単位円上で等間隔収束する マルチエージェントシステムの初期配置に関する解析*

中井 優希[†]・市原 裕之[†]

Initial Configuration Analysis of Multi-Agent Systems that Converge to Evenly Spacing Points on Unit Circle*

Yuki NAKAI[†] and Hiroyuki ICHIHARA[†]

The purpose of this paper is to clarify initial configuration conditions of multi-agent systems that converge to evenly spacing points on the unit circle embedded in the control space. The agents can converge to points on the submanifold by the gradient method to maximize the distance between the agents that are mutually connected. This paper considers the cycle graph as the communication topology and the unit circle as the submanifold on the plane. Then the paper introduces the first integral of the arguments of the agents and gives a necessary and sufficient condition that the agents converge to evenly spaced points on the unit circle with the order of the cycle graph provided that the agents converge to the unit circle by the gradient method. Finally, numerical examples confirm the final configuration of the agents that satisfy the proposed initial configuration condition.

1. はじめに

マルチエージェントシステムのフォーメーション制御では、複数のエージェントが局所的な通信によって情報を共有し、エージェント間で共通の目標を達成する。とくに、エージェントの状態を一致させる合意制御 [1] や制御空間内にエージェントを指定された分布で配置させる被覆制御 [2] はよく知られている。エージェントの初期配置と収束した最終配置の関係からこれらのフォーメーション制御について考えると、たとえば平均合意ではエージェントの初期配置を互いに交換しても最終状態である合意値は同じにある。また、勾配法によって重心ボロノイ配置を達成する被覆制御においては、エージェントの初期配置を互いに交換すると最終状態でも配置が交換される。

一方、文献 [3] では、エージェント同士を近づけないことが望ましいという観点から評価関数を設定し、制御空間内に埋め込まれた部分多様体上の等間隔点にエージェントを収束させることで、部分多様体の形状に沿っ

たフォーメーションを形成する制御手法を提案している。しかし、この部分多様体上のフォーメーション制御では、部分多様体を単位円とした場合でも、エージェントの初期配置に対する最終配置の議論が十分ではない。エージェントの初期配置を互いに交換しても軌道が円周上に到達することは保証されるが、いくつかのエージェントが同じ点に収束することがある。初期配置と最終配置の関係をすべて明らかにすることは現時点では困難である一方で、円上で互いに等間隔に収束するフォーメーションについて明らかにすることは実用上において重要と考えられる。同様に、文献 [4] では、エージェントを同期させるという観点から評価関数を設定し、円上の等間隔配置に関する制御について考察を行っている。

本論文では文献 [3] に基づいて、単位円上のフォーメーション制御において、エージェントが互いに等間隔となる点に収束するための初期配置について明らかにする。とくに、環状グラフの通信構造に限定し 2 次元空間に埋め込まれた単位円を部分多様体と考える。まず、マルチエージェントシステムに対して各エージェントの偏角を用いた保存量を導入する。つぎに、この保存量を用いて、エージェントが環状グラフの通信構造と同じ順序で互いに等間隔に収束するための条件を導く。最後に数値例を通して、条件を満たすエージェントの初期配置と最終配置を確認する。本論文に関連する多様体論の用語は付録 1. にまとめる。

* 原稿受付 2018 年 10 月 31 日
第 61 回自動制御連合講演会にて一部を発表 [8]

[†] 明治大学 理工学部 Faculty of Science and Engineering,
Meiji University; 1-1-1 Higashimita, Tama, Kawasaki,
Kanagawa 214-8571, JAPAN

Key Words: formation control, manifold, evenly spaced points.

