (別の先行研究 [12] と同様に) 非斉次的であり, 斉次的なマルコフ連鎖のみを扱っている上記先行研究とはその取り扱いの容易さの点で議論のレベルが異なることには注意が必要である. 系の動特性が非斉次的なマルコフ連鎖の影響を受ける状況として, たとえば, 「晴れ」や「曇り」などの天気の状態 (モード) の確率的な切り替わりが, 気圧 η の影響を受ける場合などが考えられる. 本論文では, 係数行列に関する時変パラメータ θ とモード遷移確率行列に関する時変パラメータ η の値が各時刻で測定できる状況下で, それらの値を両方利用するゲインスケジュールド状態フィードバックを設計する問題に取り組む.

ゲインスケジューリング制御とは, 制御対象がその性質に影響を及ぼす時変パラメータをもち, その値がオンラインで測定可能であるとき, その情報を陽に利用する制御手法である. このような制御を考えることにより, 通常確定系の議論において実際に時変パラメータが測定できる場合には制御性能の向上を望めることが知られている [7,8]. 先行研究 [12] では, 時変パラメータ θ が存在せず, したがって係数行列がモードのみで一意に定まる状況において, モード遷移確率が時変パラメータ η に依存するようなマルコフジャンプ系に対して, 安定解析およびモードの値を利用しない場合の時不変の, また

* 原稿受付 2018年12月5日

第62回システム制御情報学会研究発表講演会にて発表 (2018年5月)

[†] 京都大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Kyoto University; Kyotodaigaku-Katsura, Nishikyo-ku, Kyoto 615-8510, JAPAN

Key Words: gain scheduling, Markovian jump systems, time-varying transition probabilities.

は利用した場合の時変の（二つの）状態フィードバック設計手法が論じられている。しかし、ゲインスケジュールド状態フィードバックの設計手法は論じられておらず、この点で本論文の議論との間に（係数行列に関する時変パラメータ θ も考慮する点とともに）差がある。そこで、本論文では時変パラメータ η を利用したほうが（利用しない場合と比べて）制御性能が向上することを数値例により検証する。

本論文の構成は以下の通りである。2. では、時変パラメータを有するマルコフジャンプ系と、それに対するゲインスケジュールド状態フィードバック設計問題について述べる。3. では、マルコフジャンプ系とゲインスケジュールド状態フィードバックからなる閉ループ系が安定となる条件を、さらに4. では設計のための条件を導出する。5. では、数値例により本設計手法の有効性を検証する。

本論文で用いる表記は以下の通りである。 $\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_0$ はそれぞれ実数, 自然数, 非負整数全体の集合を表す。 $\|(\cdot)\|$ はベクトル $(\cdot)$ のユークリッドノルムを表す。 $\sigma_{\max}(\cdot)$, $\sigma_{\min}(\cdot)$ は、それぞれ行列 $(\cdot)$ の最大特異値, 最小特異値を表す。 $\mathbf{S}_+^n$ は $n \times n$ の正定行列全体の集合を表す。 $\text{Prob}(T_2|T_1)$ は事象 T_1 が起きたもとで事象 T_2 が起こる（条件付き）確率を表す。 $E[(\cdot)]$, $E[(\cdot)|T]$ はそれぞれ確率変数 $(\cdot)$ の期待値, 事象 T のもとでの確率変数 $(\cdot)$ の条件付き期待値を表す。

2. マルコフジャンプ系とゲインスケジュールド状態フィードバック設計問題

2.1 時変パラメータを有するマルコフジャンプ系 次の離散時間マルコフジャンプ系を考える。

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_{[\sigma_k]}(\theta_k)x_k + B_{[\sigma_k]}u_k, \\ A_{[\sigma]}(\theta) &= \sum_{l=1}^L \theta^{(l)} A_{[\sigma]}^{(l)} \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $x_k \in \mathbf{R}^n$, $u_k \in \mathbf{R}^m$ であり、 $\sigma_k \in \mathcal{S} := \{1, \dots, S\}$ は時刻 k におけるモードを表している。 $\theta_k = [\theta_k^{(1)}, \dots, \theta_k^{(L)}]^T \in \mathbf{R}^L$ は、 x_k から x_{k+1} への遷移に関する時変パラメータを表しており、それは時刻 k における状態遷移行列を（その時刻のモード σ_k とともに）(1) の第2式を通して定めるものとする。 θ_k は（ σ_k と異なり）確定的に変化する時変パラメータである。ここで各モード $s \in \mathcal{S}$ について、端点行列 $A_{[s]}^{(l)}$ ($l=1, \dots, L$) と $B_{[s]}$ は与えられており¹、上記時変パラメータの系列 $(\theta_k)_{k \in \mathbf{N}_0}$ は次の集合に属するものとする。

$$\mathcal{E}^L := \{(\theta_k)_{k \in \mathbf{N}_0} : \theta_k \in \mathbf{E}^L \ (k \in \mathbf{N}_0)\} \quad (2)$$

ただし、 $\mathbf{E}^L$ は以下で定義される。

$$\mathbf{E}^L := \left\{ \theta \in \mathbf{R}^L : \theta^{(l)} \geq 0 \ (l=1, \dots, L), \sum_{l=1}^L \theta^{(l)} = 1 \right\} \quad (3)$$

上記のモード σ_k に関して、本論文では、モード遷移確率が時変な場合を考える。より具体的には、系 (1) 中の時変パラメータ θ_k とは相異なる時変な物理パラメータ $\eta_k = [\eta_k^{(1)}, \dots, \eta_k^{(R)}]^T \in \mathbf{R}^R$ を用いて、時刻 k におけるモード遷移確率行列

$$P_k = P(\eta_k) = \begin{bmatrix} p_{11}(\eta_k) & \cdots & p_{1S}(\eta_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{S1}(\eta_k) & \cdots & p_{SS}(\eta_k) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$p_{is}(\eta_k) := \text{Prob}(\sigma_{k+1} = i | \sigma_k = s) \quad (5)$$

が端点行列

$$P^{(r)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(r)} & \cdots & p_{1S}^{(r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{S1}^{(r)} & \cdots & p_{SS}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (r=1, \dots, R) \quad (6)$$

を用いて以下で与えられるとする。

$$P(\eta) = \sum_{r=1}^R \eta^{(r)} P^{(r)} \quad (7)$$

なお、 $P^{(r)}$ ($r=1, \dots, R$) は確率行列の定義をみたとす、すなわちその各列の成分の総和は 1 であるとする。また、系列 $(\eta_k)_{k \in \mathbf{N}_0}$ は次の集合に属するものとする。

$$\mathcal{E}^R = \{(\eta_k)_{k \in \mathbf{N}_0} : \eta_k \in \mathbf{E}^R \ (k \in \mathbf{N}_0)\} \quad (8)$$

上式中の $\mathbf{E}^R$ は $\mathbf{E}^L$ 中の L を R で置き換えることにより定義される。したがって、 σ_k は時変パラメータ η_k のもとでモード遷移確率行列が (7) 式で与えられるような（非斉次的）マルコフ連鎖上のモードを表す。本論文では、初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ は確定的に与えられているものとする。また、 $\sigma_{-1} \in \mathcal{S}$ および $\eta_{-1} \in \mathbf{E}^R$ （したがって初期モード σ_0 の分布）も確定的に与えられているものとする。

(7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従うマルコフジャンプ系 (1) としての表現が妥当と考えられるものとして、太陽熱発電 [2–4] に関する数理モデルが挙げられる。太陽熱発電システムは、太陽光を（多数の）集光ミラーでボイラに集め集熱し、その熱を利用して蒸気タービンを回転させて発電する設備であり、曇天や雨天、日射の得られない夜間でも蓄熱機構を併用することで発電可能である。以下では、モード σ と時変パラメータ θ, η を用いてモデル化できると考えられるような太陽熱発電システムの一運用形態について触れておく。まずモード σ の例として、「晴れ」や「曇り」といった天気の状態や「夜間」が挙げられる。ここで各モード間の境界づけに

