離散時間適応繰り返し制御系の設計*

石飛 光章**・岩井 善太**・廣本 恵一**・日野 満司**

A Design of a Discrete-Time Adaptive Repetitive Control System*

Mitsuaki ISHITOBI**, Zenta Iwai**,
Keiichi HIROMOTO** and Mitsushi HINO**

This paper presents an adaptive repetitive control scheme for discrete-time linear systems. The boundedness of input and output signals, and the convergence of the control error are proved.

A discrete-time repetitive control structure with a specified convergence property for known parameters plants was considered by Shinnaka. However, when plant parameters are not known, the desired convergence speed is not accomplished. Since the algorithm with adaptive mechanism proposed here, is able to achieve the specified convergence rate of the control error for unknown parameters systems, the convergence speed is improved. Simulation examples are shown to confirm the effectiveness of the design scheme presented in this paper.

1. 緒言

制御対象に単一の応答を何回も繰り返させることを要求する場面は、産業用ロボットなどによく見受けられる。この要求に応じる制御方法の一つとして繰り返し制御系が提案されている^{1,2}。

このような要求に応えるもう一つの制御方法である学習制御系³が非最小位相系に対しては設計が複雑化する⁴のに対し、この繰り返し制御系は非最小位相系に対して最小位相系と同様に適用可能であるという長所を有している⁵。

繰り返し制御系に関してもいくつかの方法が提案されているが、その一つとして多項式解法を基本とする離散時間繰り返し制御系の設計方法が新中により提案されている⁵。この方法は、プラントパラメータが既知である場合に閉ループ系の極を任意に指定できる点、および設計が簡単である点に特徴を有している。しかしこの方法によって極を任意の位置に配置するためにはプラントのパラメータ値が正確にわかっていることが要求される。

一般にはプラントのパラメータ値が正確にわかっていることはまれであり、パラメータ誤認がある場合にはこの方法では所望の位置に極を配置できない。この問題を解決するためにはプラントパラメータをオンラインで同定する適応機構を導入することが考えられる。

そこで本論文では、適応機構を導入した離散時間繰り返し制御系について論じる。適応機構を導入したときには安定性、すなわち入出力信号の有界性、および規範出力へのプラント出力の収束性が保証できるか否かが問題となる。そこで、ここではその証明を与える。すなわち、持続的励振 (Persistently Exciting ; PE) 条件成立のもとでは大域的漸近安定性が成り立ち、また PE 条件が成立しない場合にはプラントパラメータの真値近傍での局所的漸近安定性が成立することを示す。また、その収束速度を設計パラメータで指定できることもあわせて明らかにする。これによりパラメータ未知のプラントに対して、所望の閉ループ系の極を有する繰り返し制御系が設計できることになる。

なお、文献 6) では周期時変系を対象としてではあるが、適応機構を導入した離散時間繰り返し制御系が考察されている。そこではプラントが時変系であるという特殊性から、閉ループ系の安定性を確保するためにプラントの逆安定性が仮定されている。これに対し本論文では、

* 原稿受付 1987. 9. 30

** 熊本大学 工学部 Faculty of Engineering, Kumamoto University ; Kurokami, Kumamoto 860, JAPAN

Key Words : repetitive control, adaptive mechanism, discrete-time system, convergence rate, boundedness.

プラントの逆安定性の仮定なしに閉ループ系の安定性の証明を与えている。

また、本論文の制御系は目標値が周期的な場合の適応サーボ系とみることでもできる。適応サーボ系の研究はこれまでいくつか発表されているが⁷⁻¹¹、本研究はつぎに述べる点でこれら既発表とは異なっている。まず、文献7), 9) は制御系がフィードフォワード型の構成であるため、文献10) で指摘されているようにロバスト性に関して弱点をもつのにに対し、本論文の制御系はフィードバック型となっている。一方、文献10) は本論文と同様、フィードバック型の制御系構成ではあるが、PE条件が成立するための条件である Sufficient Richness 条件が満たされていても局所的安定性しか保証されない設計方法であるのにに対し、本論文の設計方法は PE 条件のもとで大域的安定性が保証されている。また、目標値とプラント出力との誤差の収束速度を表わす減衰度が定量化され、設計者によるその減衰度の指定可能性が明らかになっていることは、その設計方法を実システムに適用しようとする場合には重要なことである。文献8), 11) はフィードバック型の制御系構成で、文献10) の欠点のない設計方法に関する研究であるが、上述の点については触れられていないのにに対し、本論文では、減衰度が陽に表わされること、およびその減衰度が設計パラメータとして設計者によって任意に与えられることを明らかにしている。

