確率系制御のための L_∞ および L_1 ノルムに基づく 累積分布関数の近似*

細江 陽平[†]・奥野 誠也[†]・萩原 朋道[†]

Approximation of Cumulative Distribution Functions Based on L_∞ and L_1 Norms for Stochastic Systems Control*

Yohei HOSOE[†], Masaya OKUNO[†] and Tomomichi HAGIWARA[†]

This paper studies approximation of probabilistic distributions behind discrete-time linear systems with stochastic dynamics for advances in control of the systems. We discuss two approximation methods leading to optimal discrete distributions whose errors from the probabilistic distribution behind the system are minimal in the sense of the L_∞ and L_1 norms of the differences between associated cumulative distribution functions. The effectiveness of those approximation methods is demonstrated with numerical examples, in which the methods are compared with another simple method of constructing discrete distributions based on random sampling.

1. はじめに

計算機性能の向上や制御が望まれる対象の多様化などを背景に、システム表現としてより高度なものを活用しようとする機運が高まっている。本論文では、そのような高度なシステム表現の一つとして、状態遷移の仕方が確率的にしか定まらない、したがって動特性が確率的であるような確率系 [1] を取り扱う。とくに、議論を離散時間かつ線形なクラスの確率系に限定し、その確率系を理論的および数値的に取り扱いやすくするための、確率系の背後にある確率分布の近似について論じる。

確率的な動特性をもつ離散時間線形系の振舞いは、係数行列が時刻ごとにランダムに値をとる離散時間状態方程式で記述できる。たとえば、その係数行列がマルコフ連鎖 [2] に従う場合には、対応する確率系はマルコフジャンプシステム [3] とよばれるものになる。一方、著者らは文献 [4–6] 等において、係数行列が時間に関して独立同分布に従う（したがって i.i.d. である）場合に、対応する確率系を制御するための理論の構築に取り組んできた。たとえば、文献 [4] ではそのような確率系の安定性を必要十分の意味で特徴づけるリアプノフ不等式につい

て、また文献 [5] では H_2 性能解析および設計について論じている。これらの研究で扱われている系のクラスは、従来研究 [7,8] において扱われていた状態にノイズが重畳するような系を特殊ケースとして含むものとなっており、その一般化とみなすことができるものとなっている。

本論文では、確率系の制御においてその取り扱いを容易にすることを目的として、その系の背後にある確率分布（母分布とよぶ）を離散分布で近似する方法について論じる。本論文では確率系の係数行列として、文献 [4–6] と同様に時間に関して i.i.d. なものを取り扱うが、このとき係数行列を決める確率過程の各時刻での分布は時間によらない単一の累積分布関数で表現することができる。この累積分布関数に基づき、文献 [4] のリアプノフ不等式では決定変数であるリアプノフ行列を含む期待値を計算することになるが、母分布が離散分布のような取り扱いが容易なものでない場合には、その式からより高度な制御を達成するための条件式を導く際や、得られた条件式を数値的に解く際に困難が生じる恐れがある（このあたりの事情については次節でも述べる）。そこで、本論文ではこの困難を回避するための一つのアプローチとして、母分布の累積分布関数との差が L_∞ ノルムまたは L_1 ノルムの意味で最小になるような離散分布の構成方法について論じる。それらの方法による近似の誤差が小さければ、対応する離散分布に基づいて制御器を設計した場合に制御性能の劣化を抑えることができると期待される。

なお、二つの確率分布の間の距離を評価するための指

* 原稿受付 2018年6月15日
第62回システム制御情報学会研究発表講演会にて発表
(2018年5月)

[†] 京都大学 Kyoto University; Nishikyo-ku, Kyoto 615-8510, JAPAN

Key Words: stochastic systems, discrete distributions, cumulative distribution functions, LMI.

標は本論文で扱うものの他にも Lévy 距離などさまざまなものがあり [9], その活用も多岐にわたる. たとえば, 文献 [10] では確率密度関数の誤差の L_p ノルムに基づいて, 与えられた分布から混合分布モデルを作成する問題が取り扱われている. 本論文はそのような知見を確率系制御に活用しようとするものである.

本論文の構成は以下の通りである. 2. 節では, 本論文で扱う確率系とその安定性, リアプノフ不等式について述べる. また, リアプノフ不等式をもとにより高度な制御を達成するための条件式を導出する際に生じる懸念と, 離散分布で近似することによりその懸念が解消されることについて述べる. 3. 節では, 確率系の背後にある分布の累積分布関数を L_∞ および L_1 ノルムに基づいて離散分布の累積分布関数で近似する方法について論じる. 4. 節ではそれらの近似法の有効性を数値例により検証する.

本論文で用いる表記は以下の通りである. $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{N}_0$ はそれぞれ実数, 正数および非負整数全体からなる集合を表す. $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^{n \times m}$ はそれぞれ n 次の実ベクトルおよび $n \times m$ の実行列全体からなる集合を表す. $\mathbf{S}^{n \times n}$, $\mathbf{S}_+^{n \times n}$ はそれぞれ $n \times n$ の対称行列および $n \times n$ の正定行列全体からなる集合を表す. $\|(\cdot)\|$ はベクトル $(\cdot)$ のユークリッドノルムを表す. $(\cdot)^T$ は実ベクトルまたは実行列の転置を表す. $E[(\cdot)]$ は確率変数 $(\cdot)$ の期待値を表す (この表記はランダム行列 $(\cdot)$ の期待値に対しても用いる).

2. 確率的な動特性をもつ離散時間線形系と設計問題

2.1 確率的な動特性をもつ離散時間線形系とその安定性

Z 次のランダムベクトル ξ_k の離散時間 $k \in \mathbf{N}_0$ に関する系列として与えられる確率過程 $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbf{N}_0}$ を考える. 本論文では, この確率過程に以下の仮定をおく.