¹系 (1) に関して、 B 行列が A 行列のようにボリトープの形で与えられていない理由については次項の注意 1 で述べる。

関して、「晴れ」と「曇り」は（オンラインで測定可能な）日射量が所定の値を超えるか否かにより区分され、またこれら天気の状態と「夜間」は日の出および入時刻により区分されるとする。つぎに σ とは別に、オンラインで測定可能な θ の例として電力需要量や（ボイラを流れる水の）温度などが挙げられる。すなわち、あらかじめ規定したルールに則り、蓄熱の投入量をそのような θ に応じて定めることとしている運用状況を挙げることができる。またオンラインで測定可能な η の例として、モードの境界づけの際に述べた日射量や（24時間でリセットされる）時刻のほかに、気圧なども挙げられる。現時刻での日射量をもとに次のモードへの遷移確率を定める、または日の入時刻を見て「夜間」への遷移を（確定的に）行うといった非斉次のマルコフ連鎖の性質を、モード遷移確率に関する適切な端点行列を用意することで η により表現できる。このように、モード σ と時変パラメータ θ, η を用いることで系のさまざまな性質の変化を表現することができる。

2.2 ゲインスケジュールド状態フィードバック設計問題

本項では、(7) で記述される非斉次のマルコフ連鎖に従うマルコフジャンプ系 (1) に対するゲインスケジュールド状態フィードバック設計問題について述べる。とくに本論文では、4 種類の状況を考え、それぞれに関して以下の式の形のゲインスケジュールド状態フィードバックを設計する問題に取り組む。

- (i) $[(\sigma, \theta, \eta)$ 利用型ゲインスケジュールド状態フィードバック] $\sigma_k, \theta_k, \eta_k$ の値をすべて利用する状態フィードバック：

$$u_k = K_{[\sigma_k]}(\theta_k, \eta_k)x_k, \\ K_{[\sigma]}(\theta, \eta) = \sum_{l=1}^L \sum_{r=1}^R \theta^{(l)} \eta^{(r)} K_{[\sigma]}^{(l,r)} \quad (9)$$

- (ii) $[(\theta, \eta)$ 利用型ゲインスケジュールド状態フィードバック] σ_k の値を利用できないとしたときの、 θ_k, η_k の値を利用する状態フィードバック：

$$u_k = K(\theta_k, \eta_k)x_k, \\ K(\theta, \eta) = \sum_{l=1}^L \sum_{r=1}^R \theta^{(l)} \eta^{(r)} K^{(l,r)} \quad (10)$$

- (iii) $[(\sigma, \theta)$ 利用型ゲインスケジュールド状態フィードバック] η_k の値を利用できないとしたときの、 σ_k, θ_k の値を利用する状態フィードバック：

$$u_k = K_{[\sigma_k]}(\theta_k)x_k, K_{[\sigma]}(\theta) = \sum_{l=1}^L \theta^{(l)} K_{[\sigma]}^{(l)} \quad (11)$$

- (iv) $[\theta]$ 利用型ゲインスケジュールド状態フィードバック] σ_k, η_k の値を利用できないとしたときの、 θ_k の値を利用する状態フィードバック：

$$u_k = K(\theta_k)x_k, K(\theta) = \sum_{l=1}^L \theta^{(l)} K^{(l)} \quad (12)$$

以下、簡単のため、 (σ, θ, η) 利用型ゲインスケジュールド状態フィードバックを設計する問題を問題 (σ, θ, η) とよぶ。そのほかの設計問題についても同様である。

問題 (σ, θ, η) に関する (9) 式のフィードバックの設計は、その端点 $K_{[\sigma]}^{(l,r)}$ ($\sigma=1, \dots, S; l=1, \dots, L; r=1, \dots, R$) の設計にほかならない（ほかの設計問題の場合も同様である）。そのような設計において仮に端点を $K_{[\sigma]}^{(l,r)} = K^{(l,r)}$ のように $\sigma=1, \dots, S$ に関して共通なものに制約すると、問題 (σ, θ, η) はモード σ_k の値を利用できないと仮定した場合に対する設計問題 (θ, η) に帰着する。同様に、問題 (σ, θ) に関する (11) 式のフィードバックの端点を $K_{[\sigma]}^{(l)} = K^{(l)}$ のように σ に関して共通なものに制約すると、問題 (σ, θ) は問題 (θ) に帰着する。このように、モードの値が利用できないと仮定した問題 (θ, η) , (θ) はそれぞれ問題 (σ, θ, η) , (σ, θ) の特殊ケースであるから、上記四つの問題は問題 (σ, θ, η) , (θ, η) と問題 (σ, θ) , (θ) の二つのグループに分類できる。本論文の議論において、問題 (θ, η) および (θ) に関する設計のための条件式（およびその前段階で導かれる条件式）はそれぞれ問題 (σ, θ, η) および (σ, θ) に関するそれらの特殊ケースとして直ちに得られるので、以降では原則的にはモード σ_k の値を利用する場合の問題 (σ, θ, η) および (σ, θ) を中心に取り組む。

ここで、この二つの問題に関して、(9) 式のフィードバックの端点を $K_{[\sigma]}^{(l,r)} = K_{[\sigma]}^{(l)}$ のように $r=1, \dots, R$ （すなわち η に関する端点）に関して共通なものに制約すると、問題 (σ, θ, η) は状態フィードバックが時変パラメータ η_k の値を利用できないと仮定した問題 (σ, θ) に帰着する。ところが、本論文では問題 (σ, θ, η) とその特殊ケースである問題 (σ, θ) に独立に取り組む。 (σ, θ, η) 利用型ゲインスケジュールド状態フィードバック (9) と系 (1) からなる閉ループ系は

$$x_{k+1} = A_{cl[\sigma_k]}(\theta_k, \eta_k)x_k, \\ A_{cl[\sigma_k]}(\theta_k, \eta_k) = A_{[\sigma_k]}(\theta_k, \eta_k) + B_{[\sigma_k]}K_{[\sigma_k]}(\theta_k, \eta_k) \quad (13)$$

（および (7)）で与えられ、このときの $A_{cl[\sigma]}(\theta, \eta)$ は以下で表せる。

$$A_{cl[\sigma]}(\theta, \eta) = \sum_{l=1}^L \sum_{r=1}^R \theta^{(l)} \eta^{(r)} A_{cl[\sigma]}^{(l,r)}, \\ A_{cl[\sigma]}^{(l,r)} = A_{[\sigma]}^{(l)} + B_{[\sigma]}K_{[\sigma]}^{(l,r)} \quad (14)$$

一方で、 (σ, θ) 利用型ゲインスケジュールド状態フィードバック (11) と系 (1) からなる閉ループ系は

$$x_{k+1} = A_{cl[\sigma_k]}(\theta_k)x_k, \\ A_{cl[\sigma_k]}(\theta_k) = A_{[\sigma_k]}(\theta_k) + B_{[\sigma_k]}K_{[\sigma_k]}(\theta_k) \quad (15)$$

(および (7)) で与えられ、このときの $A_{cl[\sigma]}(\theta)$ は以下で表せる.

$$A_{cl[\sigma]}(\theta) = \sum_{l=1}^L \theta^{(l)} A_{cl[\sigma]}^{(l)}, \quad A_{cl[\sigma]}^{(l)} = A_{[\sigma]}^{(l)} + B_{[\sigma]} K_{[\sigma]}^{(l)} \quad (16)$$

ここで、系 (13) と (15) の係数行列を比べてみると、前者は ((1) の系および) 後者と異なり η_k にも依存する. 本論文の議論において、問題 (σ, θ) に関して導かれる設計のための条件式は、結果として問題 (σ, θ, η) に関して導かれるものの特殊ケースに一致するものとなる. しかし、その前段階の解析に関する条件式の導出に関しては、(詳しくは 3.2 項で述べるが) 上述した η_k に関する相違により単純に特殊ケースとしてみるものが適切でないような問題が生じる. そこで、問題 (σ, θ, η) (および (θ, η)) と (σ, θ) (および (θ)) は独立に取り組む.

なお、参考文献 [12] では、本論文における (7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従うマルコフジャンプ系 (1) の係数行列に含まれる時変パラメータ θ_k が “ない” (すなわち、 $L=1$ とした) 場合の系が扱われている. そして、モード遷移確率行列に含まれる時変パラメータ η_k の値を利用できないとしたときの、モード σ_k の値を利用する場合としない場合の 2 種類の状態フィードバック設計問題 (問題 (σ, θ) , (θ) に対応するが、 $L=1$ より θ も実質的には存在しない、すなわちつねに $\theta_k=1$ のときの問題) への取り組みがなされている. 実は、本論文で導出する設計のための条件で $L=1$ に限定したものは上記文献と比べていずれも保守的なものになっている. したがって、もし上記文献のアイデアを $L>1$ の場合でも適用することができれば、本論文で与える条件式よりもさらに保守性の低いものが得られると期待されるが、本論文ではそのような θ に関する議論よりはむしろ上記文献が考察しなかった η に関するゲインスケジューリング制御手法に関心があり、そこに焦点をあてて議論を行う.