2. 単位円上のフォーメーション制御

質点系で表される2次元空間 $\mathbb{R}^2$ 上の N 個のエージェントについて考える.

$$\dot{p}(t) = u(t) \quad (1)$$

ただし, $p = [p_1^\top \ p_2^\top \ \cdots \ p_N^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2N}$, $p_i = [p_{i,x} \ p_{i,y}]^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ はエージェント i の位置を表す. また, $u \in \mathbb{R}^{2N}$ は制御入力である. すべてのエージェントを $\mathbb{R}^2$ 空間に埋め込まれた部分多様体 M に等間隔収束させるため, つぎの制御則を与える.

$$u(t) = R(p(t)) - p(t) + \text{grad} \phi(R(p(t))) \quad (2)$$

ただし, $R(p) = [r(p_1)^\top \ r(p_2)^\top \ \cdots \ r(p_N)^\top]^\top \in M^N$ であり, $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ は制限写像であり, M 上の点を動かさない. また,

$$\phi(R(p)) = \sum_{j>i}^N W_{ij} \ln d(r(p_i), r(p_j))$$

である. ただし, $\phi: M^N \rightarrow \mathbb{R}$, $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ である. とくに, $d(r(p_i), r(p_j))$ は2点 $r(p_i), r(p_j) \in M$ を M 上で結ぶ短い方の測地線の距離を表す. また, $W_{ij} \in \{0, 1\}$ はエージェント i および j の間の通信を表す重みである. このとき, 関数 $\phi(R(p))$ はグラフ上で隣接するエージェント間の相対距離を評価している. 対数の性質から $\phi(R(p))$ の値は相対距離が近くなるにつれ $-\infty$ へ発散する. エージェントが等間隔収束するためにはエージェント同士の相対距離が近くなる状況を避ける必要がある. そのため, $\phi(R(p))$ を評価関数として最大化する制御入力 (2) 式を与えることで, エージェントの等間隔収束を期待する.

制御則 (2) 式における勾配 $\text{grad} \phi \in T_{R(p)} M^N$ は $\phi(R(p))$ の最急上昇方向を与えている. ゆえに, (1) 式および (2) 式から成る閉ループ系において $p(t)$ は時刻の経過とともに $\phi(R(p))$ を最大化することが期待できる. ただし, $\text{grad} \phi(R(p))$ のエージェント i に関するベクトルは

$$\sum_{j=1}^N \frac{W_{ij}}{d(r(p_i(t)), r(p_j(t)))} V_{ij} \quad (3)$$

となる. ここで, $V_{ij} \in T_{r(p_i)} M$ は $r(p_i)$ から $r(p_j)$ への単位速度ベクトルであり, $T_{r(p_i)} M$ は M 上の点 $r(p_i)$ における M の接線である. このとき, 時刻の経過にしたがい $p(t)$ は M^N 上に到達することが期待できる.

【補題 1】 ([3]) システム (1) 式に対して $\phi(R(p(t)))$ を最大化するように $u(t)$ を与えるとき, $p(t) \in M^N$ が成立する.

補題 1 は, 制御則 (2) 式の制限写像 r やエージェント間の通信構造にかかわらず成立する. また, $p(t) \in M^N$ のとき $R(p(t)) = p(t)$ が成立することに注意する. ある時刻で $p(t) \in M^N$ が成立すれば, その時刻以降ですべての

Fig. 1 Cycle graph

エージェントは M^N 上を移動するようになる. 平衡点は M^N 上に存在するが, 制御則 (2) 式によって収束するとは限らない.

一方で, ある領域 $P \subset M^N$ に対して, $p^* \in P$ が $\phi(p^*)$ で最大値をとるとき, p^* は漸近安定な平衡点であることが知られている [3]. P は不変集合であり, 平衡点に対応した領域が存在する. つまり, $\phi(p^*) \geq \phi(p)$ を満たす $p \in M^N$ の領域である. ある時刻で $p(t) \in P$ であれば, エージェントの軌跡は対応する平衡点へ向かうことが期待できる. P は不変集合なので, 初期状態 $p(0) \in \mathbb{R}^{2N}$ が属する不変集合によっても M^N 上で収束し得る平衡点は異なる.

以降では, $\mathbb{R}^2$ 空間に埋め込まれた部分多様体 M として原点を中心とする単位円を考え, エージェントの単位円上での等間隔点への収束を考える. このとき, 単位円上の2点を円周に沿って結ぶ測地線は円弧となる. M を単位円としたときの制限写像は,

$$r(p_i) = \frac{p_i}{\|p_i\|} \quad (4)$$

である. ここで, $\|p_i\|$ は p_i のユークリッドノルムを表す. また, エージェント間の通信構造を Fig. 1 に示す環状グラフとする. このとき, W_{ij} は次式を満たす.

$$\begin{cases} W_{ij} = W_{ji} = 1, & i \in \{1, \dots, N\}, j = i \pmod{N} + 1 \\ W_{ij} = W_{ji} = 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

このとき, つぎの補題が成立する.