(仮定 1) ランダムベクトル ξ_k は離散時間 $k \in \mathbf{N}_0$ に関して独立同分布に従う (すなわち i.i.d. である).

上記仮定より ξ は定常性とエルゴード性 [2] を有する. ξ_0 (したがって ξ_k) の台と累積分布関数をそれぞれ $\Xi (\subset \mathbf{R}^Z)$, $\mathcal{F}(\cdot)$ と表記する. 本論文では Ξ および $\mathcal{F}$ は既知であるとする.

つぎに, 確率過程 ξ によって係数行列が定まる確率系

$$x_{k+1} = A(\xi_k)x_k \quad (1)$$

を考える. ただし, $x_k \in \mathbf{R}^n$, $A: \Xi \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ であり, 状態 x の初期値 x_0 は確定的であるとする. $A(\cdot)$ は確定的な写像であり, $A(\xi_k)$ は ξ_k によって値が定まるランダム行列である. 系 (1) は k ごとに ξ_k の値に応じて状態遷移の仕方が確率的に定まる離散時間線形確率系である. 簡単のために以降ではこの系を単に確率系とよぶ. なお, 以降の議論では ξ_k の取り扱いに関連して確定的な定数ベクトルを導入することがあり, その際にはそれを ξ_*

と表記する.

系 (1) の安定性として, 本論文では以下のように定義される 2 次平均大域的指数安定性 [11] を扱う.

【定義 1】 次式を満たす $a \in \mathbf{R}_+$ と $\lambda \in (0, 1)$ が存在するとき, 系 (1) は 2 次平均大域的指数安定であるという.

$$\sqrt{E[\|x_k\|^2]} \leq a\|x_0\|\lambda^k \quad (\forall k \in \mathbf{N}_0, \forall x_0 \in \mathbf{R}^n) \quad (2)$$

文献 [4] より, 上記安定性に関して以下の定理が成り立つ.

【定理 1】 次の 2 条件は等価である.

1. 系 (1) が 2 次平均大域的指数安定である.
2. 次式を満たす $P \in \mathbf{S}_+^{n \times n}$, $\lambda \in (0, 1)$ が存在する.

$$E[\lambda^2 P - A(\xi_0)^T P A(\xi_0)] \geq 0 \quad (3)$$

上記定理の条件式 (3) はリアプノフ不等式に対応し, その形は期待値操作の中に決定変数 P が現れるものになっているが, $A(\xi_0)$ の重複を含む任意の二つの成分の積の期待値がすべて計算可能なら, 文献 [5] で論じられている手法を用いて (λ 固定のもとで) 通常の線形行列不等式 (LMI) として解くことができる.

2.2 設計問題と設計のための条件式

つぎに, (1) 式の確率系に制御入力 u を想定した制御対象

$$x_{k+1} = A(\xi_k)x_k + B(\xi_k)u_k \quad (4)$$

と, 静的時不変ゲイン $F \in \mathbf{R}^{m \times n}$ により定まる状態フィードバック

$$u_k = Fx_k \quad (5)$$

を考える. このとき閉ループ系 (G_F と表記する) は,

$$A_{cl}(\cdot) = A(\cdot) + B(\cdot)F \quad (6)$$

で (1) 式の $A(\cdot)$ を置き換えたもので与えられる. 本論文では, この閉ループ系 G_F が安定であるようなゲイン F を設計する問題を取り扱う.

リアプノフ不等式 (3) をもとに制御器設計のための条件式を導くことを考えるとき, 一般にその方針として以下の 2 通りを考えることができる.

1. 定理 1 のもとで述べた解析手法と同様に, ある期待値が計算可能な場合に通常の LMI として解ける条件式を導く.
2. 文献 [4] にならって, 決定変数である写像の導入により期待値評価式と行列不等式が分離された条件式を導く.

詳細は省略するが, 本論文で扱う安定化問題は実は上記のどちらの方針に従っても取り組むことが可能である. とくに方針 1 の場合は, (3) 式を用いた解析の場合と同様に保守性を生じることなく設計を行うことができる. しかし, 方針 1 の場合は LMI に関する手法を用いて不

等式を伸張する前に期待値計算を処理しておく必要があり、この確率系特有の事情がより高度な制御問題を扱う場合に障害になる可能性がある。したがって、もし方針1に従うことが難しい問題を取り扱う場合には、方針2を検討することになる。方針2の場合は、期待値評価式と行列不等式が分離されることから、行列不等式の方については確定系に関する議論とほぼ同様の取り扱いが可能であり、方針1よりも見通しがよいという利点がある。その反面、決定変数として写像を探索する必要があり、その探索を保守性や誤差を極力生じさせないようにしつつ効率的に行うかに関して課題がある。本論文の主目的は、この課題の解決に取り組むための一つのアプローチとして、 ξ_k が従う分布を離散分布で近似する方法について議論することである。その議論の妥当性を検証するための題材として、系(4)の安定化問題に取り組む。

上記方針2に従うとき、安定化問題は次の定理に基づいて取り組むことになる（この定理は文献[4]の手法を用いて(3)式を変形することで容易に導かれる）。

【定理 2】 $X \in \mathbf{S}_+^{n \times n}, Y \in \mathbf{R}^{n \times m}, S: \Xi \rightarrow \mathbf{S}^{n \times n}, \lambda \in (0,1)$ が存在し、次の2式を満たすことは、閉ループ系 G_F が安定になるような状態フィードバックゲイン F が存在するための必要十分条件である。

$$E[S(\xi_0)] \leq 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 X + S(\xi_*) & X A(\xi_*)^T + Y B(\xi_*)^T \\ * & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\forall \xi_* \in \Xi) \quad (8)$$