以降では、系列 $(\theta_k)_{k \in \mathbf{N}_0}$ および $(\eta_k)_{k \in \mathbf{N}_0}$ をそれぞれ θ, η と表記する. (7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系 (13) および閉ループ系 (15) の大域的 2 次平均指数安定性の定義を以下で与える [14].

【定義 1】 時変パラメータの系列 $\theta \in \mathcal{E}^L$ と $\eta \in \mathcal{E}^R$ をもち後者と (7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系 (13) は (あるいは、時変パラメータの系列 $\theta \in \mathcal{E}^L$ をもち $\eta \in \mathcal{E}^R$ と (7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系 (15) は)、次式を満たす $a > 0, \lambda \in (0, 1)$ が存在するとき、大域的 2 次平均指数安定であるという.

$$\sqrt{E[\|x_k\|^2]} \leq a \lambda^k \|x_0\| \quad (\forall k \in \mathbf{N}_0; \forall x_0 \in \mathbf{R}^n; \forall \sigma_{-1} \in \mathcal{S}) \quad (17)$$

上記定義から明らかなように、 λ は系列 $\sqrt{E[\|x_k\|^2]}$

($k \in \mathbf{N}_0$) の収束率の上界を与える.

(注意 1) 本論文において、系 (1) の B 行列を A 行列と同じようなポリトープの形で与えていないのは、設計対象のフィードバック (9)–(12) のいずれについても θ_k を利用するものを考えたいからである. 仮に B 行列をポリトープの形で与えた場合には、たとえば $A_{cl[\sigma_k]}(\theta_k, \eta_k)$ の端点行列を (14) 式の形で表せなくなるが、このような場合の解析および設計手法は著者らの知る限り現時点において (確定系に対してさえ) 十分に研究が進んでいない. そこで、本論文でも参考文献 [13] と同じく θ_k に依存しない B 行列をもつ系を議論の対象とした.

3. 閉ループ系の安定条件

前節では、時変パラメータ θ_k (または θ_k と η_k) をもち時変パラメータ η_k と (7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系とその安定性の定義について述べた. 本節では、ゲインスケジュールド状態フィードバックに関する端点行列がすべて与えられている場合の閉ループ系の安定性について論じる.

3.1 写像を用いた安定条件

参考文献 [12] では、与えられた時変パラメータの系列 $\eta \in \mathcal{E}^R$ と (7) に従う閉ループ系 (13) で $L=1$ の場合について、その安定性を「任意の $x_0 \in \mathbf{R}^n, \sigma_{-1} \in \mathcal{S}$ に対して $E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2 \right] < \infty$ が成り立つこと」として定義している. そのうえで、Lyapunov 行列を構成するうえで重要となる S 個の写像 $J_{[s]}: \mathbf{E}^R \rightarrow \mathbf{S}_+^n$ (より正確には、そのような写像¹を構成する際に用いる有限個の端点行列) を用いて安定性の十分条件が導出されている. また、参考文献 [15] では、閉ループ系 (13) で $L=R=1$ の場合 (したがって、閉ループ系 (15) で $L=1$ の場合) で $R=1$ とした (7) (ただし $P^{(1)}$ のすべての列は同じ値をとるものとする²) に従うときについて、その安定性を定義 1 により定めよう. モードの値に依存しない時不変な Lyapunov 行列と関連する単一の Lyapunov 不等式を用いて安定性の必要十分条件が与えられている. 上記において、 $L=1$ および $R=1$ のとき、時変パラメータの系列 θ, η はそれぞれ ($\theta_k=1$ ($\forall k$), $\eta_k=1$ ($\forall k$) として) 固定されることに注意されたい. 本項では、上記二つの文献の議論を参考に、系列 $\theta \in \mathcal{E}^L, \eta \in \mathcal{E}^R$ が与えられた状況で S 個の写像 $J_{[s]}: \mathbf{E}^L \times \mathbf{E}^R \rightarrow \mathbf{S}_+^n$ を考え、(7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系 (13) が大域的 2 次平均指数安定であるための十分条件

¹ 1 項で取り扱う (29) 式で $L=1$ としたものに相当する.

² $P^{(1)}$ が定義できる前提として、 σ_k は本論文の議論にあるように一般に有限個の (確定) 値をとることが仮定される. 参考文献 [15] は、より正確には、無限個の値をとる σ_k を有するものも考察の対象としていることを付記しておく.

を与える以下の定理を示す. なお, この定理 (あるいは以降の議論) 中の “引数つき” の $J_{[s]}(\theta_k, \eta_k)$ ($= J_{[s]k}$) は写像ではなく, θ_k および η_k を与えたときの (値としての) Lyapunov 行列を表すことに注意されたい.

【定理 1】 時変パラメータの系列 $\theta \in \mathcal{E}^L$ と $\eta \in \mathcal{E}^R$ をもち後者と (7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系 (13) は, 次式を満たす写像 $J_{[s]}: \mathbf{E}^L \times \mathbf{E}^R \rightarrow \mathbf{S}_+^n$ ($s=1, \dots, S$) と $\lambda \in (0, 1)$, $\epsilon > 0$ が存在すれば, 大域的 2 次平均指数安定である.

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 J_{[s]k} & * \\ \bar{J}_{[s]k+1} A_{\text{cl}[s]k} & \bar{J}_{[s]k+1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\forall s \in \mathcal{S}; \forall k \in \mathbf{N}_0) \quad (18)$$

$$J_{[s]k} \geq \epsilon I \quad (\forall s \in \mathcal{S}; \forall k \in \mathbf{N}_0) \quad (19)$$

ただし, $A_{\text{cl}[s]k} = A_{\text{cl}[s]}(\theta_k, \eta_k)$, $J_{[s]k} = J_{[s]}(\theta_k, \eta_k)$,

$$\bar{J}_{[s]k+1} := \sum_{i=1}^S p_{is}(\eta_k) J_{[i]k+1} \quad (20)$$

であり, (18) 式中の $*$ は行列の左下ブロックの転置を表す.

(証明) $\bar{J}_{[s]k+1} \in \mathbf{S}_+^n$ となることに注意して, (18) 式は Schur の補題 [16,17] より次式と等価である.

$$\lambda^2 J_{[s]k} - A_{\text{cl}[s]k}^T \bar{J}_{[s]k+1} A_{\text{cl}[s]k} \geq 0 \quad (\forall s \in \mathcal{S}; \forall k \in \mathbf{N}_0) \quad (21)$$

上式で各 k ごとに s を σ_k で置き換えることで次式を得る.

$$\lambda^2 J_k - A_{\text{cl}k}^T \bar{J}_{[\sigma_k]k+1} A_{\text{cl}k} \geq 0 \quad (\forall k \in \mathbf{N}_0) \quad (22)$$

ただし, $A_{\text{cl}k} := A_{\text{cl}[\sigma_k]k}$, $J_k := J_{[\sigma_k]k}$ とおいた. 上式中の $\bar{J}_{[\sigma_k]k+1}$ は (20) 式より以下のように計算される.

$$\begin{aligned} \bar{J}_{[\sigma_k]k+1} &= \sum_{i=1}^S p_{i\sigma_k}(\eta_k) J_{[i]k+1} \\ &= \sum_{\sigma_{k+1}=1}^S p_{\sigma_{k+1}\sigma_k}(\eta_k) J_{k+1} \\ &= E[J_{k+1} | \sigma_k] \end{aligned} \quad (23)$$

上式二行目は表記に関して i を σ_{k+1} と置き換えることにより得られる. このことに注意して (22) の辺々の事象 σ_k のもとでの条件付き期待値をとることで, 次式が成り立つ.

$$E[\lambda^2 J_k - A_{\text{cl}k}^T J_{k+1} A_{\text{cl}k} | \sigma_k] \geq 0 \quad (\forall k \in \mathbf{N}_0) \quad (24)$$