以下、2. で問題の記述を行ない、3. で制御系の設計方法を示し、4. では制御系の安定性について述べ、5. においては数値シミュレーションを通して提案する制御系の有効性を論じる。

2. 問題の記述

制御対象は次式の1入出力離散時間線形系であるとする。

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) \quad (2.1)$$

ここに $y(t)$, $u(t)$ はそれぞれ出力、入力を表わす。また、 $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ は時間遅れ演算子 z^{-1} に関する、次式の互いに既約な多項式で次数 n , m は既知であり、係数は未知であると仮定する。

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \quad (2.2)$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m} \quad (2.3)$$

さらに、 $B(z^{-1})$ は $(1-z^{-N})$ と既約であると仮定する。ここに N は繰り返し規範出力 $y_d(t)$ の周期を表わす。また、 $B(z^{-1})$ の最初の係数 b_1 は0であってもよく、以下 $b_2, \dots$ についても同様である。

問題は、制御対象の出力 $y(t)$ が周期 N の規範出力

$y_d(t)$ に追従する、すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y_d(t) - y(t)] = 0 \quad (2.4)$$

となるように制御入力を構成することである。

3. 制御系の設計

制御対象のパラメータが既知である場合には、閉ループ系の極を任意に指定できるとともに、簡便であることを特徴とする設計方法が示されている⁵。しかし、5. のシミュレーション例で示すように、制御対象のパラメータが正確にわかっていない場合には、その方法では任意に極を配置することが困難となり、したがって所望の収束性能が得られなくなる。そこで、本節では制御対象のパラメータが未知である場合を考慮し、パラメータが既知である場合の設計方法に適応機構を導入した設計方法を示す。

まず安定な多項式 $C(z^{-1})$ (次数: $l \leq n+m-1$, $C(0)=1$) と $D(z^{-1})$ (次数 $\leq N+m+l-1$, $D(0)=1$) を与える。多項式 $C(z^{-1})$ は $B(z^{-1})$ とは既約であると仮定する。実システムに適用するときにはプラントパラメータの概略値は普通あらかじめわかっているため、 $B(z^{-1})$ とは既約な $C(z^{-1})$ を与えることは可能であり、このような仮定をおくことは不自然ではない。これらを用いて多項式方程式

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t, z^{-1})C(z^{-1})(1-z^{-N}) + \hat{P}(t, z^{-1})\hat{B}(t, z^{-1}) \\ = D(z^{-1}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\hat{P}(t, z^{-1}) = \hat{p}_0(t) + \hat{p}_1(t)z^{-1} + \dots + \hat{p}_{N+l-1}(t)z^{-N-l+1} \quad (3.2)$$

$$\hat{Q}(t, z^{-1}) = 1 + \hat{q}_1(t)z^{-1} + \dots + \hat{q}_{m-1}(t)z^{-m+1} \quad (3.3)$$

を満たすそれぞれ $(N+l-1)$ 次と $(m-1)$ 次の多項式 $\hat{P}(t, z^{-1})$, $\hat{Q}(t, z^{-1})$, および多項式方程式

$$\hat{R}(t, z^{-1})\hat{A}(t, z^{-1}) + \hat{S}(t, z^{-1})\hat{B}(t, z^{-1}) = C(z^{-1}) \quad (3.4)$$

$$\hat{R}(t, z^{-1}) = 1 + \hat{r}_1(t)z^{-1} + \dots + \hat{r}_{m-1}(t)z^{-m+1} \quad (3.5)$$

$$\hat{S}(t, z^{-1}) = \hat{s}_0(t) + \hat{s}_1(t)z^{-1} + \dots + \hat{s}_{n-1}(t)z^{-n+1} \quad (3.6)$$

を満たす $(m-1)$ 次と $(n-1)$ 次の多項式 $\hat{R}(t, z^{-1})$, $\hat{S}(t, z^{-1})$ を求める。ここで、 $\hat{A}(t, z^{-1})$, $\hat{B}(t, z^{-1})$ はプラントの同定パラメータ $\hat{a}_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$), $\hat{b}_i(t)$ ($2, \dots, m$) を用いて得られる多項式

$$\hat{A}(t, z^{-1}) = 1 + \hat{a}_1(t)z^{-1} + \dots + \hat{a}_n(t)z^{-n} \quad (3.7)$$

$$\hat{B}(t, z^{-1}) = \hat{b}_1(t)z^{-1} + \dots + \hat{b}_m(t)z^{-m} \quad (3.8)$$

