Invariance の理論とその応用—X. ブロック無干渉化*

山下 裕**・島 公脩**

Theory of Invariance and its Applications—X. Block Decoupling*

Yuh YAMASHITA** and Masasuke SHIMA**

In this paper, we study the block decoupling problem of nonlinear systems with C^∞ -structures : $x = f(x) + G(x)u$, $y = h(x)$. Inputs and outputs are divided into N blocks, respectively. First, we propose a new algorithm by which we can determine the maximal locally controlled invariant distribution contained in $\text{Ker } dh$. This algorithm is an extension of nonlinear structure algorithm extensively used in the input-output linearization, and can be applied to systems which is not input-output linearizable. Moreover, it has an advantage in that we need not integrate the distribution.

Application of this algorithm to I -th output block yields a vector valued function $z_I(x)$. Then, the block decoupling problem is solvable if and only if each row of $D(G)z_I(x)$ is zero vector or is linearly independent of rows of other $D(G)z_J(x)$ ($J = 1, \dots, N; I \neq J$). The state feedback control law which accomplishes the block decoupling is derived from $z_I(x)$.

1. 序 言

本論文では、状態量に関して解析的かつ入力に関して線形な常微分方程式によって記述される非線形系における、ブロック無干渉化問題について考察する。

Geometric Approach による非線形系のブロック無干渉化問題の研究においては、線形系における (A, B) Invariant の考えを拡張した、 (f, g) Invariant あるいは Controlled Invariant Distribution なる概念が用いられている¹⁻³。Isidori らが求めた条件¹は、必要十分条件ではあるが、実際の計算が難しく、制御則が素直に求められる構造になっていない。また、Nijmeijer, Schumacher らは SIMO Subsystem の場合についての必要十分条件を求めている⁴。

一方、Geometric Approach とは別に、出力を時間で微分して得られる関数を用いた無干渉化問題の研究が

存在する。SISO Subsystem に分解するような無干渉化問題 (Morgan の問題) に対する、この方法を用いた研究では、Relative Order (Characteristic Number) が重要な役割を果たしていた⁵。ブロック無干渉化問題においても、MISO Subsystem に分解する場合には、Relative Order を用いて必要十分条件を求めることができる⁶。しかし、MIMO Subsystem に分解する一般的なブロック無干渉化問題については、この考え方では十分条件および必要条件を求めることはできるが、必要十分条件を求めることは困難である。つまり、出力を Relative Order 回以上微分して得られた関数も考慮する必要がある。この考えに沿ったブロック無干渉化以外の研究としては、入出力線形化が可能な非線形系に対して線形系の Structure Algorithm⁷を拡張した、Nonlinear Structure Algorithm^{3,8}がある。このアルゴリズムは入出力線形化などに、重要な役割を果たしている。入出力線形化が可能な系においては、このアルゴリズムと dh^+ に含まれる最大の Locally Controlled Invariant Distribution を求めるアルゴリズム¹は同値であることが示されている^{3,9}。しかし、Nonlinear Structure Algorithm は、線形化が不可能な系に対し

* 原稿受付 1987. 11. 19

** 北海道大学 工学部 Faculty of Engineering, Hokkaido University : North 13 West 8, Sapporo, 060 JAPAN

Key Words : block decoupling, nonlinear systems, (nonlinear) structure Algorithm, controlled invariant distribution, invariance.

ては適用できない。

本論文では、まず、Nonlinear Structure Algorithm を一般の系に対して拡張したアルゴリズムを示し、文献 1) のアルゴリズムと同値であることを示す。さらにそのアルゴリズムを用いて、ブロック無干渉化が可能であるための必要十分条件を求めた。

2. 問題の設定と諸定義

対象とする系は、

$$\dot{x}^i = f^i(x) + \sum_{j=1}^r g_j^i(x) u^j(t), \quad i=1, \dots, n \quad (2.1)$$

$$y^k = h^k(x), \quad k=1, \dots, m \quad (2.2)$$

なる微分方程式で表される非線形系である。ここで、 $x \triangleq \text{col.}(x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n$ は系の状態量、 $u \triangleq \text{col.}(u^1, \dots, u^r) \in \mathbf{R}^r$ は系への入力、 $y \triangleq \text{col.}(y^1, \dots, y^m) \in \mathbf{R}^m$ は系よりの出力である。また、 $f^i(x)$, $g_j^i(x)$, $h^k(x)$ は、解析関数 (C^ω) とする。この制御対象に、

$$u^i = \alpha^i(x) + \sum_{j=1}^r \beta_j^i(x) v^j(t), \quad i=1, \dots, r \quad (2.3)$$