上式より, 任意の $k \in \mathbf{N}_0$ に関して次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} &E[x_{k+1}^T J_{k+1} x_{k+1}] \\ &= E[E[x_{k+1}^T J_{k+1} x_{k+1} | \sigma_k]] \\ &= E[E[x_k^T A_{\text{cl}k}^T J_{k+1} A_{\text{cl}k} x_k | \sigma_k]] \\ &= E[x_k^T E[A_{\text{cl}k}^T J_{k+1} A_{\text{cl}k} | \sigma_k] x_k] \\ &\leq E[\lambda^2 x_k^T E[J_k | \sigma_k] x_k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda^2 E[E[x_k^T J_k x_k | \sigma_k]] \\ &= \lambda^2 E[x_k^T J_k x_k] \end{aligned} \quad (25)$$

(25) の三つ目および四つ目の等号は, x_k の値が $\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}$ (および与えられた $x_0, \theta_0, \dots, \theta_{k-1}, \eta_0, \dots, \eta_{k-1}$) によって定まることから成立する. 上式を k に関して再帰的に繰り返すと, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} E[x_k^T J_k x_k] &\leq \lambda^{2k} E[x_0^T J_0 x_0] \\ &\leq \lambda^{2k} \sigma_{\max}(E[J_0]) \|x_0\|^2 \end{aligned} \quad (26)$$

一方, (19) 式より明らかに

$$E[J_k | \sigma_k] = E[J_{[\sigma_k]k} | \sigma_k] = J_{[\sigma_k]k} \geq \epsilon I \quad (\forall k \in \mathbf{N}_0) \quad (27)$$

であるから, 次式が成り立つ.

$$E[x_k^T J_k x_k] \geq \epsilon E[\|x_k\|^2] \quad (\forall k \in \mathbf{N}_0) \quad (28)$$

(26), (28) 式より $a = \sqrt{\sigma_{\max}(E[J_0])/\epsilon}$ のもとで (17) 式が成り立つ. $\square$

また, 上と同様の証明によって, (7) に従う閉ループ系 (15) が大域的 2 次平均指数安定であるための十分条件を与える以下の系が示せる.

【系 1】 時変パラメータの系列 $\theta \in \mathcal{E}^L$ をもち系列 $\eta \in \mathcal{E}^R$ と (7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系 (15) は, (18), (19) 式を満たす写像 $J_{[s]}: \mathbf{E}^L \times \mathbf{E}^R \rightarrow \mathbf{S}_+^n$ ($s=1, \dots, S$) と $\lambda \in (0, 1)$, $\epsilon > 0$ が存在すれば, 大域的 2 次平均指数安定である.

なお, 定理 1 と系 1 (およびそれらの証明) の唯一の違いは, $A_{\text{cl}[s]k}$ を前者では $A_{\text{cl}[s]}(\theta_k, \eta_k)$ と, 後者では $A_{\text{cl}[s]}(\theta_k)$ と見ているところにある.

3.2 端点行列を用いた安定条件

前項では, 定理 1 および系 1 で S 個の写像を用いた安定条件を導出した. しかしながら, (18), (19) 式をそのまま設計に関する安定条件に用いることは困難である. 以降では, この難点を避けるとともに, 任意の系列 $\theta \in \mathcal{E}^L$ および $\eta \in \mathcal{E}^R$ に関して安定性を保証するような (つまりロバスト安定性を保証するような) 条件式を導くことを考える. 各 s に関して写像 $J_{[s]}: \mathbf{E}^L \times \mathbf{E}^R \rightarrow \mathbf{S}_+^n$ の形を LR 個の端点行列 $J_{[s]}^{(l,r)} \in \mathbf{S}_+^n$ ($l=1, \dots, L; r=1, \dots, R$) を用いて次のものに制限する.

$$J_{[s]}(\theta, \eta) = \sum_{l=1}^L \sum_{r=1}^R \theta^{(l)} \eta^{(r)} J_{[s]}^{(l,r)} \quad (29)$$

本項では, 上記端点行列および補助変数を用いて, 問題 (σ, θ, η) およびその特殊ケースである問題 (σ, θ) における設計に関する条件式をそれぞれ導出する.

まずは, 問題 (σ, θ, η) に関する安定条件を導出する. 定理 1 中の (18) 式は, 遷移確率 $p_{is}(\eta_k)$ と係数行列 $A_{\text{cl}[s]}(\theta_k, \eta_k)$ の積を含むが, それらは共通のパラメータ η_k に依存する. このような状況は端点行列を用いた条

件式を導出するうえで不都合となる．より具体的には，(18), (20) 式に関連する $L^2 R^2 S$ 個の端点行列を用いた条件式

$$\left[\begin{array}{cc} \lambda^2 J_{[s]}^{(l_1, r_1)} & * \\ \left(\sum_{i=1}^S p_{is}^{(r_1)} J_{[i]}^{(l_2, r_2)} \right) A_{cl[s]}^{(l_1, r_1)} & \sum_{i=1}^S p_{is}^{(r_1)} J_{[i]}^{(l_2, r_2)} \end{array} \right] \geq 0$$

$$(s=1, \dots, S; l_1=1, \dots, L; l_2=1, \dots, L; r_1=1, \dots, R; r_2=1, \dots, R) \quad (30)$$

を考える．上記の端点行列 $J_{[s]}^{(l, r)}$ に注目して，上式の両辺に対して $\theta_k^{(l_1)}$, $\theta_{k+1}^{(l_2)}$, $\eta_k^{(r_1)}$, $\eta_{k+1}^{(r_2)}$ をかけ， $l_1=1, \dots, L$, $l_2=1, \dots, L$, $r_1=1, \dots, R$, $r_2=1, \dots, R$ に関して和をとる．このとき得られる条件式中の行列の (1,1) および (2,2) ブロックは (18) 式中の行列の対応するブロックと一致するが，その他のブロックに関しては一致しないことが確かめられる．そこで，この不都合を回避するために参考文献 [13, 18] のアイデアを活用して， SLR 個の補助変数 $G_{[s]}^{(l, r)}$ を導入する．このとき，次の補題が成り立つ．

【補題 1】 次式を満たす $J_{[s]}^{(l, r)} \in \mathbf{S}_+^n$, $G_{[s]}^{(l, r)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ($s=1, \dots, S; l=1, \dots, L; r=1, \dots, R$) および $\lambda \in (0, 1)$ が存在すれば，任意の系列 $\theta \in \mathcal{E}^L$ および $\eta \in \mathcal{E}^R$ に関して，(7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系 (13) は大域的 2 次平均指数安定である．

$$\left[\begin{array}{cc} \lambda^2 J_{[s]}^{(l_1, r_1)} & * \\ G_{[s]}^{(l_2, r_2)} A_{cl[s]}^{(l_1, r_1)} & M_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} \end{array} \right] \geq 0 \quad (s=1, \dots, S; l_1=1, \dots, L; l_2=1, \dots, L; r_1=1, \dots, R; r_2=1, \dots, R) \quad (31)$$

ただし， $M_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)}$ は以下で与えられる．

$$M_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} := G_{[s]}^{(l_2, r_2)} + G_{[s]}^{(l_2, r_2)T} - \sum_{i=1}^S p_{is}^{(r_1)} J_{[i]}^{(l_2, r_2)} \quad (32)$$

(証明) 系列 $\theta \in \mathcal{E}^L$, $\eta \in \mathcal{E}^R$ をそれぞれ一つずつとる．(31) 式の両辺に $\theta_k^{(l_1)}$, $\theta_{k+1}^{(l_2)}$, $\eta_k^{(r_1)}$, $\eta_{k+1}^{(r_2)}$ をかけ， $l_1=1, \dots, L$, $l_2=1, \dots, L$, $r_1=1, \dots, R$, $r_2=1, \dots, R$ に関して和をとる．このとき，(31) 式中の $M_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)}$ の $J_{[i]}^{(l_2, r_2)}$ に関する項の部分が

$$\begin{aligned} & \sum_{r_1=1}^R \sum_{r_2=1}^R \sum_{l_2=1}^L \eta_k^{(r_1)} \eta_{k+1}^{(r_2)} \theta_{k+1}^{(l_2)} \left(\sum_{i=1}^S p_{is}^{(r_1)} J_{[i]}^{(l_2, r_2)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^S \left(\sum_{r_1=1}^R \eta_k^{(r_1)} p_{is}^{(r_1)} \right) \cdot \left(\sum_{l_2=1}^L \sum_{r_2=1}^R \theta_{k+1}^{(l_2)} \eta_{k+1}^{(r_2)} J_{[i]}^{(l_2, r_2)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^S p_{is}(\eta_k) J_{[i]}(\theta_{k+1}, \eta_{k+1}) = \sum_{i=1}^S p_{is}(\eta_k) J_{[i]k+1} \\ &= \bar{J}_{[s]k+1} \end{aligned} \quad (33)$$