である。また、

$$\hat{P}(t, z^{-1})\hat{B}(t, z^{-1}) = \sum_{i=0}^{N+t-1} \sum_{j=1}^m \hat{p}_i(t)\hat{b}_j(t)z^{-(i+j)} \quad (3.9)$$

と定義し、他も同様である。

(3.1), (3.4) 式の求解可能性の問題については次節で詳しく述べるが、多項式 $\hat{B}(t, z^{-1})$ と $C(z^{-1})$ とが既約でないとき、あるいは $\hat{A}(t, z^{-1})$ と $\hat{B}(t, z^{-1})$ とが既約でないときには一意解が求まらない。そこで、たとえば $\hat{B}(t, z^{-1})$ と $C(z^{-1})$ とが既約でないときには以下の手順をとる。

多項式 $\hat{B}(t, z^{-1})$ と $C(z^{-1})$ を共通多項式で除した多項式をそれぞれ $\hat{B}'(t, z^{-1})$, $C'(z^{-1})$ とする。そして安定多項式 $D(z^{-1})$ のかわりに $D'(z^{-1})$ を与えて、(3.1) 式と同様な多項式方程式の解 $\hat{Q}(t, z^{-1})$, $\hat{P}(t, z^{-1})$ を求め、 $\hat{Q}(t, z^{-1})$, $\hat{P}(t, z^{-1})$ のかわりにこれらを用いる。ここに、各多項式の次数は $\hat{Q}(t, z^{-1})$, $\hat{P}(t, z^{-1})$ として一意解が求まる範囲の整数を与える。

多項式 $\hat{A}(t, z^{-1})$ と $\hat{B}(t, z^{-1})$ とが既約でないときにも同様の手順をとる。

さてパラメータ同定機構としては、次式の重みつき最小 2 乗法調整則を用いる。

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + \frac{F(t-2)\phi(t-1)}{\alpha + \phi^T(t-1)F(t-2)\phi(t-1)} \\ &\times [y(t) - \phi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\alpha} \left[F(t-1) - \frac{F(t-1)\phi(t)\phi(t)^T F(t-1)}{\alpha + \phi(t)^T F(t-1)\phi(t)} \right] \\ (F(0) > 0, 0 < \alpha < 1) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\phi(t-1)^T = [y(t-1), \dots, y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-m)]$$

$$\hat{\theta}(t)^T = [-\hat{a}_1(t), \dots, -\hat{a}_n(t), \hat{b}_1(t), \dots, \hat{b}_m(t)]$$

そして制御入力

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t, z^{-1})(1-z^{-N})\hat{R}(t, z^{-1})u(t) \\ = \hat{P}(t, z^{-1})y_d(t) - \{\hat{P}(t, z^{-1}) \\ + \hat{Q}(t, z^{-1})(1-z^{-N})\hat{S}(t, z^{-1})\}y(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

と構成する。文献 5) では、制御入力を 2 段階にわたって決定するが、ここでは次節で安定性を示すことができるように 1 段階で与えている。

以上が制御系の構成である。

4. 安定性

本節では、3. で示した制御系を構成するときの安定性、すなわち入出力信号の有界性、および規範出力への

プラント出力の収束性を考察する。

まず、大域的漸近安定性を示すために、つぎの持続的励振 (PE) 条件の仮定が成立しているものとする。

仮定 4.1 (PE 条件)

任意の整数 i に対し、ある正整数 k , および正数 ρ_1 が存在し

$$\rho_1 I \leq \sum_{i=1}^{i+k} \phi(t)\phi(t)^T \quad (4.1)$$

となっているとする。

この仮定は、規範出力の PE 性に依存しており、規範出力が周波数成分を十分に含んでいれば一般的に成立することが明らかにされている^{12,13}。

仮定 4.1 の成立のもとで、入出力信号の有界性を表わすつぎの《定理 4.1》が成り立つ。

《定理 4.1》

仮定 4.1 のもとで

(i) 入出力信号 $\{u(t)\}$, $\{y(t)\}$ は有界である。

(ii) また、次式が減衰度 $\alpha^{1/2}$ で成立する。

$$[D(z^{-1})y(t) - \hat{B}(t-1, z^{-1})\hat{P}(t-1, z^{-1})y_d(t)] \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (4.2)$$

(証明)