なる状態フィードバックを施すと、閉ループ系は、

$$\dot{x}^i = \tilde{f}^i(x) + \sum_{j=1}^r \tilde{g}_j^i(x) v^j(t), \quad i=1, \dots, n \quad (2.4)$$

$$y^k = h^k(x), \quad k=1, \dots, m \quad (2.5)$$

となる。ただし、 $v \triangleq \text{col.}(v^1, \dots, v^r) \in \mathbf{R}^r$ は新しい入力であり、 $\tilde{f}(x)$, $\tilde{g}(x)$ は、

$$\tilde{f}^i(x) \triangleq f^i(x) + \sum_{j=1}^r g_j^i(x) \alpha^j(x), \quad i=1, \dots, n \quad (2.6)$$

$$\tilde{g}_j^i(x) \triangleq \sum_{k=1}^r g_k^i(x) \beta_j^k(x), \quad i=1, \dots, n; j=1, \dots, r \quad (2.7)$$

である。

ここで、 v および y を、添字の順に、 N 個のブロックに分割する。 $I(=1, \dots, N)$ 番目のブロックの入出力の数をそれぞれ r_I , m_I とする。さらに、

$$\hat{r}_0 \triangleq 0, \quad \hat{m}_0 \triangleq 0 \quad (2.8)$$

$$\hat{r}_I \triangleq \sum_{j=1}^I r_j, \quad \hat{m}_I \triangleq \sum_{j=1}^I m_j \quad (2.9)$$

とおくと、 $\hat{r}_N = r$, $\hat{m}_N = m$ は明らかである。また、

$$\bar{h}_I \triangleq \text{col.}(h_{\hat{m}_{I-1}+1}, \dots, h_{\hat{m}_I}), \quad I=1, \dots, N \quad (2.10)$$

とする。

ある領域 $U \subset \mathbf{R}^n$ と上記のブロックの分割が与えられたとき、 U においてブロック無干渉化するような $\alpha(x)$, $\beta(x)$ が存在するための条件、および存在するならばそ

の $\alpha(x)$, $\beta(x)$ を求めることが本論文の目的である。

3. 閉ループ系がブロック無干渉制御系であるための必要十分条件

まず、閉ループ系 (2.4), (2.5) 式および I 番目のブロックの出力 ($I=1, \dots, N$) に対して、Observation Space σ_I を、

$$\bar{h}_I^k \in \sigma_I, \quad k=1, \dots, m_I \quad (3.1)$$

$$D(\tilde{f})\gamma(x) \in \sigma_I, \quad \gamma(x) \in \sigma_I \quad (3.2)$$

$$D(\tilde{g}_i)\gamma(x) \in \sigma_I, \quad i=1, \dots, r; \gamma(x) \in \sigma_I \quad (3.3)$$

$$F(\gamma_1(x), \gamma_2(x), \dots) \in \sigma_I, \\ F(\cdot) \in C^\omega; \gamma_k(x) \in \sigma_I \quad (3.4)$$

を満たす最小の解析関数 (C^ω) の空間として定義する。 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ が異なれば σ_I は異なる。ただし、 $D(\cdot)$ はベクトル場による微分を表し、

$$D(f)\gamma(x) \triangleq \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \quad (3.5)$$

と定義される。 $\gamma(x)$ が s 次元の列ベクトルのときは、

$$D(f)\gamma(x) \triangleq \text{col.}(D(f)\gamma^1, \dots, D(f)\gamma^s) \quad (3.6)$$

と表すこととし、また、 $G \triangleq [g_1 | \dots | g_r]$ に対して、

$$D(G)\gamma(x) \triangleq [D(g_1)\gamma | \dots | D(g_r)\gamma] \quad (3.7)$$

と略記することとする。

次に、連立一階偏微分方程式系

$$D(g_i)F = 0, \quad D(\langle f, g_i \rangle)F = 0, \\ D(\langle f, \langle f, g_i \rangle \rangle)F = 0, \dots, \quad i=1, \dots, r \quad (3.8)$$

より生成される完全系のうち、一次独立な方程式が e 本であるとして、それらを、

$$D(\theta_1)F = 0, \dots, D(\theta_e)F = 0 \quad (3.9)$$

とおく。ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は Angular Bracket (Lie Bracket) で、その第 i 成分は、

$$\langle f, g \rangle^i \triangleq \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} g^j - \frac{\partial g^i}{\partial x^j} f^j \right) \quad (3.10)$$

で定義される。(3.9) 式の積分 $F(x)$ は、入力に関して Invariant¹⁰ な関数である。閉ループ系に対しても、

$$D(\tilde{g}_i)F = 0, \quad D(\langle \tilde{f}, \tilde{g}_i \rangle)F = 0, \\ D(\langle f, \langle \tilde{f}, \tilde{g}_i \rangle \rangle)F = 0, \dots, \quad i=1, \dots, r \quad (3.11)$$

より生成される完全系のうち、一次独立な方程式が $\bar{e}$ 本であるとして、それらを、

$$D(\tilde{\theta}_1)F = 0, \dots, D(\tilde{\theta}_{\bar{e}})F = 0 \quad (3.12)$$

とおく.