と計算され，結果として (20) 式で記述される $\bar{J}_{[s]k+1}$ と等価になることに注意すると，次式が得られる．

$$\left[\begin{array}{cc} \lambda^2 J_{[s]k} & * \\ G_{[s]k+1} A_{cl[s]k} & M_{[s]k+1} \end{array} \right] \geq 0 \quad (\forall s \in \mathcal{S}; \forall k \in \mathbf{N}_0) \quad (34)$$

ただし， $A_{cl[s]k} = A_{cl[s]}(\theta_k, \eta_k)$, $J_{[s]k} = J_{[s]}(\theta_k, \eta_k)$ であり， $G_{[s]k+1}$, $M_{[s]k+1} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ は次式で与えられる．

$$G_{[s]k+1} = \sum_{l=1}^L \sum_{r=1}^R \theta_{k+1}^{(l)} \eta_{k+1}^{(r)} G_{[s]}^{(l, r)}$$

$$M_{[s]k+1} = G_{[s]k+1} + G_{[s]k+1}^T - \bar{J}_{[s]k+1} \quad (35)$$

(34) 式に対して左から $[I, -A_{cl[s]k}^T]$ を，右からその転置をかけると (21) 式を得るが，この式は Schur の補題より (18) 式と等価である．また， $J_{[s]}^{(l, r)} \in \mathbf{S}_+^n$ であることに注意して， $J_{[s]k} = J_{[s]}(\theta_k, \eta_k)$ に関して (29) より次が成り立つ．

$$J_{[s]k} = \sum_{l=1}^L \sum_{r=1}^R \theta_k^{(l)} \eta_k^{(r)} J_{[s]}^{(l, r)}$$

$$\geq \epsilon \sum_{l=1}^L \sum_{r=1}^R \theta_k^{(l)} \eta_k^{(r)} I = \epsilon I \quad (36)$$

ただし， $\epsilon := \min_{s=1, \dots, S, l=1, \dots, L, r=1, \dots, R} \sigma_{\min}(J_{[s]}^{(l, r)}) > 0$ である．したがって，定理 1 より系列 $\theta \in \mathcal{E}^L$ と $\eta \in \mathcal{E}^R$ をもち後者と (7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系 (13) は大域的 2 次平均指数安定である．上記議論は，任意の系列 $\theta \in \mathcal{E}^L$ および $\eta \in \mathcal{E}^R$ に関して成り立つので題意は示された．□

補題 1 により， $L^2 R^2 S$ 個（すなわち有限個）の不等式からなる安定条件が導かれた．なお，(31) 式中の $\lambda \in (0, 1)$ は (17) 式中の λ に対応するものであり，安定性の指標となっている． λ を定数とみると (31) 式は線形行列不等式になることに注意すると，(λ に関する) 2 分法により λ を最小化することができる．

つぎに，問題 (σ, θ) に関して，(7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系 (15) の安定条件を導出する．系 1 中の (18) 式（この式は $A_{cl[s]k} = A_{cl[s]}(\theta_k)$ とみていることに注意）について考えると， $p_{is}(\eta_k)$ と $A_{cl[s]}(\theta_k)$ が共通の時変パラメータに依存しないので，補題 1 の場合と異なり，補助変数を導入することなく，ただちに次の補題が成り立つ．

【補題 2】 次式を満たす $J_{[s]}^{(l, r)} \in \mathbf{S}_+^n$ ($s=1, \dots, S; l=1, \dots, L; r=1, \dots, R$) と $\lambda \in (0, 1)$ が存在すれば，任意の系列 $\theta \in \mathcal{E}^L$, $\eta \in \mathcal{E}^R$ に関して，(7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系 (15) は大域的 2 次平均指数安定である．

$$\left[\begin{array}{cc} \lambda^2 J_{[s]}^{(l_1, r_1)} & * \\ \left(\sum_{i=1}^S p_{is}^{(r_1)} J_{[i]}^{(l_2, r_2)} \right) A_{cl[s]}^{(l_1)} & \sum_{i=1}^S p_{is}^{(r_1)} J_{[i]}^{(l_2, r_2)} \end{array} \right] \geq 0$$

$$(s=1, \dots, S; l_1=1, \dots, L; l_2=1, \dots, L;$$

$$r_1 = 1, \dots, R; r_2 = 1, \dots, R) \quad (37)$$

さらに、ここでも参考文献 [13, 18] のアイデアを活用して、 SLR^2 個の補助変数 $G_{[s]}^{(l, r_1, r_2)}$ を用いた次の系が成り立つ。

【系 2】 与えられた $J_{[s]}^{(l, r)} \in \mathbf{S}_+^n$ ($s = 1, \dots, S; l = 1, \dots, L; r = 1, \dots, R$) と $\lambda \in (0, 1)$ のもとで、次の 2 条件は等価である。

(i) (37) 式が成り立つ。

(ii) 次式を満たす $G_{[s]}^{(l, r_1, r_2)}$ ($s = 1, \dots, S; l = 1, \dots, L; r_1 = 1, \dots, R; r_2 = 1, \dots, R$) が存在する。

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 J_{[s]}^{(l_1, r_1)} & * \\ G_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} A_{\text{cl}[s]}^{(l_1)} \widetilde{M}_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (38)$$

$$(s = 1, \dots, S; l_1 = 1, \dots, L; l_2 = 1, \dots, L; r_1 = 1, \dots, R; r_2 = 1, \dots, R)$$

ただし、 $\widetilde{M}_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)}$ は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} & \widetilde{M}_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} \\ & := G_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} + G_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)T} - \sum_{i=1}^S p_{is}^{(r_1)} J_{[i]}^{(l_2, r_2)} \end{aligned} \quad (39)$$

η の情報を利用しない問題 (σ, θ) の設計に関する条件式として、問題 (σ, θ, η) に関する補題 1 中の (31) 式の $A_{\text{cl}[s]}^{(l_1, r_1)}$ を $A_{\text{cl}[s]}^{(l_1)}$ と単に置き換えることにより得られる次式も考えられる。

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 J_{[s]}^{(l_1, r_1)} & * \\ G_{[s]}^{(l_2, r_2)} A_{\text{cl}[s]}^{(l_1)} M_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (s = 1, \dots, S; l_1 = 1, \dots, L; l_2 = 1, \dots, L; r_1 = 1, \dots, R; r_2 = 1, \dots, R) \quad (40)$$

ところが上式は (38) 式中の補助変数 $G_{[s]}^{(l_1, r_1, r_2)}$ を $r_1 = 1, \dots, R$ に関して制約したものになってしまっている。したがって、問題 (σ, θ) の設計に関する不等式条件を問題 (σ, θ, η) の特殊ケースとして導出しようとする、補助変数に不要な制約を課すことになってしまうので、問題 (σ, θ) (および (θ)) については (31) 式ではなく、(37) 式を使って解析するべきである。このような理由から、本論文では問題 (σ, θ, η) と問題 (σ, θ) にそれぞれ独立に取り組んでいる。

4. ゲインスケジュールド状態フィードバック設計

前節では、フィードバックゲインの端点が与えられているとして、(7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系 (13) および閉ループ系 (15) の安定条件について述べた。本節では、それらの閉ループ系を安定化するゲインスケジュールド状態フィードバックを設計する問題 (σ, θ, η) , (σ, θ) とそれらの特殊ケースである問題 (θ, η) , (θ) にそれぞれ取り組む。