適応制御に関する他の研究と同様、finite escape time は存在しないという仮定のもとで考えているため、

(i)(ii) とともに $t \rightarrow \infty$ のときが問題となる。

まず PE 条件の仮定のもとで、プラントパラメータの同定値は真値に減衰度 $\alpha^{1/2}$ で収束し¹⁴、仮定より多項式 $A(z^{-1})$ と $B(z^{-1})$, および $B(z^{-1})$ と $C(z^{-1})$ が既約であるため、 $t \rightarrow \infty$ では同定値を用いた多項式 $\hat{A}(t, z^{-1})$ と $\hat{B}(t, z^{-1})$ および $\hat{B}(t, z^{-1})$ と $C(z^{-1})$ は既約となる。したがって多項式 $\hat{R}(t, z^{-1})$, $\hat{S}(t, z^{-1})$, $\hat{P}(t, z^{-1})$, $\hat{Q}(t, z^{-1})$ は一意に定まる¹⁵。

以下、文献 16) に準じて証明を行なう。 $t \rightarrow \infty$ の場合が問題であるため、 $\hat{R}(t, z^{-1})$, $\hat{S}(t, z^{-1})$, $\hat{P}(t, z^{-1})$, $\hat{Q}(t, z^{-1})$ が一意に定まるとして関係式を導く。

まず時変多項式 $\hat{A}(t, z^{-1})$, $\hat{B}(t, z^{-1})$ を使い次式を定義する。

$$\hat{A} \cdot \hat{B} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m \hat{a}_i(t)\hat{b}_j(t)z^{-(i+j)} \neq \hat{B} \cdot \hat{A} \quad (a_0(t) = 1) \quad (4.3)$$

ここで、 $\hat{A}$, $\hat{B}$ が時不変のときは $\hat{A}\hat{B} = \hat{A} \cdot \hat{B} = \hat{B} \cdot \hat{A}$ となる。さらに

$$\hat{B} = \hat{B}(t-1, z^{-1}) \quad (4.4)$$

を定義する。そして、以下でキーとなる方程式 (4.6) 式をあげる。なお、表記の簡単化のため、誤解を生じない範囲で多項式中の (t, z^{-1}) は省略して表現する。モデル

† 次式を満足するとき、 $x(t)$ は減衰度 $|\lambda|$ で 0 に減衰するといわれる。

$|x(t)| \leq C_0(\lambda)^t$, C_0 : 正数, $0 < |\lambda| < 1$

ング誤差 $e(t)$ を

$$e(t) = y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1) \quad (4.5)$$

と定義すると, $\phi(t-1)$, $\hat{\theta}(t-1)$ の定義, および (4.4) 式より

$$\begin{aligned} e(t) &= y(t) - \{(1 - \hat{A})y(t) + \hat{B}u(t)\} \\ &= \hat{A}y(t) - \hat{B}u(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

である.

さて, プラントパラメータの真値が既知のとき, (3.12) 式の $\cdot$ を除いた式をプラント方程式に代入し, $u(t)$ を消去すれば

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{BP}{AQ(1-z^{-N})R} y_d(t) \\ &\quad - \frac{BP+BQ(1-z^{-N})S}{AQ(1-z^{-N})R} y(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

より

$$y(t) = \frac{BP}{D} y_d(t) \quad (4.8)$$

となり, 同様に $y(t)$ を消去すれば

$$u(t) = \frac{PA}{D} y_d(t) \quad (4.9)$$

が得られる. このことから仮想的な補助信号として

$$w(t) = \hat{A} \cdot \hat{P} y_d(t) \quad (4.10)$$

$$z(t) = \hat{B} \cdot \hat{P} y_d(t) \quad (4.11)$$

を定義すると, (3.12) 式より

$$\begin{aligned} w(t) &= \hat{A} \cdot \hat{P} y_d(t) \\ &= \hat{A} \cdot [\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R}u(t) + \{\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}\}y(t)] \\ &= \hat{A}\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R}u(t) + [\hat{A} \cdot \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R} \\ &\quad - \hat{A}\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R}]u(t) + \hat{A}\{\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}\}y(t) \\ &\quad + [\hat{A} \cdot \{\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}\} \\ &\quad - \hat{A}\{\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}\}]y(t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