とくに $F = Y^T X^{-1}$ は、そのようなゲインの一つである。

上記定理に基づけば、期待値評価式(7)と行列不等式(9)を満たす行列 X, Y と写像 S （およびスカラー λ ）を探索することで系 G_F が安定となるような F を設計することができる。

2.3 離散分布の場合の設計

条件式(7),(9)を満たす解を探索することを考えたとき、写像 S のクラスを制限しないと(7)式の左辺の期待値の評価が難しいこと、また(9)式は一般に無数の ξ_* について連立して解かねばならないことが課題となる。これが先に述べた方針2に関する課題である。しかし、 ξ_0 の分布が離散分布 $D(q,p)$ ($q = [q_1, \dots, q_Q] \in \mathbf{R}^{Z \times Q}, p = [p_1, \dots, p_Q] \in \mathbf{R}^{1 \times Q}$) で与えられる場合には、それらの課題は回避される。この事情は安定化の場合に限らず同様である。ただし、 $D(q,p)$ はランダムベクトル ξ_0 が値 q_i ($i = 1, \dots, Q$) を確率 p_i でとる離散分布を表す。

ξ_0 が離散分布 $D(q,p)$ に従うとき、(7),(9)式は以下の2式に帰着する（決定変数 $S(q_i)$ を S_i と表記している）。

$$\sum_{i=1}^Q p_i S_i \leq 0 \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 X + S_i & X A(q_i)^T + Y B(q_i)^T \\ * & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, Q) \quad (10)$$

$\lambda \in (0,1)$ 固定のもとで上式は確定行列（およびスカラー）と決定変数からなる通常のLMIである。そのLMIを満足する行列 $X \in \mathbf{S}_+^{n \times n}, Y \in \mathbf{R}^{n \times m}, S_i \in \mathbf{S}^{n \times n}$ ($i = 1, \dots, Q$) を探索すれば、閉ループ系 G_F が安定となるような状態フィードバック $F = Y^T X^{-1}$ が得られる。

上記のことを念頭に、本論文では ξ_0 の分布を、それが離散分布でない場合に離散分布で近似して取り扱うことを考える。その具体的な方法は次節で論じるが、もしその近似の誤差が何らかの意味で小さければ、より高い精度で系(4)を安定化できると期待される。

3. 母分布の累積分布関数の離散分布による近似

離散分布 $D(q,p)$ の累積分布関数を $\mathcal{F}_D(\cdot)$ と表記する。本節ではまず、 ξ_0 の標本を母分布の累積分布関数 $\mathcal{F}(\cdot)$ に基づいて無作為に生成し、その標本のおおのに均一の確率を割り当てることによって得られる離散分布で母分布を近似することを考える（この近似法は文献[6]で使用されている）。しかし、この近似のもとで設計を行う際には、3.1項で述べる問題が生じる。そこでその問題を軽減するために、3.2, 3.3項では母分布の情報をより積極的に利用して離散分布を作成し、その離散分布で母分布を近似することを考える。なお3.2, 3.3項では簡単のため、 ξ_0 はスカラー（すなわち $Z=1$ ）であり、 Ξ は連結集合であり、かつ $\mathcal{F}(\cdot)$ は Ξ 上で連続かつ単調増加である場合に議論を限定する。離散分布の累積分布関数 $\mathcal{F}_D(\cdot)$ は階段関数になり、その確率密度関数は定義されない。よって、上記の近似は確率密度関数ではなく累積分布関数に関して考える。また、母分布の情報を積極的に利用する近似においては、累積分布関数の近似誤差を L_∞ および L_1 ノルムで評価することを考える。

本節で用いる用語の定義について述べる。階段関数 $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ ($\mathcal{X} \in \Xi$ は ξ_0 に対応する変数) の段数をその不連続点の数によって Q で表す。また、 $\mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ のグラフにおける $\mathcal{X}$ 軸に平行な部分の一つ一つを平坦部、不連続点において平坦部と平坦部をつないだ線分の一つ一つを跳躍部、跳躍部の長さを跳躍幅とよぶことにし、たとえば Fig. 1 のように、 $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ が両端の平坦部を除いて $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ (Fig. 1 ではなめらかな曲線がこれを表している) と N 個の交点をもつとしたときの、各交点の $\mathcal{X}$ 座標を小さいものから順に $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$ とし、 $\mathcal{Y}$ 座標を小さいものから順に $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_N$ とする (Fig. 1 ではグラフを省略している部分を点線で表している)。ただし、本来 $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ は平坦部でしか $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ と交点をもたないが、ここでは跳躍部との交点も含めて $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ と $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ の交点とよぶことにしている。さらに、

Fig. 1 Approximation with a discrete distribution

y_0, y_{N+1} をそれぞれ $F_D(x)$ の最小値, 最大値として定義する. また, Fig. 1 における $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{N+1}$ のような, $y = F(x)$ と $y = F_D(x)$ の曲線間の面積でかつ各交点によって区切られた一つ一つを部分面積とよぶことにする. たとえば, $\Sigma_2 = \int_{x_1}^{x_2} |F(x) - F_D(x)| dx$ のように定義される. すべての $F_D(x)$ の跳躍部と (両端を除く) 平坦部が $y = F(x)$ と交点をもつとき, $N = 2Q - 1$ となる.

3.1 無作為に生成した標本に基づく近似

本項では, ξ_0 の標本 ξ_{0i} ($i = 1, \dots, Q$) を母分布 $F(\cdot)$ に基づいて無作為に生成し, そのおのおのに均一の確率 $1/Q$ を割り当てることで得られる経験的累積分布関数 [12] $F_s(\cdot)$ で $F(\cdot)$ を近似することについて述べる. この近似のもとで設計を行う場合, 2.3 項で与えた設計のための条件式 (9), (11) において, $q_i = \xi_{0i}$, $p_i = 1/Q$ ($i = 1, \dots, Q$) とみなしてそれらの条件式を用いることになる.