まず、問題 (σ, θ, η) に取り組むため、対応する安定条件

(31) について考える。(31) 式の左辺の (1, 2) ブロックは $G_{[s]}^{(l_2, r_2)} A_{\text{cl}[s]}^{(l_1, r_1)} = G_{[s]}^{(l_2, r_2)} A_{[s]}^{(l_1)} + G_{[s]}^{(l_2, r_2)} B_{[s]} K_{[s]}^{(l_1, r_1)}$ となるので、この安定条件を状態フィードバックの設計のための条件式としてとらえ直したものは、 $G_{[s]}^{(l_2, r_2)}$ と $K_{[s]}^{(l_1, r_1)}$ に関して双線形になる。そこで、(31) 式の左辺の (2, 2) ブロックの正定性から $G_{[s]}^{(l, r)}$ が正則であることに注意して、(31) 式の右から $\text{diag}((G_{[s]}^{(l_1, r_1)})^{-1}, (G_{[s]}^{(l_2, r_2)})^{-1})$, 左からその転置をかける合同変換を行うと次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 (G_{[s]}^{(l_1, r_1)})^{-1} J_{[s]}^{(l_1, r_1)} (G_{[s]}^{(l_1, r_1)})^{-T} & * \\ (A_{[s]}^{(l_1)} + B_{[s]} K_{[s]}^{(l_1, r_1)}) (G_{[s]}^{(l_1, r_1)})^{-T} & N_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$(s = 1, \dots, S; l_1 = 1, \dots, L; l_2 = 1, \dots, L; r_1 = 1, \dots, R; r_2 = 1, \dots, R) \quad (41)$$

ただし、 $N_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)}$ は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} N_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} &= (G_{[s]}^{(l_2, r_2)})^{-1} + (G_{[s]}^{(l_2, r_2)})^{-T} \\ &\quad - \sum_{i=1}^S p_{is}^{(r_1)} (G_{[s]}^{(l_2, r_2)})^{-1} L_{[i]}^{(l_2, r_2)} (G_{[s]}^{(l_2, r_2)})^{-T} \end{aligned} \quad (42)$$

(41) 式に対して、変数変換 $Y_{[s]}^{(l, r)} = K_{[s]}^{(l, r)} (G_{[s]}^{(l, r)})^{-T}$ を施せば、 G と K に関する双線形項を除去することができる。しかしながら、(41) 式にはまだ変数変換に関する別の問題が残されており、 $N_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)}$ 中の $(G_{[s]}^{(l_2, r_2)})^{-1} L_{[i]}^{(l_2, r_2)} (G_{[s]}^{(l_2, r_2)})^{-T}$ という項を $X_{[i, s]}^{(l_2, r_2)}$ として単純に合同変数変換することを考えたときに、変換後の $X_{[i, s]}^{(l_2, r_2)}$ から s に依存しない $J_{[i]}^{(l_2, r_2)}$ を定めることが必ずしもできない。この問題を解消するために、補助変数の s に関する自由度を制約して $G_{[s]}^{(l, r)} = G^{(l, r)}$ ($s = 1, \dots, S$) を用いた合同変換に留めることを考える。このとき、 $V^{(l, r)} = (G^{(l, r)})^{-T}$ として、変数変換 $X_{[s]}^{(l, r)} = (G^{(l, r)})^{-1} J_{[s]}^{(l, r)} (G^{(l, r)})^{-T}$, $Y_{[s]}^{(l, r)} = K_{[s]}^{(l, r)} V^{(l, r)}$ を行うことにより、(41) 式から次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 X_{[s]}^{(l_1, r_1)} & * \\ A_{[s]}^{(l_1)} V^{(l_1, r_1)} + B_{[s]} Y_{[s]}^{(l_1, r_1)} & \hat{N}_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (43)$$

$$(s = 1, \dots, S; l_1 = 1, \dots, L; l_2 = 1, \dots, L; r_1 = 1, \dots, R; r_2 = 1, \dots, R)$$

ただし、 $\hat{N}_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} = V^{(l_2, r_2)} + V^{(l_2, r_2)T} - \sum_{i=1}^S p_{is}^{(r_1)} X_{[i]}^{(l_2, r_2)}$

である。このとき、次の定理を得る。

【定理 2】 (43) 式を満たす $X_{[s]}^{(l, r)} \in \mathbf{S}_+^n$, $Y_{[s]}^{(l, r)} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ($s = 1, \dots, S; l = 1, \dots, L; r = 1, \dots, R$), $V^{(l, r)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ($l = 1, \dots, L; r = 1, \dots, R$) および $\lambda \in (0, 1)$ が存在すれば、任意の系列 $\theta \in \mathcal{E}^L$ および $\eta \in \mathcal{E}^R$ に関して (7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う閉ループ系 (13) が大域的 2 次平均指数安定となるような (9) 式のフィードバックが存在する。とくに $K_{[s]}^{(l, r)} = Y_{[s]}^{(l, r)} (V^{(l, r)})^{-1}$ ($s = 1, \dots, S; l = 1, \dots, L; r = 1, \dots, R$) はそのようなフィード

バックゲインの端点の組のひとつである。

$\lambda \in (0, 1)$ を固定すると (43) 式は線形行列不等式になり、この式を満たす解を探索することにより所望のフィードバックを設計することができる。また、問題 (θ, η) に関する設計のための条件式は、 $K^{(l,r)}$ を求めることから (43) 式の $Y_{[s]}^{(l,r)}$ を $Y^{(l,r)}$ と置き換えることで得られ、対応する状態フィードバックゲインの端点の組のひとつも、 $K^{(l,r)} = Y^{(l,r)}(V^{(l,r)})^{-1}$ ($l=1, \dots, L; r=1, \dots, R$) で与えられる。

つぎに、問題 (σ, θ) に取り組むため、対応する安定条件 (38) について考える。(38) 式の左辺の (2,2) ブロックの正定性から $G_{[s]}^{(l_1, r_1, r_2)}$ が正則であることに注意して、(38) 式の左から $\text{diag}((G_{[s]}^{(l_1, r_1, r_2)})^{-1}, (G_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)})^{-1})$ と右からその転置をかける合同変換を行ったとすると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 (G_{[s]}^{(l_1, r_1, r_2)})^{-1} J_{[s]}^{(l_1, r_1)} (G_{[s]}^{(l_1, r_1, r_2)})^{-T} & * \\ (A_{[s]}^{(l_1)} + B_{[s]} K_{[s]}^{(l_1)}) (G_{[s]}^{(l_1, r_1, r_2)})^{-T} & \tilde{N}_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$(s=1, \dots, S; l_1=1, \dots, L; l_2=1, \dots, L; r_1=1, \dots, R; r_2=1, \dots, R) \quad (44)$$

ただし、 $\tilde{N}_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)}$ は以下で与えられる。

$$\tilde{N}_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)} = (G_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)})^{-1} + (G_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)})^{-T} - \sum_{i=1}^S p_{is}^{(r_1)} (G_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)})^{-1} J_{[i]}^{(l_2, r_2)} (G_{[s]}^{(l_2, r_1, r_2)})^{-T} \quad (45)$$

ここで、問題 (σ, θ, η) のときと同様にして適切な合同変換を行うようにするために上式中の補助変数の自由度を制約する。より具体的には、 $G_{[s]}^{(l, r_1, r_2)} = G^{(l)}$ ($s=1, \dots, S; r_1=1, \dots, R; r_2=1, \dots, R$) を用いた合同変換に留めることを考える。このとき、 $V^{(l)} = (G^{(l)})^{-T}$ として変数変換 $X_{[s]}^{(l,r)} = (G^{(l)})^{-1} J_{[s]}^{(l,r)} (G^{(l)})^{-T}$, $Y_{[s]}^{(l)} = K_{[s]}^{(l)} V^{(l)}$ を行うことにより、(44) 式から、(43) 式中の $V^{(l_1, r_1)}$, $V^{(l_2, r_2)}$ と $Y_{[s]}^{(l_1, r_1)}$ をそれぞれ $V^{(l_1)}$, $V^{(l_2)}$ と $Y_{[s]}^{(l_1)}$ に置き換えた不等式が得られる。結果として、問題 (σ, θ) に関する設計のための条件式は問題 (σ, θ, η) に関する条件式 (43) の特殊ケースとなる。ただし、前節で述べたように問題 (σ, θ) に対応する安定条件 (38) は問題 (σ, θ, η) に対応する安定条件 (31) の特殊ケースにはならないことに注意する。また、問題 (θ) に関する設計のための条件式は、(43) 式に対して上で置き換えを行った式の $Y_{[s]}^{(l_1)}$ の部分をさらに $Y^{(l_1)}$ と置き換えることにより得られ、対応する状態フィードバックゲインの端点の組のひとつも、 $K^{(l)} = Y^{(l)}(V^{(l)})^{-1}$ ($l=1, \dots, L$) で与えられる。