である. ここで, (3.1), (3.4), (4.6) 式の関係を利用することにより $w(t)$ は

$$\begin{aligned} w(t) &= Du(t) + [\hat{A} \cdot \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R} - \hat{A}\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R}]u(t) \\ &\quad + [\hat{A} \cdot \{\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}\} - \hat{A}\{\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}\}] \\ &\quad y(t) + [\hat{P} \cdot \hat{B} - \hat{P}\hat{B}]u(t) + [\hat{A}\hat{P} - \hat{P} \cdot \hat{A}]y(t) \\ &\quad + [\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S} \cdot \hat{B} - \hat{B}\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}]u(t) \\ &\quad + [\hat{A}\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S} - \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S} \cdot \hat{A}]y(t) \\ &\quad + [\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}]e(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

と表わすことができる. 同様に, $z(t)$ は

$$\begin{aligned} z(t) &= [\hat{B} \cdot \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R} - \hat{B}\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R}]u(t) \\ &\quad + [\hat{B}\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R} - \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R} \cdot \hat{B}]u(t) + Dy(t) \\ &\quad + [\hat{B} \cdot \{\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}\} - \hat{B}\{\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}\}]y(t) \\ &\quad + [\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R} \cdot \hat{A} - \hat{Q}\hat{A}(1-z^{-N})\hat{R}]y(t) \\ &\quad - \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R}e(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

と表現できる. そこで (4.13), (4.14) 式をまとめて次のように書き直す.

$$\begin{bmatrix} D + [\hat{A} \cdot \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R} - \hat{A}\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R}] & [\hat{A} \cdot \{\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}\} - \hat{A}\{\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}\}] \\ + [\hat{P} \cdot \hat{B} - \hat{P}\hat{B}] & + [\hat{A}\hat{P} - \hat{P} \cdot \hat{A}] \\ + [\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S} \cdot \hat{B} - \hat{B}\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}] & + [\hat{A}\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S} - \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S} \cdot \hat{A}] \\ [\hat{B} \cdot \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R} - \hat{B}\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R}] & D + [\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R} \cdot \hat{A} - \hat{Q}\hat{A}(1-z^{-N})\hat{R}] \\ + [\hat{B}\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R} - \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R} \cdot \hat{B}] & + [\hat{B} \cdot \{\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}\} - \hat{B}\{\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}\}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(t) - [\hat{P} + \hat{Q}(1-z^{-N})\hat{S}]e(t) \\ z(t) + [\hat{Q}(1-z^{-N})\hat{R}]e(t) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

(4.15) 式は入力を $\{w(t)\}, \{z(t)\}, \{e(t)\}$ とし, 出力を $\{u(t)\}, \{y(t)\}$ とする線形時変系とみることができる.

ここで $e(t)$ はパラメータの同定誤差によって生じる信号であり, (4.15) 式左辺 $[\quad]$ の項はパラメータ同定の時変性に起因している.

つぎに仮定 4.1 のもとで, 同定パラメータが真値へ減衰度 $\alpha^{1/2}$ で収束することと, (3.1), (3.4) 式の連続性より, $t \rightarrow \infty$ で (4.15) 式左辺の $[\quad]$ 内は $\alpha^{1/2}$ の減衰度で 0 に漸近する. したがって有限で十分大きい t に対し (4.15) 式は特性多項式 $[D(z^{-1})]^2$ を持つ漸近安定系に近づく.

また, $\hat{A}(t, z^{-1})$, $\hat{B}(t, z^{-1})$, $\hat{P}(t, z^{-1})$, $\hat{Q}(t, z^{-1})$, $\hat{R}(t, z^{-1})$, $\hat{S}(t, z^{-1})$ の係数の有界性, $w(t)$, $z(t)$ の定義, $\{y_d(t)\}$ の有界性より $\{w(t)\}, \{z(t)\}$ は有界となる.

よって (4.15) 式より $\{u(t)\}, \{y(t)\}$, すなわち $\{\|\phi(t)\|\}$ は $e(t)$ と高々同程度で発散する.

そこで, 上の結果と重みつき最小 2 乗法同定則の性質¹⁷

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e(t)^2}{1 + \|\phi(t-1)\|^2} = 0 \quad (4.16)$$

を, 文献 16) の key technical lemma (lemma 6.2.1) に適用すれば,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (4.17)$$

が成り立ち, かつ $\{\|\phi(t)\|\}$ が有界となる. これより $\{u(t)\}, \{y(t)\}$ は有界となり, (4.6) 式より $e(t)$ も $\alpha^{1/2}$ の減衰度で減衰し,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\hat{A}y(t+1) - \hat{B}u(t+1)\} = 0 \quad (4.18)$$

が同じく減衰度 $\alpha^{1/2}$ で成立する.