このとき, 標本数 Q を大きくすれば $F_s(\cdot)$ は $F(\cdot)$ に近くなり (大数の強法則 [2] より, 任意の ξ_* のもと, $F_s(\xi_*)$ は $Q \rightarrow \infty$ で $F(\xi_*)$ に概収束する), 精度のよい結果が得られやすくなることが考えられる. しかし, Q が大きくなれば LMI (9), (11) を解く際の計算負荷が大きくなってしまふという問題が生じる. そこで次項以降では, 離散分布の作成を, 標本を無作為に生成することに頼るのではなく, 母分布の情報を積極的に利用することで小さい Q でも設計において精度のよい結果が得られるような離散分布を作成する方法について論じる.

3.2 L_∞ ノルムに基づく近似

前項で述べたように, 母分布 $F(\cdot)$ の情報をより積極的に利用してその $F(\cdot)$ を離散分布 $F_D(\cdot)$ で近似することを考える. たとえば, 2.3 項で与えた設計のための条件式 (7) でランダム行列 $S(\xi_0)$ の期待値計算を行うことに対応して, 何らかの関数 $g(\cdot)$ に関する (確率積分に相当する) 積分 $\int_{\Xi} g(x) dF(x)$ ($= E[g(\xi_0)]$) の値をできるだけ正確に評価したいとする. このとき, 系の背後の分布の累積分布関数 $F(\cdot)$ を離散分布の累積分布関数

$F_D(\cdot)$ で近似して取り扱うことを前提に考えれば, よりよい $F_D(\cdot)$ のもとでその積分を $\int_{\Xi} g(x) dF_D(x)$ で置き換えることになる. したがって, その置き換えによって生じる誤差 $|\int_{\Xi} g(x) dF(x) - \int_{\Xi} g(x) dF_D(x)|$ をできるだけ小さくすることがここでの目標となる.

累積分布関数の近似誤差に対応する関数 $F_\epsilon(x) := F(x) - F_D(x)$ を定義する. $F(\cdot)$ に従う確率変数の台 Ξ が有界集合であるとき, その上限値 b と下限値 a のもとで

$$F_D(a) = 0, F_D(b) = 1 \quad (11)$$

となるように $F_D(\cdot)$ が構成されているとすると,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Xi} g(x) dF(x) - \int_{\Xi} g(x) dF_D(x) \right| \\ &= \left| \int_a^b g(x) dF_\epsilon(x) \right| \\ &= \left| [g(x)F_\epsilon(x)]_a^b - \int_a^b F_\epsilon(x) dg(x) \right| \\ &= \left| \int_{\Xi} F_\epsilon(x) dg(x) \right| \end{aligned} \quad (12)$$

が成り立つ (3 行目から 4 行目への変形に (11) 式を用いている) ことから, 上式最右辺を小さくできればよいことがわかる¹. ここで, $g(\cdot)$ に対応する (7) 式の $S(\cdot)$ は探索すべき対象であるので, $F(\cdot)$ を $F_D(\cdot)$ で近似する段階では関数 $g(\cdot)$ の (少なくとも正確な) 情報を利用することは難しい. よって上記の積分の絶対値を小さくするためには, $|F_\epsilon(x)| = |F(x) - F_D(x)|$ が任意の $x \in \Xi$ についてできるだけ小さくなるように $F_D(\cdot)$ を構成するのが合理的な方法の一つである. これは, L_∞ ノルム

$$\|F - F_D\|_{L_\infty} = \text{ess sup}_{x \in \Xi} |F(x) - F_D(x)| \quad (13)$$

に基づく累積分布関数の近似を考えることに対応する.

L_∞ ノルムの意味での最適近似は, $y = F_D(x)$ のすべての跳躍部がその中心で $y = F(x)$ と交点をもち (したがって $N = 2Q - 1$), $y = F_D(x)$ のすべての跳躍幅が $1/Q$ となる場合, すなわち

$$y_i - y_{i-1} = \frac{1}{2Q} \quad (i = 1, \dots, 2Q) \quad (14)$$

が成り立つ場合に達成される. 対応する L_∞ ノルムは $\|F - F_D\|_{L_\infty} = 1/(2Q)$ となる. このことは以下のように確認できる. (14) 式が成り立たず, ある i ($= 1, \dots, N+1; N \leq 2Q-1$) において $y_i - y_{i-1} = l < 1/(2Q)$ となる場合を考える. $N/(2Q) + l < 1$ であることと, (11)

¹ $[a, b]$ (すなわち Ξ) は (12) 式の 2 行目から 3 行目への変形 (部分積分) が意味をなすために有界であると仮定したが, 仮に有界でない場合にも十分広い有界区間のもとで同様の変形を考えれば, 実用上は差し支えない.