【補題 2】 システム (1) 式におけるエージェント間の通信構造を (5) 式とする. 制限写像を (4) 式とする制御則 (2) 式を用いてすべてのエージェントが単位円上で収束すると仮定する. このとき, 通信構造上で隣り合うエージェント間の円弧上の長さはすべて等しくなる. すなわち, $i = 1, \dots, N-1$ に対して,

$$d(r(p_i(\infty)), r(p_{i+1}(\infty))) = d(r(p_N(\infty)), r(p_1(\infty))) \quad (6)$$

が成立する.

(証明) 付録 2. を参照せよ. □

補題 2 は, 通信構造上で隣り合うエージェントの最終配置は単位円上で円弧に沿って等間隔をとることを述べている. ただし, 円周上の定まった点で平衡状態をとるわけではない. 等間隔となる最終配置の点は初期配置

に依存する. また, $\phi(R(p))$ を最大化することで到達し得るすべての平衡点は漸近安定である. 逆に, 不安定な平衡点は通信構造上で隣り合うエージェント間の円弧の長さが 0 となる配置と考えることができる. このとき, $\phi(R(p)) = -\infty$ になる.

単位円上で N 個のエージェントが互いに等間隔点へ収束するとき, $\phi(R(p(\infty))) = N \log(2\pi/N)$ となる. 同様に, 偶数個のエージェントが互いに $\pi/2$ 離れた点へ重なりを許して収束するとき, $\phi(R(p(\infty))) = N \log(\pi/2)$ となる.

3. 初期配置条件の解析

システム (1) 式に対して制御則 (2) 式は評価関数 $\phi(R(p))$ を最大化するように作用し, 補題 1 によってエージェントの単位円上に到達することが保証される. また, $\phi(R(p))$ の最大化はグラフ構造で隣接するエージェント間の相対距離を引き離す方向で働くため, 補題 2 によってエージェントが単位円上の等間隔点に収束することが期待できることを述べた. しかしながら, これはすべてのエージェントが単位円上で互いに等間隔な点に収束することを意味しない. すなわち, エージェント数と初期配置によっては, いくつかのエージェントが単位円上の同じ点に収束し, そのような複数の点が等間隔になることがある. つまり, そのような複数の平衡状態が存在する.

この問題に対して, 本論文では Fig. 1 に示した通信構造の順にエージェントが単位円上で互いに等間隔収束するための初期配置条件について考える. また以降では, このような順序で互いに等間隔収束する場合のみ「フォーメーションを形成する」とよぶことにする. つまり, 単位円上でエージェントが時計回り順あるいは反時計回り順に互いに等間隔収束することがフォーメーションを形成することである.

そこで, エージェント i の位置を

$$p_i(t) = L_i(t) [\cos \alpha_i(t) \ \sin \alpha_i(t)]^T$$

と表す. ただし, L_i は p_i の動径, $\alpha_i \in [0, 2\pi)$ は p_i の偏角である. また, 通信構造上で隣接するエージェント i および j に対して, エージェント i から見たエージェント j の偏角の反時計回りの差を

$$\alpha_{ij}(t) := \begin{cases} \alpha_j(t) - \alpha_i(t), & \alpha_j(t) > \alpha_i(t) \\ 2\pi - (\alpha_i(t) - \alpha_j(t)), & \alpha_j(t) < \alpha_i(t) \end{cases} \quad (7)$$

と定義する. ここで, システム (1) 式は $\phi(R(p))$ を最大化するように制御則 (2) 式によって運用されているので, すべてのエージェントが単位円上に収束する限り α_i と α_j の大小関係が逆転することはない. なぜならば, α_i と α_j が近づくと $\phi(R(p))$ が $-\infty$ へ向かうためである. つまり, すべての時刻 $t > 0$ において $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$ であり, $\alpha_{ij}(t) > 0$ となる. さらに, つぎのスカラ量を定義する.