(4.18) 式と $\{u(t)\}, \{y(t)\}, \{y_d(t)\}$ の有界性, $\hat{A}$, $\hat{B}$,

$\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}, \hat{S}$ の係数の有界性を使うと (3.1), (3.4) 式より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [C\hat{Q}(1-z^{-N})y(t+1) - \hat{B}\hat{P}(y_d(t+1) - y(t+1))] = 0 \quad (4.19)$$

すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [Dy(t) - \hat{B}(t-1, z^{-1})\hat{P}(t-1, z^{-1})y_d(t)] = 0 \quad (4.20)$$

が得られ、その減衰度も $\alpha^{1/2}$ となる。(証明終)

つぎに、指定した減衰度での大域的漸近安定性を表わす《定理 4.2》を示す。

《定理 4.2》(大域的漸近安定性)

仮定 4.1 のもとで、減衰度 $\sigma = \max(d_{\max}, \alpha^{1/2})$ で

$$y(t) \rightarrow y_d(t) \quad (t \rightarrow \infty) \quad (4.21)$$

が成立する。ここで、 $d_{\max}$ は安定多項式 $D(z^{-1})$ の特性根の絶対値の最大値を表わす。

(証明)

この定理も $t \rightarrow \infty$ の場合が問題であるため、多項式 $\hat{A}(t, z^{-1})$ と $\hat{B}(t, z^{-1})$ 、および $\hat{B}(t, z^{-1})$ と $C(z^{-1})$ が既約であるとして証明を行なう。

まず、制御偏差を

$$e_1(t) = y(t) - y_d(t) \quad (4.22)$$

と定義すると、パラメータの収束性と (3.1) 式より、減衰度 $\alpha^{1/2}$ で

$$\begin{aligned} D(z^{-1})e_1(t) \rightarrow \\ [D(z^{-1})y(t) - \{C(z^{-1})Q(z^{-1})(1-z^{-N}) \\ + P(z^{-1})B(z^{-1})\}y_d(t)] \quad (t \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (4.23)$$

となる。ここで、 $P(z^{-1}), Q(z^{-1})$ は (3.1) 式において、 $\hat{A}(t, z^{-1}), \hat{B}(t, z^{-1})$ のかわりに真値 $A(z^{-1}), B(z^{-1})$ を代入して得られる解を示す。

そして《定理 4.1》を使うと、(4.2) 式は、減衰度 $\alpha^{1/2}$ で

$$D(z^{-1})y(t) \rightarrow B(z^{-1})P(z^{-1})y_d(t) \quad (t \rightarrow \infty) \quad (4.24)$$

となることを意味するので

$$D(z^{-1})e_1(t) \rightarrow -C(z^{-1})Q(z^{-1})(1-z^{-N})y_d(t) \quad (t \rightarrow \infty) \quad (4.25)$$

となる。ここで、 $y_d(t)$ が周期 N の関数であること、すなわち

$$(1-z^{-N})y_d(t) = 0 \quad (4.26)$$

より、減衰度 $\alpha^{1/2}$ で

$$D(z^{-1})e_1(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (4.27)$$

が成立する。多項式 $D(z^{-1})$ は、その特性根の絶対値の最大値を $d_{\max}$ とする安定多項式であるから、(4.27) 式

より (4.21) 式が減衰度 $\sigma = \max(d_{\max}, \alpha^{1/2})$ で成立する。(証明終)

[補足 1]

《定理 4.2》および (4.8) 式からわかるように、初めに設計者が決めるべき安定多項式 $D(z^{-1})$ は、制御誤差の収束特性、および閉ループ系の特性を与える。プラントパラメータの真値が不明であり、その概略値を使って (3.1), (3.4) 式から $P(z^{-1}), Q(z^{-1}), R(z^{-1}), S(z^{-1})$ を求めて制御入力を作成する方法⁵では、収束特性を表わす多項式は $D(z^{-1})$ にはならず、したがって所望の収束性能を得ることはできない。5. においてシミュレーション例によって、これを示す。

[補足 2]

《定理 4.1》, 《定理 4.2》は PE 条件成立のもとでの大域的漸近安定性を示しているが、PE 条件が成立していないときには、パラメータ同定機構として $\alpha=1$ の最小 2 乗法調整則を用いることによって、プラントパラメータの真値近傍での局所的安定性が成り立つ。これはつぎのように説明できる。