式より階段関数 $\mathcal{F}_D(\cdot)$ のすべての跳躍幅の和は必ず 1 であることより、このとき $\mathcal{Y}_i - \mathcal{Y}_{i-1} > 1/(2Q)$ を満たす i も必ず存在し、 $\|\mathcal{F} - \mathcal{F}_D\|_{L_\infty}$ は $1/(2Q)$ より大きくなる (したがって (14) 式を満たす場合よりも必ず悪くなる)。

$\mathcal{Y} = \mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ のすべての跳躍部が $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ と交点をもつとき、その交点の $\mathcal{Y}$ 座標は奇数の i を用いて $\mathcal{Y}_i$ と表されることが容易に確認できる (Fig. 1 参照)。したがって、その交点が跳躍部の中心であることが最適性の条件であるという上記の議論は、以下の定理としてまとめることができる。

【定理 3】 $\mathcal{F}_D(\cdot)$ は段数 Q の階段関数であり (11) 式を満たすとす。 $\|\mathcal{F} - \mathcal{F}_D\|_{L_\infty}$ が $\mathcal{F}_D(\cdot)$ に関して最小であるための必要十分条件は、 $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ と $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ の交点が $2Q - 1$ 個存在し、それらの交点の座標が

$$\mathcal{Y}_{2i-1} = \frac{2i-1}{2Q} \quad (15)$$

を満たすことである。

上記条件下で跳躍幅が $1/Q$ であることは明らかであり、したがって、 L_∞ ノルムの意味で最適な $\mathcal{F}(\cdot)$ の近似 $\mathcal{F}_D(\cdot)$ (すなわち離散分布 $D(q, p)$ の母数 $q = [q_1, \dots, q_Q]$, $p = [p_1, \dots, p_Q]$) を以下によりただちに得ることができる。

$$q_i = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2i-1}{2Q}\right), \quad p_i = \frac{1}{Q} \quad (i = 1, \dots, Q) \quad (16)$$

3.3 L_1 ノルムに基づく近似

前項で L_∞ ノルムに基づく近似について論じたが、この近似は誤差 $|\int_{\Xi} g(\mathcal{X}) d\mathcal{F}(\mathcal{X}) - \int_{\Xi} g(\mathcal{X}) d\mathcal{F}_D(\mathcal{X})|$ を最小化するにあたって関数 g に関する最悪ケースを想定したものであると解釈できるものであった。したがって、その近似は関数 g が完全に未知な場合には有効な方法の一つであるが、仮に g がどのようなものになるかの情報が設計前にある程度得られる場合には、保守的な結果をもたらす可能性がある。その詳細を述べるため、 Ξ 上の ξ_0 が確率的に値を (何らかの基準で見ることとした場合に) とりやすい領域を Ξ_{major} 、それ以外の領域 $\Xi \setminus \Xi_{\text{major}}$ を Ξ_{minor} と表記し、期待値を以下のように分割することを考える。

$$E[g(\xi_0)] = \int_{\Xi_{\text{major}}} g(\mathcal{X}) d\mathcal{F}(\mathcal{X}) + \int_{\Xi_{\text{minor}}} g(\mathcal{X}) d\mathcal{F}(\mathcal{X}) \quad (17)$$

このとき、上式右辺第 1 項の絶対値が第 2 項の絶対値より十分に大きければ、確率的に均一に跳躍部を設定する L_∞ ノルムに基づく近似は前者により多くの段数を割いて近似を行うことになるため、効果的な結果をもたらすと考えられる。しかし、第 2 項の絶対値が第 1 項の絶対値より十分小さいとはいえない場合には、 L_∞ ノルムに基づく近似では段数を多くしないと良好な結果が得られない恐れがある。そこで本項では、 $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ と $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ との $(\sum_{i=1}^{N+1} \Sigma_i = \int_{\Xi} |\mathcal{F}(\mathcal{X}) - \mathcal{F}_D(\mathcal{X})| d\mathcal{X})$

Fig. 2 Partial areas separated by a intersection point with a jumping part

で定義される) 誤差面積に注目し、近似のもう一つのアプローチとしてその誤差面積を最小にする方法について論じる。この方法に基づく場合、後述するように得られる階段関数 $\mathcal{F}_D$ は跳躍部によって跳躍幅が変化するものになり、 L_∞ ノルムに基づく場合に比べて少ない段数でも (17) 式右辺第 2 項の積分を効果的に扱える可能性がある。なお、この方法は L_1 ノルム

$$\|\mathcal{F} - \mathcal{F}_D\|_{L_1} = \int_{\Xi} |\mathcal{F}(\mathcal{X}) - \mathcal{F}_D(\mathcal{X})| d\mathcal{X} \quad (18)$$

に基づく累積分布関数の近似を考えることに対応する。定義より誤差面積は上記 L_1 ノルムに一致する。

L_1 ノルムに基づく累積分布関数の近似を論じるにあたり、まず $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ と交点を持たない $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ の両端以外の平坦部および跳躍部が存在する状況を考える。このとき、その平坦部と跳躍部が $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ と交点をもつように $\mathcal{F}_D(\cdot)$ を適切にとり直すと、誤差面積は必ず小さくできる。よって、 $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ と交点をもたない平坦部および跳躍部が存在する場合については考えなくてよいので、以降では $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ のすべての跳躍部と平坦部が両端の平坦部を除いて $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ と交点をもつ、したがって $N = 2Q - 1$ の場合を考える。

つぎに、Fig. 2 のような交点 $(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i)$ で区切られる二つの部分面積 Σ_i, Σ_{i+1} の和を考える。 $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ は $\mathcal{X}$ について単調増加であることより、Fig. 2 の実線の階段関数のように交点 $(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i)$ が跳躍部の中心にあるときに、交点を中心から、たとえば Fig. 2 の破線の階段関数との交点となるように移動させるように $\mathcal{F}_D(\cdot)$ をもし選べ直すと、 Σ_i の増加量は、明らかに Σ_{i+1} の減少量よりも大きくなる (逆にずらした場合も同様)。よって、交点 $(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i)$ が跳躍部の中心にあることが $\Sigma_i + \Sigma_{i+1}$ が最小であるための必要条件であることがわかる。以上では跳躍部との交点について (i が奇数の場合について) 考えたが、 $\mathcal{X} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{Y})$ が $\mathcal{Y}$ について単調増加であることと、誤差面積は $\mathcal{X}$ 軸と $\mathcal{Y}$ 軸を入れ換えて測っても変化しないことより、平坦部との交点について (i が偶数の