5. 数値例検証

本節では、本論文で述べたゲインスケジュールド状態フィードバック設計法の有効性を二つの数値例により検証する。

まず、一つ目の数値例では制御器が η の情報を利用で

きた方が利用できない場合と比べてよりよい制御が達成できるかどうかの考察を行う。その際、各問題ごとに安定性の指標となる λ に注目するが、例題に取り組む前に、その値をできるだけ小さくなるように設計する考え方と、それにより実際にどれだけ目標が達成されたかを評価する方法を述べる。

問題 (σ, θ, η) に関する λ について考えてみると、(43) 式から、 λ に関する 2 分法によりその値を最小化するようなフィードバックゲインを設計することができる。ほかの問題 (σ, θ) , (θ, η) , (θ) においても、適切な決定変数の制約のもと (43) 式により同様の手順で λ を最小化することができる。しかし、このようにして得られた λ は、実際には得られた閉ループ系において (17) 式を満たす λ のひとつにすぎない。これは、十分条件に基づく設計しか行っていないことによるものであり、実際にはより小さな λ でこの式が満たされる可能性がある。そこでつぎに、得られた設計結果に対して 3. の議論を通して改めて解析を行うことにより、(17) 式を満たす λ として、より小さな値が存在するかどうか評価することを考える。このような解析を行うことは、どれほどの“安定度”をもたせた設計が達成できたのかの目安を（利用可能な安定条件が十分条件でしかないという状況下で可能な限り）より厳密に評価するうえで、すなわち、本論文で導いた設計手法の有効性を評価するうえで重要である。ただし、その評価手法は各問題に応じて異なることに注意されたい。問題 (σ, θ, η) , (θ, η) の場合は、(上で得られたフィードバックゲインのもと) (31) 式から 2 分法により λ を最小化する。一方で、問題 (σ, θ) , (θ) の場合は、3. で述べたように、(37) 式を使って 2 分法により λ を最小化する。ここまでの λ に関する議論を考慮に入れて次の例題に取り組む。

【例題 1】 $S=3, L=2, R=3$ とする。係数行列およびモード遷移確率行列の端点が以下で与えられる。(7) で記述される非斉次的マルコフ連鎖に従う系 (1) を考える。

$$A_{[1]}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix}, A_{[2]}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix},$$

$$A_{[3]}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1.7 & 0.4 \\ 0.1 & 0 & 1.3 \end{bmatrix}, A_{[1]}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 1.4 \end{bmatrix},$$

$$A_{[2]}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.1 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1.4 \end{bmatrix}, A_{[3]}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.4 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1.8 & 0.4 \\ 0.1 & 0 & 1.2 \end{bmatrix},$$

$$B_{[s]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s=1, 2, 3), P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix} \quad (46)$$

上記系はフィードバックをかけなければ不安定な系であり、実際、時変パラメータ $\theta_k^{(1)} = 1 - (2/\pi) \cdot \tan^{-1}(k)$, $\theta_k^{(2)} = 1 - \theta_k^{(1)}$ ($k=0, \dots, 70$), $\eta_k^{(1)} = (2/\pi) \cdot \tan^{-1}(k+1)$, $\eta_k^{(2)} = (1 - \eta_k^{(1)})/3$, $\eta_k^{(3)} = 1 - \eta_k^{(1)} - \eta_k^{(2)}$ ($k=-1, \dots, 70$), 初期状態 $x_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$ および初期モード $\sigma_{-1} = 1$ のもとで、モード遷移を決定づける標本を一つとると（見本過程の一つである）状態応答は Fig. 1 のように発散した。同一の初期状態と初期モードのもとで、（著者が確認した範囲で）他の異なる標本および他の異なる時変パラメータ $\theta_k \in \mathbf{E}^L$ ($k=0, \dots, 70$), $\eta_k \in \mathbf{E}^R$ ($k=-1, \dots, 70$) においても状態応答は発散した。

このような系に対して、まずは問題 (σ, θ, η) および (σ, θ) に関する状態フィードバックを設計したところ、設計段階における（2分法により最小化された） λ としてそれぞれ 0.6488, 0.6939 が得られた。そして、さらに解析し直すとそれらの値は 0.6433, 0.6733 まで下がった。このことから、設計後の解析を行うことによって (17) 式を満たす λ として、より小さな値が存在することが確認できる。また、設計段階で得られた λ はともに 1 未満であるから、いずれのフィードバックを用いたとしても、系 (1), (7), (46) を安定化できることが保証される。実際、問題 (σ, θ, η) に関するフィードバックをかけたところ、時変パラメータ $\theta_k^{(1)} = 1 - (2/\pi) \cdot \tan^{-1}(k)$, $\theta_k^{(2)} = 1 - \theta_k^{(1)}$ ($k=0, \dots, 70$), $\eta_k^{(1)} = (2/\pi) \cdot \tan^{-1}(k+1)$, $\eta_k^{(2)} = (1 - \eta_k^{(1)})/3$, $\eta_k^{(3)} = 1 - \eta_k^{(1)} - \eta_k^{(2)}$ ($k=-1, \dots, 70$), 初期状態 $x_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$ および初期モード $\sigma_{-1} = 1$, そして上と同じ標本のもとで Fig. 2 に示すように閉ループ系の状態応答は収束した。問題 (σ, θ) に関するフィードバックをかけたときも、上と同じ状況下で Fig. 2 とほとんど変わらない状態応答の形状が得られた。また、同一の初期状態と初期モードのもとで、どちらのフィードバックを用いたとしても（著者が確認した範囲で）他の異なる標本および他の異なる時変パラメータ $\theta_k \in \mathbf{E}^L$ ($k=0, \dots, 70$), $\eta_k \in \mathbf{E}^R$ ($k=-1, \dots, 70$) においてもほとんど同じ形状で状態応答は収束した。

例題 1 に関して、状態応答の形状が問題 (σ, θ, η) および (σ, θ) に関する状態フィードバックを与えた場合でほとんど変わらなかったのは、状態フィードバックが各時刻ごとにモードの情報を既知としているためと考えられる。すなわち、モード σ_k から σ_{k+1} への η_k に依存する遷移確率によらず、時刻 $k+1$ において σ_{k+1} の値は状態フィードバックにとって既知である。このため、 η_k の情報を陽に活用できる状態フィードバックを用いたとしても、必ずしもその明確な効果は発揮されない。そこで今度は、モードの値を利用できない場合を考慮した問題 (θ, η) および (θ) に関する状態フィードバックについ

Fig. 1 A state response of the open-loop system

Fig. 2 A state response of the closed-loop system with the (σ, θ, η) -type feedback gain

て考える。

【例題 1】[続] 例題 1 の系に対して、問題 (θ, η) および (θ) に関する状態フィードバックを設計したところ、設計段階における λ としてそれぞれ 0.9818, 1.0312 が得られ、さらに解析し直すことによりそれらの値は 0.9784, 1.0309 まで下がった。問題 (θ) については、設計段階において、前節における記述に沿って $\lambda \in (0, 1)$ の範囲で λ を指定すると、LMI が可解とならなかった。そこで、 $\lambda \in (0, 1)$ によらず $\lambda > 1$ から出発して 2 分法を行ったが、設計段階で $\lambda < 1$ には到達できなかった。その最終段階で得たゲインに関する解析により得られた λ もまた上記の通り 1 を越えていることから、閉ループ系の安定性を保証することができない。ここで、上述の開ループでの応答を求めたのと同じ状況下で、すなわち、時変パラメータ $\theta_k^{(1)} = 1 - (2/\pi) \cdot \tan^{-1}(k)$, $\theta_k^{(2)} = 1 - \theta_k^{(1)}$ ($k=0, \dots, 70$), $\eta_k^{(1)} = (2/\pi) \cdot \tan^{-1}(k+1)$, $\eta_k^{(2)} = (1 - \eta_k^{(1)})/3$, $\eta_k^{(3)} = 1 - \eta_k^{(1)} - \eta_k^{(2)}$ ($k=-1, \dots, 70$), 初期状態 $x_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$, 初期モード $\sigma_{-1} = 1$ および同じ標本のもとで問題 (θ, η) および (θ) に関する状態フィードバックをかけたときの状態応答をそれぞれ Fig. 3, Fig. 4 に示す。Fig. 3 の応答は収束しているものの、Fig. 4 では発散していることがわかる。この結果から、状態フィードバックがモードの値を利用できない場合には η_k の情報を陽に活用することによって、よりよい制御が達成できることが確認できた。