$$\nu(t) := \sum_{i=1}^{N-1} W_{ii+1} \alpha_{ii+1}(t) + W_{N1} \alpha_{N1}(t)$$

$\nu(t)$ はグラフ上で隣接するエージェント間の偏角差の総和を表す. とくに, Fig. 1 に示した通信構造の場合,

$$\nu(t) = \alpha_{12}(t) + \alpha_{23}(t) + \cdots + \alpha_{N-1N}(t) + \alpha_{N1}(t) \quad (8)$$

となる. (8) 式で表される $\nu(t)$ に関して, つぎの補題が成立する.

【補題 3】 エージェント間の通信構造を環状グラフとするシステム (1) 式に対して, 制限写像を (4) 式とする制御則 (2) 式を用いるとき, $\nu(t)$ は保存量である.

(証明) 付録 3. を参照せよ. $\square$

補題 3 は, 初期配置に依存せずに $\nu(t)$ が時刻 t と関係なく一定値をとることを述べている.

さらに, (8) 式で表される保存量 $\nu(t)$ に関して, つぎの補題が成立する.

【補題 4】 N 個のエージェントが反時計回り順および時計回り順で初期配置されるとき, 補題 3 で述べた保存量 $\nu(t)$ はつぎの値をとる.

$$\nu(t) = \begin{cases} 2\pi, & \text{counter-clockwise} \\ 2(N-1)\pi, & \text{clockwise} \end{cases}$$

(証明) 付録 5. を参照せよ. $\square$

補題 4 は, 動径にかかわらずエージェントの偏角の順序が Fig. 1 に示した通信構造と同じ順序であれば, その並びの向きによって保存量が一意に定まることを述べている.

補題 2~4 を用いると, エージェントの初期配置に関してつぎの定理が成立する.

【定理 1】 システム (1) 式におけるエージェント間の通信構造を (5) 式とする. 制限写像を (4) 式とする制御則 (2) 式を用いてすべてのエージェントが単位円上で収束すると仮定する. このとき, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上に初期配置された N 個のエージェントが単位円上に反時計回り順でフォーメーションを形成するための必要十分条件は $\nu(0) = 2\pi$ である. 同様に, 時計回り順でフォーメーションを形成するための必要十分条件は $\nu(0) = 2(N-1)\pi$ である.

(証明) 付録 5. を参照せよ. $\square$

定理 1 はエージェントが単位円上でフォーメーションを形成するための初期配置条件を与えている. 初期配置条件は保存量によって特徴付けられ, エージェントが並ぶ向きによって保存量の値は異なる. 保存量がこれらの値となるようにエージェントを配置するか通信構造を組み替えることで, 単位円上でエージェントが互いに等間隔な点に収束することが保証される.

定理 1 では初期配置のみに着目しているが, すべての時刻において $\nu(t)$ が一定であることを考慮すれば, エージェントの $\mathbb{R}^2$ 上での位置を (4) 式で単位円上に写像した

Table 1 Initial configuration 1

i	$(p_{i,x}(0), p_{i,y}(0))$
1	(1.4, 0.5)
2	(0.6, 2.0)
3	(-1.1, 1.1)
4	(-1.4, 1.2)
5	(-1.0, -0.6)
6	(-0.9, -1.8)
7	(-0.2, -1.5)
8	(1.6, -0.1)

Table 2 Initial configuration 2

i	$(p_{i,x}(0), p_{i,y}(0))$
1	(1.2, -0.2)
2	(0.9, -1.4)
3	(0.1, -1.6)
4	(-1.7, -1.5)
5	(-0.3, 1.3)
6	(1.3, 1.3)
7	(1.9, 0.6)
8	(0.6, 0.1)

点において互いを引き離すような振舞いを常にしていることになる。これは $\mathbb{R}^2$ 上のエージェントにおいても同様であり、エージェントが単位円上に到達する時刻によらず、互いの軌道が交わらないような振舞いをする。この事実は、グランドピークルのフォーメーション制御に応用する際には衝突回避に応用できる。