このとき, 閉ループ系 (2.4), (2.5) 式がブロック無干渉制御系であるための必要十分条件は, 次の2つが成り立つことである.

(i) Invariance 性¹¹ $I(=1, \dots, N)$ 番目の出力ブロックと, $J(=1, \dots, N)$ 番目の入力ブロックに対し, ブロックが異なる ($I \neq J$) とし,

$$D([\tilde{g}_{\hat{r}_{j-1}+1} | \dots | \tilde{g}_{\hat{r}_j}])\gamma(x) = 0, \gamma(x) \in \sigma_I \quad (3.13)$$

が成り立たねばならない.

(ii) 出力可制御性 出力可制御性として強出力可制御性と弱出力可制御性の2つが考えられるが¹², ここでは制御系は強出力可制御でなくてはならないとする. すなわち,

$$\text{rank } D(\tilde{\theta})h = m \quad (3.14)$$

が成り立たねばならない.

上記の2条件が成り立っているとき,

$$D(\tilde{\theta})\gamma(x) = 0, \gamma(x) \in \sigma_I \cap \sigma_J; \\ I=1, \dots, N; J=1, \dots, N; I \neq J \quad (3.15)$$

が成り立つ. つまり, 異なる I, J に対し, $\sigma_I \cap \sigma_J$ の要素は入力に関して Invariant である.

4. Locally Controlled Invariant Distribution

Involutive な Distribution $\mathcal{A}$ が Controlled Invariant Distribution であるとは, (2.6), (2.7) 式の $\tilde{f}, \tilde{g}_i$ に対して,

$$\langle \tilde{f}, \mathcal{A} \rangle \subset \mathcal{A} \quad (4.1)$$

$$\langle \tilde{g}_i, \mathcal{A} \rangle \subset \mathcal{A}, \quad i=1, \dots, r \quad (4.2)$$

を満たす $\alpha(x), \beta(x)$ が存在することである^{1,2}. Local に上式が成り立つならば, $\mathcal{A}$ は Locally Controlled Invariant Distribution であるという. $\perp$ を annihilator とすると, (4.1), (4.2) 式が成り立つことは, $\Omega \triangleq \mathcal{A}^\perp$ に対して,

$$L_{\tilde{f}}\Omega \subset \Omega \quad (4.3)$$

$$L_{\tilde{g}_i}\Omega \subset \Omega, \quad i=1, \dots, r \quad (4.4)$$

が成り立つことと同値である. ただし, L_f はリー微分作用素で, 基底を $dx^1, \dots, dx^n$ ととった一次微分形式 $\omega \triangleq \text{row.}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ に対しては,

$$L_f\omega \triangleq \left(\left[\frac{\partial \omega^T}{\partial x} \right] f \right)^T + \omega \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] \quad (4.5)$$

と定義されている. d は外微分を表す作用素であり, p 次元列ベクトル $a(x)$, $p \times q$ 行列 $B(x)$ に対して,

$$da(x) \triangleq \text{span}(da^1(x), \dots, da^p(x)) \quad (4.6)$$

$$dB(x) \triangleq \text{span}(dB^1(x), \dots, dB^q(x), \dots, \\ dB^1_q(x), \dots, dB^p_q(x)) \quad (4.7)$$

と表わすものとする.

本節では, $d\bar{h}_I^\perp$ に含まれる最大の Locally Controlled Invariant Distribution を求めるアルゴリズムについて考える. このようなアルゴリズムとしては, Controlled Invariant Distribution Algorithm (以下, C.I.D.A. と略記, Invariant Subdistribution Algorithm と呼ばれる) が知られている^{1,3,9}. 本論文では, ブロック無干渉化に用いる都合上, 文献1)とは異なり, 出力全体ではなく $d\bar{h}_I^\perp$ に含まれる Distribution を求めているが, 本質は全く変わらない.

アルゴリズム1 (C.I.D.A.)

$$\Omega_{I,1} \triangleq d\bar{h}_I \quad (4.8)$$

$$\Omega_{I,k} \triangleq \Omega_{I,k-1} + L_f(\Omega_{I,k-1} \cap G^\perp) \\ + L_g(\Omega_{I,k-1} \cap G^\perp), \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (4.9)$$

と $\Omega_{I,k}$ を定義する. ここで, $\Omega_{I,k}$, G , $\Omega_{I,k} \cap G^\perp$ は, $x \in U$ においてランクが一定であると仮定する. 以降, 本論文においては, この仮定が成り立っているとする. このとき, ある正の整数 k_I^* が存在して,

$$\Omega_{I,k} = \Omega_{I,k_I^*}, \quad k \geq k_I^* \quad (4.10)$$

となる. (4.10) 式の右辺を Ω_I^* とおく. すると, Ω_I^* は, $d\bar{h}_I^\perp$ に含まれる最大の Locally Controlled Invariant Distribution である. $\square$