プラントパラメータの真値近傍では多項式 $\hat{A}(t, z^{-1})$ と $\hat{B}(t, z^{-1})$ が互いに既約となるため、多項式方程式 (3.1), (3.4) 式は常に求解可能であり、したがって常に制御入力は構成できる。一方、PE 条件が成立しないときでも同定パラメータ値は一定値に収束する¹⁶。したがって (4.15) 式左辺 [] は、PE 条件が成立するときと同様に $t \rightarrow \infty$ で 0 に漸近する。

これより、真値近傍では入出力信号の有界性と (4.2) 式、および (4.21) 式が成立することが、《定理 4.1》, 《定理 4.2》と同様にして示される。ただし、《定理 4.2》のように減衰度を明確にすることはできない。

[補足 3]

《定理 4.2》に示すように、減衰度は $\max(d_{\max}, \alpha^{1/2})$ で定められるため、 $d_{\max}, \alpha$ として 0 に近い値を与えれば収束速度が改善される。しかし、実システムでは外乱、観測誤差、モデリング誤差があり、そのような理想的でない場合には、 $d_{\max}$ や α として 0 に近い値を与えるとその影響を過度に受ける。したがって、実システムに適用するときには、両者を考慮して $d_{\max}$ や α を決める必要がある。今後の検討課題である。

5. 数値シミュレーション

本節では 3., 4. で述べた設計法の有効性をシミュレーション例を通して確認する。制御対象はつぎの 2 次システムとする。

$$(1-2.1z^{-1}+1.3z^{-2})y(t) = (1.0z^{-1}+1.2z^{-2})u(t) \quad (5.1)$$

この系は零点を1.2と、単位円外にもち、従来のモデル規範形適応制御では制御系を設計することのできない非最小位相系である。

規範出力としては次の周期20の矩形に近い台形波とした。

$$y_d(t) = \begin{cases} 1 & (20i+1 \leq t \leq 20i+9) \\ 0 & (t = 20i, 20i+10) \\ -1 & (20i+11 \leq t \leq 20i+19) \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

プラントパラメータの概略値としては

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(0)^T &= [-\hat{a}_1(0), -\hat{a}_2(0), \hat{b}_1(0), \hat{b}_2(0)] \\ &= [2.0, -1.2, 1.1, 1.3] \end{aligned}$$

があらかじめわかっているものとし、これを初期値として使う。パラメータ初期値は真値から離れていても構わないが、ここでは収束性能を文献5)の方法と比較することがひとつの目的であり、そのためには文献5)の方法のコントローラに用いるプラントパラメータ値と本設計方法のパラメータ初期値を一致させる必要がある。パラメータ値を真値から離すと、文献5)の方法では収束しないため、このように真値に近い値を用いている。まず設計値として、 $F(0) = I_4$, $\alpha = 0.5$, $C(z^{-1}) = 1$ を与え、閉ループ系の特性を支配する多項式 $D(z^{-1})$ は1と選んだ。本論文で述べた設計手法によるプラントの出力を Fig. 1 に示し、Fig. 2 に適応機構を導入しない文献

Fig. 1 Adaptive repetitive control
 $\alpha = 0.5$, $d_{\max} = 0.0$

Fig. 2 Non-adaptive repetitive control

Fig. 3 Adaptive repetitive control
 $\alpha = 0.6$, $d_{\max} = 0.8$

5)の方法によるプラントの出力を示す。適応機構を導入しない方法では、パラメータ真値が不明のため、あらかじめわかっている $\theta(0)$ をパラメータ値として用いて制御系設計を行なっている。シミュレーション結果より明らかなように、適応機構を導入する場合は、2周期目から規範出力に追従しているようすがわかる。一方、適応機構を導入しない方法では、制御系全体としては安定で、制御誤差は収束傾向にあるが、速応性に欠けている。実際、この場合では閉ループ系の特性多項式は

$$\begin{aligned} &z^{24} - 0.208575z^{23} - 0.001570z^{22} + 0.162916z^{21} \\ &- 0.006080z^{20} - 0.001183z^{19} + 0.001400z^{18} \\ &- 0.001652z^{17} + 0.001954z^{16} - 0.002308z^{15} \\ &+ 0.002728z^{14} - 0.003224z^{13} + 0.003811z^{12} \\ &- 0.004503z^{11} + 0.005322z^{10} - 0.006290z^9 \\ &+ 0.007432z^8 - 0.008784z^7 + 0.010380z^6 \\ &- 0.012269z^5 - 0.076409z^4 + 0.207969z^3 \\ &+ 0.002280z^2 - 0.163763z + 0.007081 \end{aligned}$$