4. 数値例

エージェント間の通信構造を環状グラフとするシステム (1) 式に対して、制限写像を (4) 式とする制御則 (2) 式を適用する。ただし、 $N=8$ 、エージェントの初期配置 1 および 2 をそれぞれ Tables 1, 2 とする。

初期配置 1 および 2 から始まるエージェントの軌道を Figs. 2, 3 にそれぞれ示す。‘ $\times$ ’は初期状態、‘ $\bullet$ ’は最終状態を表す。最終状態ですべてのエージェントが単位円上の等間隔配置に収束している。すべての時刻における保存量は、初期配置 1 では約 $6.28 \approx 2\pi$ 、初期配置 2 では約 $43.98 \approx 2(N-1)\pi$ であった。したがって、どちらの初期配置も定理 1 の条件を満たしている。このとき、初期配置における評価関数の値はそれぞれ約 -4.42 、 -4.02 であり、時刻の経過とともに単調に増加し、最終配置ではどちらも約 $-1.93 \approx 8\log(2\pi/8)$ であった。ゆえに、平衡点に収束している。

試みに初期配置 1 のエージェント 1 と 2 の配置を交換した初期配置に対する軌道を Fig. 4 に示す。この場合、初期配置は定理 1 の条件を満たしていない。すべての時刻において保存量は約 12.57 となり一定であったが、最終状態でエージェントが互いに等間隔収束していない。2

Fig. 2 Trajectory with initial configuration 1

Fig. 3 Trajectory with initial configuration 2

Fig. 4 Trajectory with a modified initial configuration 1

個のエージェントが同じ点に収束し、そのような 4 点が等間隔収束している。これは本研究で目指すフォーメーションではない。このとき、初期配置における評価関数の値は約 -2.59 であり、時刻の経過とともに単調に増加し、最終配置では約 $3.61 \approx 8\log(\pi/2)$ であった。この場

合も平衡点に収束している。

5. おわりに

本論文では、環状グラフの通信構造を有する複数のエージェントに対して、2次元空間に初期配置し単位円上で互いに等間隔な点に収束するための初期配置条件について考えた。そのために、各エージェントの偏角から得られる保存量を定義し、初期状態において保存量が特定の条件を満たす場合にエージェントが単位円上の互いに等間隔な点に収束することを明らかにした。また、数値例で条件を満たす場合の初期配置と最終配置を確認した。

今後は、単位円以外の部分多様体に対しても互いに等間隔な点に収束するための初期配置条件について考える。

謝 辞

本研究の一部はJSPS科研費 JP19K0444, JP19H02158の助成を受けたものです。

参 考 文 献

- [1] R. Olfati-saber, J. A. Fax and R. M. Murray: Consensus and cooperation in networked multi-agent systems; *Proc. IEEE*, Vol. 95, No. 1, pp. 215–233 (2007)
- [2] J. Cortés, S. Martínez, T. Karatas and F. Bullo: Coverage control for mobile sensing networks; *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 20, No. 2, pp. 243–255 (2004)
- [3] J. M. Montanbruck, D. Zelazo and F. Allgöwer: Fekete points, formation control, and the balancing problem; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 62, No. 10, pp. 5069–5081 (2017)
- [4] D. A. Paley, N. E. Leonard, R. Sepulchre, D. Grünbaum and J. K. Parrish: Oscillator models and collective motion; *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 27, No. 4, pp. 89–105 (2007)
- [5] 松本: 多様体の基礎, 東京大学出版会 (1988)
- [6] G. E. Bredon: *Topology and Geometry*, Springer (1993)
- [7] 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, コロナ社 (1981)
- [8] 中井, 市原: 部分多様体上で等間隔収束するマルチエージェントシステムの初期配置に関する解析; 第61回自動制御連合講演会予稿集 (2018)

付 録

付録 1. 多様体に関する用語

【定義 1】 ([5], pp. 38–39) 位相空間 M が次の 2 条件を満たすとき, M を m 次元多様体という。

1. M はハウスドルフ空間である。
2. M の任意の点 p について, p を含む m 次元座標近傍が存在する。

【定義 2】 ([5], p. 155) 写像 $f: M \rightarrow N$ を C^r 級

Fig. A1 Unit velocity vector on geodesics

($r=1,2,\dots$) とする。 f が埋め込みであるとは、以下の 2 条件が成り立つことである。

1. すべての点 $p \in M$ について, f の微分 $(df)_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ が単射である。
2. f が M から像 $f(M)$ への同相写像である。