Fig. 3 Two discrete distributions satisfying (19) and (20)

場合について) も同様に, 交点が平坦部の中心にあることがその交点によって区切られる二つの部分面積の和が最小であるための必要条件であることがわかる. よって, $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ と $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ との部分面積が最小であるためには, 少なくともすべての交点が跳躍部ないし平坦部の中心にある, すなわち

$$\mathcal{Y}_{2i-1} - \mathcal{Y}_{2i-2} = \mathcal{Y}_{2i} - \mathcal{Y}_{2i-1} \quad (i=1, \dots, Q) \quad (19)$$

$$\mathcal{X}_{2i} - \mathcal{X}_{2i-1} = \mathcal{X}_{2i+1} - \mathcal{X}_{2i} \quad (i=1, \dots, Q-1) \quad (20)$$

が成り立つ必要があることがわかる. 一つでもそうでない交点がある場合は必ず誤差面積, すなわち L_1 ノルム $\|\mathcal{F} - \mathcal{F}_D\|_{L_1}$ を小さくする余地が残る. まとめて, 以下の定理が成り立つ.

【定理 4】 $\mathcal{F}_D(\cdot)$ は段数 Q の階段関数であり, (11) 式を満たすとする. $\|\mathcal{F} - \mathcal{F}_D\|_{L_1}$ が $\mathcal{F}_D(\cdot)$ に関して最小であるための必要条件は, $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ と $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ の交点が $2Q-1$ 個存在し, それらの交点の座標が (19), (20) 式を満たすことである.

ここで, (19), (20) 式を満たす解が唯一解とは限らないことと, その式を満足する解が必ずしも L_1 ノルムの意味での最適解とはならないことを示す. たとえば Fig. 3 の折れ線グラフで表される関数 $\mathcal{F}(\cdot)$ を $Q=2$ の階段関数 $\mathcal{F}_D(\cdot)$ で近似するとき, Fig. 3 の実線と破線の階段関数で 2 通りの近似をすると, どちらの階段関数についても (19), (20) 式は成立する. よって, (19), (20) 式を満たす解は必ずしも唯一解とはならないことがわかる. また, この 2 通りの近似では折れ線グラフで表される関数との誤差面積が異なるため, 少なくともどちらか一方は最適解でないことがわかる. よって, 一般に (19), (20) 式を解くことでただちには最適解は得られない. しかし, それらの式を満たすすべての解を求めることができれば, それらの解の中に L_1 ノルムの意味での最適解が含まれる. そこで, 以下では (19), (20) 式を満たすすべての解を探索する方法について述べる. ただし, (19), (20) 式は $\mathcal{Y}_i \leq 1$ ($i=1, \dots, 2Q-1$) が成り立つ場合にしか意味を

なさないで, その不等式が成り立つ範囲で解を探索する方法について述べる.

まず, $\mathcal{X}_1$ を自由に選び, そのもとで $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{F}(\mathcal{X}_1)$ と $\mathcal{Y}_0 = 0$ を (19) 式に代入すると $\mathcal{Y}_2$ が決まる. さらに, そのもとで一意的に存在する $\mathcal{X}_2 = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{Y}_2)$ と $\mathcal{X}_1$ を (20) 式に代入すると $\mathcal{X}_3$ が決まる. このように, $\mathcal{X}_1$ を選ぶと (19), (20) 式と $\mathcal{Y}_0 = 0, \mathcal{Y}_i = \mathcal{F}(\mathcal{X}_i)$ ($i=1, \dots, 2Q-1$) より $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4, \dots$ の順に, したがってグラフの左から座標が決まり, その $\mathcal{X}_1$ のもとで (19), (20) 式を満たす ($\mathcal{Y}_{2Q} \neq 1$ を許した) $\mathcal{F}_D(\cdot)$ が唯一に決まる. しかし探索すべき対象は (19), (20) 式に加えて, 累積分布関数としての要件を備えるための (11) 式 (すなわち $\mathcal{Y}_0 = 0, \mathcal{Y}_{2Q} = 1$) も満たす $\mathcal{F}_D(\cdot)$ である. そこで, $\mathcal{X}_1$ の選び方を工夫することで, そのような解をすべて探索することを考える. まず, (19) 式および $\mathcal{Y}_0 = 0$ より, $\mathcal{Y}_1 = 0.5$ のとき $\mathcal{Y}_2 = 1$ となるので, $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ の $\mathcal{X}$ に関する単調増加性より $\mathcal{Y}_1 > 0.5$ のときには $\mathcal{Y}_2 > 1$ となる. また, $\mathcal{Y}_1 = 0$ のときは (19) 式と $\mathcal{Y}_0 = 0$ より $\mathcal{Y}_{2Q} = 0$ となる. したがって, $\mathcal{Y}_1 > 0.5$ または $\mathcal{Y}_1 = 0$ を満たす $\mathcal{X}_1$ を選んだときには (11), (19), (20) 式を満たす $\mathcal{F}_D(\cdot)$ は得られないので, 考えなくてよい. 以上の議論より, まず $\mathcal{Y}_1 = 0.5$ を満たす $\mathcal{X}_1$ を考え, $\mathcal{F}(\cdot)$ の連続性と単調増加性に基づき $\mathcal{X}_1$ をその値から $\mathcal{Y}_1 = 0$ を満たす値まで ($\mathcal{F}(\mathcal{X})$ が 0 に漸近する場合には $\mathcal{Y}_1$ が十分小さく $\mathcal{Y}_1 \simeq 0$ とみなせるような値まで) 連続的に小さくしていけば, (19), (20) 式および $\mathcal{Y}_{2Q} = 1$ を満たす解を理論上はすべて見つけることができる (少なくとも一つはそのような解が存在する). そのようにして得られた解の中で, $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$ と $\mathcal{Y} = \mathcal{F}_D(\mathcal{X})$ との誤差面積が最小となるような解が L_1 ノルムの意味での最適解である.