次の数値例では、本論文と同じく非斉次的なマルコフジャンプ系を扱う先行研究 [12] の手法と本提案手法との比較を行う。

【例題 2】 再び、例題 1 の系を考え、提案手法の有効

Fig. 3 A state response of the closed-loop system with the (θ, η) -type feedback gain

Fig. 4 A state response of the closed-loop system with the θ -type feedback gain

性をやや異なる角度から検証する。それは、同じく非斉次性を扱える文献 [12] との比較に関するものであるが、そのことを視野に入れて、例題 1 の系に対して（後述する） θ に関連した近似を行い、そのような近似の必要がない本論文がどれほど有効かを検証しようとするのがこの例題の立場である。

上記文献では時変パラメータ η を有するマルコフジャンプ系を扱うことはできるが、本論文にあるような θ の情報も有するような系を扱うことができない。そこで、以下では θ に関して例題 1 の系を適当な方法で近似し、その系に対して、上記文献の手法に基づいてモードの情報が利用できない場合の時不変ゲインを設計する。ここで、上記文献の手法により得られる状態フィードバックゲインはスケジューリングしない、すなわち η の値を利用しないものであることに注意されたい（したがって、モードの値を利用しない場合にはフィードバックゲインは時不変になる）。このことは、本論文における (θ, η) 利用型ゲイン (10) をみたときに、上記文献の制約から θ_k がなくなり、そして同時にスケジューリングしないことから η_k もなくなり、その結果として設計対象であるフィードバックゲインが時不変になることに対応する。この例題では、例題 1 の系に対して、その時不変ゲインを適用した場合と（例題 1 で設計した） (θ, η) 利用型の時変ゲインを適用した場合のそれぞれの状態応答を比較する。

まず、例題 1 の系を θ に関して適当に近似することを考える。より具体的には、($L=2$ のもと) (1) 中の A 行列に対して、($\theta \in \mathbf{E}^2$ を満たすように) $\theta^{(1)} = \theta^{(2)} = 1/2$

Fig. 5 A sample path of x with regard to the (θ, η) -type and time-invariant gains

をとる。このとき得られる A 行列は s にのみ依存するが、この $A[s]$ と (46) 中の $B[s]$ および $P^{(r)}$ からなる“近似系”に対して、先行研究の手法に基づいて設計を行ったところ、時不変ゲイン

$$K = \begin{bmatrix} -8.9708 & -2.4808 & -1.6193 \end{bmatrix} \quad (47)$$

が得られた。

つぎに、例題 1 の系に対して、上記ゲインを適用した場合と例題 1 で設計した (θ, η) 利用型の時変ゲインを適用した場合のそれぞれの（標本を一つとったときの）状態応答を Fig. 5 に示す。なお、このときの時変パラメータを $\theta_k^{(1)} = (\sin(\pi k/3))^2$, $\theta_k^{(2)} = 1 - \theta_k^{(1)}$, $\eta_k^{(1)} = (2/\pi) \cdot \tan^{-1}(k+1)$, $\eta_k^{(2)} = (1 - \eta_k^{(1)})/3$, $\eta_k^{(3)} = 1 - \eta_k^{(1)} - \eta_k^{(2)}$ とし、また初期状態および初期モードをそれぞれ $x_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\sigma_{-1} = 1$ とした。この図より、時不変ゲイン (47) よりも (θ, η) 利用型のほうがよい応答を与えていることが確かめられる。また、上記時変パラメータと初期状態、初期モードのもとで他の標本をとったときの応答に関しても（著者が確認する範囲で）同様の結果が得られた。このことから、系の時変パラメータ θ, η の値が利用可能である場合には、その値を陽に利用した本提案手法が有効であることが確かめられた。

6. おわりに

本論文では、系の係数行列のみならずモード遷移確率行列にも時変パラメータを含むようなマルコフジャンプ系を扱った。そのような系に対して、両行列に含まれる時変パラメータの値を利用したゲインスケジュールド状態フィードバックを設計する問題（とその特殊ケースである三つの設計問題）に取り組んだ。まず、与えられたゲインスケジュールド状態フィードバックと与えられた時変パラメータの系列のもとで、モード数 S 個の写像を用いた安定条件を導出した。さらに、その形を有限個の端点行列からなるものへ制約することを通して、任意の時変パラメータの系列に関して安定性を保証するような条件を導出した。つぎに、ゲインスケジュールド状態フィードバック設計のための条件式を導出し、数値例で本設計手法が有効であることを検証した。とくに、(制御時にモードの値を直接利用できない場合に、それに代わる形として) モード遷移確率を定める時変パラメータの値を利用することで、よりよいゲインスケジュールド制御が達成できることを確認した。

参考文献

- [1] E. K. Boukas: *Stochastic Switching Systems: Analysis and Design*, Birkhauser (2006)
- [2] O. L. V. Costa, M. D. Fragoso and R. P. Marques: *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*, Springer-Verlag (2005)
- [3] D. D. Swonder and R. O. Rogers: An LQG solutions to a control problem with solar thermal receiver; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 28, pp. 971–978 (1983)
- [4] D. Mills: Advances in solar thermal electricity technology; *Solar Energy*, Vol. 76, pp. 19–31 (2004)
- [5] P. Seiler and R. Sengupta: An H_∞ approach to networked control; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 50, No. 3, pp. 356–364 (2005)
- [6] D. Huang and S. K. Nguang: State feedback control of uncertain networked control systems with random time delays; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 53, No. 3, pp. 829–834 (2008)
- [7] A. Packard: Gain scheduling via linear fractional transformations; *Systems & Control Letters*, Vol. 22, No. 2, pp. 79–92 (1994)
- [8] P. Apkarian and R. J. Adams: Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems; *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.*, Vol. 6, No. 1, pp. 21–32 (1998)
- [9] C. E. de Souza: Robust stability and stabilization of uncertain discrete-time Markovian jump linear systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 51, No. 5, pp. 836–841 (2006)
- [10] L. Zhang and E. K. Boukas: Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities; *Automatica*, Vol. 45, No. 2, pp. 463–468 (2009)
- [11] L. Zhang and E. K. Boukas: Mode-dependent H_∞ filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities; *Automatica*, Vol. 45, No. 6, pp. 1462–1467 (2009)
- [12] S. Aberkane: Stochastic stabilization of a class of nonhomogeneous Markovian jump linear systems; *Systems & Control Letters*, Vol. 60, No. 3, pp. 156–160 (2011)
- [13] J. Daafouz and J. Bernussou: Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties; *Systems & Control Letters*, Vol. 43, No. 5, pp. 355–359 (2001)
- [14] Y. Fang and K. A. Loparo: Stochastic stability of jump linear systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 47, No. 7, pp. 1204–1208 (2002)
- [15] 細江, 萩原: 確率的なダイナミクスを有する線形系に対するリアプノフ不等式; 第4回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, paper No. 2G3-4 (2017)
- [16] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control*, Society for Industrial and Applied Mathematics (1994)
- [17] 蛸原: LMI によるシステム制御, 森北出版 (2012)
- [18] M. C. de Oliveira, J. Bernussou and J. C. Geromel: A new discrete-time robust stability condition; *Systems & Control Letters*, Vol. 37, No. 4, pp. 261–265 (1999)

著者略歴

なまぎ ちゅう じ
柳 楽 勇 士

2017年3月京都大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了。同年4月同大学同研究科博士後期課程に進学し、現在に至る。ロバスト制御、確率系などの研究に従事。日本学術振興会特別研究員 DC1。計測自動制御学会の学生会員。

まつ ぎき ひろ き
松 崎 弘 樹

2018年3月京都大学工学部電気電子工学科卒業。同年4月同大学大学院工学研究科修士課程に進学し、現在に至る。確率系の研究に従事。

ほそ え 　　よう へい (正会員)
細 江 　　陽 平

2011 年京都大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了，2013 年同博士後期課程修了．同年京都大学大学院工学研究科助教，現在に至る．ロバスト制御，確率系，周期時変系などの研究に従事．京都大学博士（工学）．計測自動制御学会，IEEE の会員．

はぎ わら とも みち (正会員)
萩 原 　　朋 道

1986 年京都大学大学院工学研究科修士課程修了．同年京都大学工学部助手，1991 年助教授，改組に伴い，京都大学大学院工学研究科電気工学専攻助教授を経て，2001 年より教授．サンプル値制御理論，2 自由度制御系の設計法，むだ時間系などの研究に従事．京都大学工学博士．計測自動制御学会，電気学会，IEEE などの会員．