ただし, $T_p M$ は点 p における M の接空間を表す。

【定義 3】 ([6], p. 42) X を位相空間, A を X の部分空間とする。このとき, 連続写像 $f: X \rightarrow A$ が引き込み (retraction) であるとは, すべての $a \in A$ に対して $f(a) = a$ が成り立つことをいう。

定義 3 において, f の A への制限, つまり f の定義域を A に制限した写像 $f|_A$ は制限写像とよばれる。いまの場合, $f|_A: A \rightarrow A$ は同相写像になり, 定義 2 の条件 2 を満たす。 $f(a) = a$ であることから, 引き込み f は制限写像 $f|_A$ が恒等写像になる写像ということもできる。以上のように, 引き込みは制限写像の一種ではあるが, 本文中では引き込みを単に制限写像と表記している。

付録 2. 補題 2 の証明

すべてのエージェントが単位円上で収束するとき, 制御入力 (2) 式を 0 にする勾配 $\text{grad} \phi(r(p))$ のエージェント i に関する成分は (3) 式である。通信構造 (5) 式を考慮して, $i=1, \dots, N$ に関して (3) 式を展開すると, つぎのようになる。

$$\begin{cases} \frac{1}{d_{12}} V_{12} + \frac{1}{d_{1N}} V_{1N} = 0 \\ \frac{1}{d_{21}} V_{21} + \frac{1}{d_{23}} V_{23} = 0 \\ \frac{1}{d_{32}} V_{32} + \frac{1}{d_{34}} V_{34} = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{d_{N-1N-2}} V_{N-1N-2} + \frac{1}{d_{N-1N}} V_{N-1N} = 0 \\ \frac{1}{d_{NN-1}} V_{NN-1} + \frac{1}{d_{N1}} V_{N1} = 0 \end{cases}$$

ただし, $d_{ij} = d(r(p_i(\infty)), r(p_j(\infty))) \in [0, \pi]$ とする。たとえば, エージェント 1 に関する単位速度ベクトルと円弧を Fig. A1 に示す。平衡状態では図のように 2 本のベクトル V_{12} と V_{1N} は互いに真逆の方向を向くので,

$V_{1N} = -V_{12}$ である. 同様に考えると, $V_{21} = -V_{23}, V_{32} = -V_{34}, \dots, V_{N-1N-2} = -V_{N-1N}, V_{NN-1} = -V_{N1}$ である. $d_{ij} = d_{ji}$ を考慮すると, (3) 式は $E\alpha = 0$ とまとめることができる. ただし,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} 1/d_{12} \\ 1/d_{23} \\ 1/d_{34} \\ \vdots \\ 1/d_{N-1N} \\ 1/d_{N1} \end{bmatrix}$$

とする. 行列 $E \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は, 周期 N の既約な確率行列 $P \in \mathbb{R}_+^{N \times N}$ と N 次単位行列 I_N を用いて, $E = I_N - P$ と表すことができる. 一般に, 既約な確率行列は実固有値 1 を有する [7, p. 307]. また, P は非負な既約行列であるため, ペロン・フロベニウス定理 [7, p. 304] から, スペクトル半径に等しい代数的重複度 1 の実固有値を有し対応する固有ベクトルは正ベクトルである. いま, P のスペクトル半径に等しい固有値は 1 であり, 対応する固有ベクトルは $\mathbf{1}_N s$ ($s \neq 0$) と表すことができる. ゆえに, $P\mathbf{1}_N s = \mathbf{1}_N s$ が成立する. ただし, $\mathbf{1}_N$ はすべての要素が 1 の N 次ベクトルである. このとき, $(I_N - P)\mathbf{1}_N s = 0$ であることから, E は代数的重複度 1 の零固有値を有し対応する固有ベクトルは $\alpha = \mathbf{1}_N s$ であると解釈できる. したがって, (6) 式が成立する.