であり、特性根の絶対値を大きい順にあげると

$$0.9563, 0.9536, 0.9535, 0.9496, \dots$$

となっており、所望の特性多項式 $D(z^{-1}) = 1$ の特性根0からずれているため、これらの極が規範出力への追従遅れを大きく支配していると考えられる。

つぎに、 $\alpha = 0.6$, $D(z^{-1}) = 1 - 0.8z^{-1}$ としたときの本文の方法による出力を Fig. 3 に示す。他の条件は Fig. 1 の場合と同じとした。Fig. 3 の場合は減衰度が $\max(0.6^{1/2}, 0.8) = 0.8$ であるのに対し、Fig. 1 の場合は減衰度が $\max(0.5^{1/2}, 0.0) = 0.707$ である。《定理4.2》に示したように、減衰度を小さく与えることによって、収束速度を早くできることが Fig. 1, Fig. 3 よりわかる。

6. 結 言

本論文では、離散時間線形系に対して適応機構を導入した繰り返し制御系の設計法を示し、PE条件が成立

する場合では大域的漸近安定性が、PE 条件が成立しない場合にはプラントパラメータの真値近傍での局所的安定性がいえることを示した。本論文で述べた設計方法はつぎの特徴を有する。すなわち、従来の適応機構を導入しない設計方法では、プラントパラメータに誤認がある場合には、収束速度が悪いのに対し、本論文の設計方法では、制御誤差の減衰度を設計パラメータとして指定できるため、すぐれた収束速度を得ることができる。

参 考 文 献

- 1) 井上, 中野: 陽子シンクロトン電磁石電源の繰返し運転における高精度制御; 電気学会論文誌 C, 55 巻, C 31 号, pp. 234~240 (1980)
- 2) 井上, 岩井, 中野: プレイバックサーボ系の高精度制御; 電気学会論文誌 C, 101 巻, 4 号, pp. 89~96 (1981)
- 3) 川村, 宮崎, 有本: 動的システムの学習的制御法 (Betterment Process) の提案; 計測自動制御学会論文集, 22 巻, 1 号, pp. 55~62 (1986)
- 4) 杉江, 小野: 学習制御に関する一考察; システムと制御, 31 巻, 2 号, pp. 129~135 (1987)
- 5) 新中: 離散時間繰返し制御系の設計; 電子通信学会論文誌 A, J 69 巻, 11 号, pp. 1337~1343 (1986)
- 6) 新中: 周期時変系に対する繰返し制御; 電気学会論文誌 C, 106 巻, 10 号, pp. 209~214 (1986)
- 7) 南出: 内部安定な適応トラッキング系の設計; 計測自動制御学会論文集, 20 巻, 10 号, pp. 905~911 (1984)
- 8) 南出: 外乱を考慮した適応サーボ系の設計; 第 6 回 Dynamical System Theory シンポジウム予稿集, pp. 151~154 (1983)
- 9) 藤井, 水野: 未知確定外乱を考慮した離散時間適応極配置制御系; 計測自動制御学会論文集, 21 巻, 10 号, pp. 1021~1028 (1985)
- 10) 新, 北森: 直接法による適応サーボ系の設計; 計測自動制御学会論文集, 19 巻, 12 号, pp. 1018~1020 (1983)
- 11) 内門, 金井: 外乱に強い多変数非最小位相系の適応サーボ系の一設計; 計測自動制御学会論文集, 22 巻, 5 号, pp. 521~526 (1986)
- 12) R. M. Johnstone & B. D. O. Anderson: Exponential Convergence of Recursive Least Squares with Exponential Forgetting Factor Adaptive Control; Systems & Control Letters, Vol. 2, No. 2, pp. 69~76 (1982)
- 13) H. Elliott, R. Cristi & M. Das: Global Stability of Adaptive Pole Placement Algorithms; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 30, No. 4, pp. 348~356 (1985)
- 14) 井上, 石飛, 岩井, 得丸: 極指定可能なフィルタをもつ離散時間 MRACS の不動点定理による安定性の証明; 計測自動制御学会論文集, 21 巻, 9 号, pp. 921~927 (1985)
- 15) 鈴木, 新中, 田中: 適応極配置の一構成法; 計測自動制御学会論文集, 19 巻, 1 号, pp. 28~35 (1983)
- 16) G. C. Goodwin & K. S. Sin: Adaptive Filtering Prediction and Control; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1984)
- 17) R. Lozano L.: Independent Tracking and Regulation Adaptive Control with Forgetting Factor; Automatica, Vol. 18, No. 4, pp. 455~459 (1982)