与えられた $\mathcal{F}(\cdot)$ および Q のもとで, 以上の議論に従って (11), (19), (20) 式を満たす L_1 ノルムの意味での最適解を求め, 対応する $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i$ を離散分布とその累積分布関数の対応から直ちに導かれる関係式

$$q_i = \mathcal{X}_{2i-1}, p_i = \mathcal{Y}_{2i} - \mathcal{Y}_{2(i-1)} \quad (21)$$

に代入することで, $\|\mathcal{F} - \mathcal{F}_D\|_{L_1}$ が最小となる $\mathcal{F}_D(\cdot)$ (すなわち離散分布 $D(q, p)$ の母数である q, p) を得ることができる.

4. L_∞ および L_1 ノルムに基づく近似法の有効性検証

本節では, 前節で論じた二つの近似法の有効性を, 母分布に基づいて標本を無作為に生成することによる近似との比較の数値例を通して検証する. また, 二つの近似法の違いについても考察する.

4.1 既知の関数を用いた検証

ξ_0 の分布として, 台 Ξ および累積分布関数 $\mathcal{F}$ が次式で与えられる指数分布 $\text{Exp}(\nu)$ ($\nu = 1$) を考える.

Fig. 4 Graphs of g_1 and g_2

Table 1 Calculation result of approximation errors

	rand. samp.	L_∞ norm	L_1 norm
m_{app} for g_1	7.2238	6.2217	6.2296
ϵ_{app} for g_1	1.0093	0.0072	0.0151
m_{app} for g_2	0.2390	0.3378	0.3784
ϵ_{app} for g_2	0.1610	0.0622	0.0216

$$\Xi = [0, \infty), \mathcal{F}(X) = 1 - e^{-X} \quad (X \in \Xi) \quad (22)$$

また、本項では関数 g として

$$g_1(X) = 10/(X^2 + 1), \quad g_2(X) = 0.2X^2 \quad (23)$$

の二つを考え（そのグラフを Fig. 4 に示す）、 $\mathcal{F}$ を各近似法で近似したときの期待値 $E[g(\xi_0)]$ に関する誤差の比較を行う。なお、近似の際の階段関数の段数は $Q = 10$ で共通とする。

まず、MATLAB, Statistics and Machine Learning Toolbox を用いて、 ξ_0 の標本を（標本数 $Q = 10$ のもとで）分布 $\text{Exp}(\nu)$ に基づいて無作為に生成し、そのおののに確率 $1/Q$ を割り当てることで Fig. 5(a) の離散分布を得た。ただし、破線は母分布である (22) 式の指数分布の累積分布を表し、実線は得られた離散分布の累積分布を表す（後述する Figs. 5(b), 5(c) についても同様）。標本数が少ないこともあり、この方法では精度よく近似できていないことがわかる。つぎに同じ Q のもとで、提案法である L_∞ および L_1 ノルムに基づく近似により得られた離散分布をそれぞれ Figs. 5(b), 5(c) に示す。どちらの近似結果も Fig. 5(a) のものに比べて母分布の曲線に沿っていることがわかる。

つぎに、これらの近似により得られた離散分布により期待値 $E[g(\xi_0)]$ （ただし g は (23) 式の g_1 または g_2 ）の近似誤差を計算した結果を Table 1 に示す。この表において、 m_{app} は $\mathcal{F}_D$ のもとでの期待値を、 ϵ_{app} はその期待値と真の期待値（すなわち母平均） m_{pop} の差の絶対値 $|m_{\text{pop}} - m_{\text{app}}|$ を表す。ただし、 m_{pop} は $g = g_1$ のとき 6.2145、 $g = g_2$ のとき 0.4000 であった。これらの計算には MATLAB, Symbolic Math Toolbox を用いた。関数 g が g_1 と g_2 のどちらの場合でも、母分布の情報を

(a) Approximation based on random sampling

(b) Approximation based on L_∞ norm (c) Approximation based on L_1 norm

Fig. 5 Approximation result of cumulative distribution function

積極的に使った二つの近似法の方が標本を無作為に生成する場合に比べて近似誤差 ϵ_{app} を小さくできていることがわかる。同様の結果はその他の $\mathcal{F}$, g についても得られた。

なお、Table 1 において L_∞ ノルムに基づく場合と L_1 ノルムに基づく場合を比較したとき、 g が g_1 と g_2 のどちらで与えられるかによって結果の優劣が異なっていることが確認できる。これについては 3.3 項の冒頭で述べたことが関係する。Figs. 5(b), 5(c) を比べると、 ξ_0 が確率的に値をとりやすい領域（すなわち累積分布関数の傾きが急なところ）においては L_∞ ノルムに基づく近似の方が母分布を細かく近似できており、Fig. 4 のようにこの領域において（絶対値が）大きな値をとる g_1 で g が

与えられた場合には L_∞ ノルムに基づく近似の方が精度のよい結果が得られやすかったのだと考えられる。一方 g_2 の場合は ξ_0 が確率的に値をとりにくい領域で大きな値をとるものになっており、 g がそのような関数で与えられる場合には L_1 ノルムに基づく近似の方が精度のよい結果が得られやすかったのだと考えられる。このように、本論文で論じた二つの近似法は関数 g の形によって近似結果の優劣が変わるものになっている。