付録 3. 補題 3 の証明

偏角差 α_{ij} の時間微分は, (7) 式より

$$\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\alpha}_j - \dot{\alpha}_i \quad (\text{A1})$$

となる. ここで, (7) 式で定義される $\alpha_{ij}(t)$ は時刻 t に関して連続である一方, 偏角 $\alpha_i(t) \in [0, 2\pi)$ は偏角 0 を横切る時刻において連続ではない. しかしながら, そのような時刻の直前と直後で偏角の時間微分は一致する. また, (8) 式の時間微分は,

$$\dot{\nu} = \dot{\alpha}_{12} + \dot{\alpha}_{23} + \cdots + \dot{\alpha}_{N-1N} + \dot{\alpha}_{N1} \quad (\text{A2})$$

である. (A2) 式を (A1) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) + (\dot{\alpha}_3 - \dot{\alpha}_2) \\ &\quad + \cdots + (\dot{\alpha}_N - \dot{\alpha}_{N-1}) + (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_N) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. したがって, ν は保存量である.

付録 4. 補題 4 の証明

必要性: (a) N 個のエージェントが反時計回り順で初期配置されると仮定する. このときの一般性を失わない初期配置例を Fig. A2 に示す. 矢印は偏角差を表す. 保存量は (8) 式であるので, 図より明らかに $\nu(t) = 2\pi$ である.

(b) N 個のエージェントが時計回り順で初期配置されると仮定する. 同様な初期配置例を Fig. A3 に示す. ただし,

Fig. A2 Initial configuration with counter-clockwise

Fig. A3 Initial configuration with clockwise

議論の対象となる偏角差は一部のみ表記している. エージェント 1 と 2 の偏角差に着目すると, $\alpha_{12} = 2\pi - \alpha_{21}$ である. $\alpha_{23}, \alpha_{34}, \dots, \alpha_{N1}$ についても同様に考えると,

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= 2\pi - \alpha_{21} \\ \alpha_{23} &= 2\pi - \alpha_{32} \\ &\vdots \\ \alpha_{N-1N} &= 2\pi - \alpha_{NN-1} \\ \alpha_{N1} &= 2\pi - \alpha_{1N} \end{aligned}$$

となる. 保存量はこれらの総和であるため,

$$\nu(t) = 2N\pi - (\alpha_{21} + \alpha_{32} + \cdots + \alpha_{NN-1} + \alpha_{1N})$$

となる. ここで, (a) と同様に考えれば上式の括弧内は 2π である. したがって, $\nu(t) = 2(N-1)\pi$ を得る.

十分性: (a) $\nu(t) = 2\pi$ と仮定する. 保存量 (8) 式の偏角差 α_{ij} を (7) 式で展開すれば, 偏角 α_i ($i = 1, \dots, N$) はすべて打ち消され 2π が残ることになる. このとき, $\alpha_j < \alpha_i$ となる偏角差 α_{ij} に関するエージェント i および j の組 (i, j) が 1 箇所存在する. その 1 箇所は偏角差を表す矢印が角 0 を横切る場合に生じる. そこで, その 1 箇所となる (i, j) を任意に与え, 他の箇所ではすべて $\alpha_j > \alpha_i$ となるようにエージェントを初期配置することを考える. 一般性を失わない初期配置例を Fig. A4 に示す. 図では, $\alpha_j < \alpha_i$ となる偏角差 α_{ij} に関する組 (i, j) を $(N, 1)$ とし

Fig. A4 Configuration of $\alpha_1 < \alpha_N$

ている。このとき、 $\alpha_{N1} = 2\pi - (\alpha_N - \alpha_1)$ となることが確認できる。 $\nu(t) = 2\pi$ であるので、環状グラフにおいて互いに隣り合うエージェントに関しては $(i, j) = (N, 1)$ 以外のすべての組 (i, j) において $\alpha_j > \alpha_i$ が成立する。つまり、 $(i, j) = (1, 2)$ については $\alpha_2 > \alpha_1$ 、 $(i, j) = (N-1, N)$ については $\alpha_N > \alpha_{N-1}$ となるように配置される。この議論を続けると、エージェント 2 から $N-1$ までは Fig. A4 の斜線領域に反時計回り順に初期配置される。

(b) $\nu(t) = 2(N-1)\pi$ と仮定する。保存量 (8) 式の偏角差 α_{ij} を (7) 式で展開すれば、 $\alpha_i (i=1, \dots, N)$ はすべて打ち消され $2(N-1)\pi$ が残ることになる。このとき、 $\alpha_j < \alpha_i$ となる偏角差 α_{ij} に関するエージェント i および j の組 (i, j) が $N-1$ 箇所存在する。これは、 $\alpha_j > \alpha_i$ となる組 (i, j) が 1 箇所存在することを意味する。その 1 箇所は偏角差を表す矢印が角 0 を横切ることではない。そこで、その 1 箇所となる (i, j) を任意に与え、他の箇所ではすべて $\alpha_j < \alpha_i$ となるようにエージェントを初期配置することを考える。一般性を失わない初期配置例を Fig. A5 に示す。図では、 $\alpha_j > \alpha_i$ となる偏角差 α_{ij} に関する組 (i, j) を $(N, 1)$ としている。このとき、 $\alpha_{N1} = \alpha_1 - \alpha_N$ となることが確認できる。 $\nu(t) = 2(N-1)\pi$ であるので、環状グラフにおいて互いに隣り合うエージェントに関しては $(i, j) = (N, 1)$ 以外のすべての組 (i, j) において $\alpha_j < \alpha_i$ が成立する。つまり、 $(i, j) = (1, 2)$ については $\alpha_2 < \alpha_1$ 、 $(i, j) = (N-1, N)$ については $\alpha_N < \alpha_{N-1}$ となるように配置される。この議論を続けると、エージェント 2 から $N-1$ までは Fig. A5 の斜線領域に時計回り順に初期配置される。

付録 5. 定理 1 の証明

必要性: すべてのエージェントが通信構造と同じ順に単位円上で反時計回り順に互いに等間隔な点へ収束すると仮定する。このとき、補題 4 より $\nu(\infty) = 2\pi$ である。また、補題 3 より $\nu(t)$ は保存量であるため $\nu(0) = 2\pi$ である。

Fig. A5 Configuration of $\alpha_1 > \alpha_N$

時計回り順に互いに等間隔な点へ収束すると仮定する場合も同様に示すことができる。

十分性: $\nu(0) = 2\pi$ と仮定する。このとき、補題 4 よりすべてのエージェントは反時計回り順で初期配置されている。補題 3 より $\nu(t)$ は保存量であるため $\nu(\infty) = 2\pi$ である。よって、最終状態においては反時計回り順で収束する。また、補題 2 より $i=1, \dots, N-1$ について (6) 式が成立する。このとき、通信構造上で隣り合うエージェント i および j を結ぶ円弧の長さは $\alpha_{ij}(\infty) = d(r(p_i(\infty)), r(p_j(\infty)))$ である。したがって、すべてのエージェントは反時計回り順で単位円上に互いに等間隔な点に収束する。

$\nu(0) = 2(N-1)\pi$ と仮定する場合も同様に示すことができる。

著者略歴

なか い ゆう き
中 井 優 希

2017 年 3 月明治大学理工学部機械情報工学科卒業、2019 年 3 月明治大学大学院理工学研究科機械工学専攻博士前期課程修了。現在、三菱電機株式会社に勤務。在学中、マルチエージェントシステムの制御に興味をもつ。

いち はら ひろ ゆき
市 原 裕 之 (正会員)

2000 年 3 月明治大学大学院理工学研究科機械工学専攻博士後期課程修了。同年 4 月明治大学理工学部助手、2001 年 7 月茨城大学大学院理工学研究科 SVBL 非常勤研究員、2002 年 4 月九州工業大学情報工学部助手、2010 年 4 月明治大学理工学部専任講師、2013 年 10 月同准教授、2019 年 4 月同教授となり現在に至る。2016 年 4 月から 1 年間 LAAS-CNRS (フランス) 客員研究員。制御工学の研究に従事。博士 (工学)。計測自動制御学会、IEEE の会員。