4.2 設計の数値例

つぎに、各近似法に基づき安定化設計の数値例に取り組む。台 Ξ および累積分布関数 $\mathcal{F}$ が (22) 式で与えられる時間的に i.i.d. な確率過程 ξ によって係数行列が

$$A(\xi_k) = \begin{bmatrix} 0.2g_1(\xi_k) & 0.8 & -0.5 \\ 0.5 & 0.2g_1(\xi_k) & 0 \\ -0.2 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$B(\xi_k) = [3 \ 2 \ 1]^T$$

で与えられる制御対象 (4) を考える。ただし、上式における g_1 は (23) 式で与えられるものとする。この系に対し、閉ループ系が安定かつ (2) 式を満たす λ の下限値が最小になるような状態フィードバック (5) のゲイン F を設計する。

近似における階段関数の段数を $Q = 10$ とすると、近似結果である離散分布は Fig. 6 ですでに得られているので、本項でもそれら三つの離散分布をそのまま用いて設計を行う。各離散分布に基づいて LMI (9), (11) を構成し、 λ に関する二分探索を通して λ が最小になる解を探索すると、Table 2 に示す λ の最小値 (近似に基づいているため λ_{app} と表記) と状態フィードバックゲイン F を得た。この λ_{app} は近似に基づいているが、いったん F が得られれば、その F のもとでの閉ループ系の安定性を定理 1 に基づいて厳密に評価することが可能である。よってそのような解析により (2) 式を満たす最小の λ を求めた結果を λ_{min} 、それと λ_{app} の差の絶対値を ϵ_λ として同じ表に併記する。ただしこれらの設計および解析では MATLAB, Symbolic Math Toolbox, YALMIP[13], SDPT3[14] を用いた。この表から、標本を無作為に生成した場合には $\lambda_{\text{min}} > 1$ のため、少なくともこの数値例では安定化できなかったものの、母分布の情報を積極的に使った二つの近似法では $\lambda_{\text{min}} < 1$ となり安定化が達成できたことが確認できる。また、それら二つの近似法はともに ϵ_λ を大きく低減できており、精度のよい近似に基づ

いて設計できたことが確認できる。

5. おわりに

本論文では、確率的な動特性をもつ系の制御に活用することを念頭に、その系の背後にある分布の累積分布関数を L_∞ および L_1 ノルムに基づいて離散分布のそれで近似する方法を論じた。これらの近似法を用いれば、条件式の導出やその数値的取り扱いの都合上確率系の背後の分布を離散分布で近似して取り扱わざるをえない場合に、より効果的にその離散分布を決定することができる。なお、本論文では簡単のため扱う確率変数が 1 変数の場合の近似を議論した。確率変数が多変量 (すなわち $Z > 1$) の場合の近似法を構築することは今後の課題の一つである。

参考文献

- [1] L. Arnold: *Random Dynamical Systems*, Springer-Verlag (1998)
- [2] 舟木: 確率論, 朝倉書店 (2004)
- [3] O. L. V. Costa, M. D. Fragoso and R. P. Marques: *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*, Springer-Verlag (2005)
- [4] 細江, 萩原: 確率的なダイナミクスを有する線形系に対するリアプノフ不等式; 第 4 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム (2017)
- [5] 細江, 岡本, 萩原: 確率的動特性をもつ離散時間線形系の H_2 性能解析および設計; 第 60 回自動制御連合講演会 (2017)
- [6] Y. Hosoe, T. Hagiwara and D. Peaucelle: Robust stability analysis and state feedback synthesis for discrete-time systems characterized by random polytopes; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 63, No. 2, pp. 556–562 (2018)
- [7] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM (1994)
- [8] E. Gershon and U. Shaked: H_∞ output-feedback control of discrete-time systems with state-multiplicative noise; *Automatica*, Vol. 44, No. 2, pp. 574–579 (2008)
- [9] V. M. Zolotarev: Metric distances in spaces of random variables and their distributions; *Mathematics of the USSR-Sbornik*, Vol. 30, No. 3, pp. 373–401 (1976)
- [10] A. Cadonna, A. Kottas and R. Prado: Bayesian mixture modeling for spectral density estimation; *Statistics & Probability Letters*, Vol. 125, pp. 189–195 (2017)
- [11] F. Kozin: A survey of stability of stochastic systems; *Automatica*, Vol. 5, No. 1, pp. 95–112 (1969)
- [12] R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers and K. Ye: *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*, 9th ed, Pearson (2011)
- [13] J. Löfberg: YALMIP: A toolbox for modeling and

Table 2 Synthesis result

	rand. samp.	L_∞ norm	L_1 norm
λ_{app}	1.1835	0.9966	0.9989
λ_{min}	1.0080	0.9973	0.9963
ϵ_λ	0.1755	0.0006	0.0027

optimization in MATLAB; *Proc. 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pp. 284–289 (2004)

- [14] R. H. Tütüncü, K. C. Toh and M. J. Todd: Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3; *Mathematical Programming Series B*, Vol. 95, No. 2, pp. 189–217 (2003)

著者略歴

ほそ え よう へい (正会員)
細江 陽平

2011 年京都大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了, 2013 年博士後期課程修了. 同年京都大学大学院工学研究科助教, 現在に至る. ロバスト制御, 確率系, 周期時変系などの研究に従事. 京都大学博士 (工学). 計測自動制御学会, IEEE の会員.

おく の まさ や
奥野 誠也

2018 年京都大学工学部電気電子工学科卒業, 同年京都大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程進学, 現在に至る.

はぎ わら とも みち
萩原 朋道 (正会員)

1986 年京都大学大学院工学研究科修士課程修了. 同年京都大学工学部助手, 1991 年助教授, 2001 年より京都大学大学院工学研究科電気工学専攻教授. サンプル値制御理論, 2 自由度制御系の設計法などの研究に従事. 京都大学工学博士. 計測自動制御学会, 電気学会, IEEE などの会員.