静的な状態フィードバックによって線形化可能な系においては, Nonlinear Structure Algorithm^{3,8} が重要な役割を果たしている. このクラスの系においては,

$$L_g(\Omega_{I,k} \cap G^\perp) = 0 \quad (4.11)$$

が成り立つことを用いて, Nonlinear Structure Algorithm と C.I.D.A. の同値性を論ずることができる^{3,9}. 本論文では, 上式が成り立たない場合に対して, U における一様性の仮定のみで, C.I.D.A. と同値なアルゴリズムを, Nonlinear Structure Algorithm の拡張の形で求めた.

アルゴリズム2

Step 1 $\bar{h}_I$ を構成する各関数のうち, 関数的に独立であるものを選んで, それらの関数を並べた列ベクトルを $\zeta_{I,1}(x)$ とする. ここで,

$$p_{I,1} \triangleq \text{rank } D(G)\zeta_{I,1} \quad (4.12)$$

とし, $\zeta_{I,1}$ の要素のうち, $p_{I,1}$ 個の関数,

$$\xi_{I,1}^1(x), \dots, \xi_{I,1}^{p_{I,1}}(x) \quad (4.13)$$

を選び, 次の式が成り立つようにできる.

$$\xi_{I,1} \triangleq \text{col.}(\xi_{I,1}^1, \dots, \xi_{I,1}^{p_{I,1}}) \quad (4.14)$$

$$\text{rank } D(G)\xi_{I,1} = p_{I,1} \quad (4.15)$$

$\xi_{I,1}(x)$ の要素から $\xi_{I,1}(x)$ を選んだ残りの関数を並べた列ベクトルを $\eta_{I,1}(x)$ とする. $\eta_{I,1}(x)$ のベクトルの長さを $q_{I,1}$ とおく. また,

$$\bar{\xi}_{I,1} \triangleq \xi_{I,1}, \quad \bar{\eta}_{I,1} \triangleq \eta_{I,1} \quad (4.16)$$

と定義する. $D(G)\eta_{I,1}$ の各行は $D(G)\xi_{I,1}(x)$ の行に一次従属であるので,

$$D(G)\eta_{I,1}(x) = L_{I,1}(x) \cdot D(G)\xi_{I,1}(x) \quad (4.17)$$

を満たすような, $q_{I,1} \times p_{I,1}$ 行列 $L_{I,1}(x)$ が存在する.

$$\rho_{I,1}(x) \triangleq D(f)\eta_{I,1}(x) - L_{I,1}(x) \cdot D(f)\xi_{I,1}(x) \quad (4.18)$$

とおき, $\zeta_{I,2}(x)$ を,

$$\begin{aligned} d\zeta_{I,2}(x) + d\xi_{I,1} + d\eta_{I,1} \\ = d\rho_{I,1} + dL_{I,1} + d\xi_{I,1} + d\eta_{I,1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

を満たすような, 最小の長さの列ベクトルとする.

(4.19) 式より, $\zeta_{I,2}$ を構成する関数は, 互いに関数的に独立, かつ $\xi_{I,1}, \eta_{I,1}$ を構成する関数に関数的に独立である. $\zeta_{I,2}(x)$ は, 存在するならば簡単に求めることができる. $\eta_{I,1}$ が存在しないか, あるいは,

$$dL_{I,1} + d\rho_{I,1} \subset d\xi_{I,1} + d\eta_{I,1} \quad (4.20)$$

であれば $\zeta_{I,2}$ が存在せず, $k_I = 1$ において, アルゴリズムは終了する. その他の場合は, Step 2 へ進む.

Step k

$$p_{I,k} \triangleq \text{rank } D(G) (\bar{\xi}_{I,k-1}^T, \zeta_{I,k-1}^T)^T \quad (4.21)$$

とする. 列ベクトル $\zeta_{I,k}(x)$ の要素のうちから, $(p_{I,k} - p_{I,k-1})$ 個の関数,

$$\xi_{I,k}^1(x), \dots, \xi_{I,k}^{p_{I,k} - p_{I,k-1}}(x) \quad (4.22)$$

を選び,

$$\xi_{I,k} \triangleq \text{col.} (\xi_{I,k}^1, \dots, \xi_{I,k}^{p_{I,k} - p_{I,k-1}}) \quad (4.23)$$

$$\bar{\xi}_{I,k} \triangleq (\xi_{I,k}^T, \dots, \xi_{I,k}^T)^T \quad (4.24)$$

$$\text{rank } D(G)\bar{\xi}_{I,k}(x) = p_{I,k} \quad (4.25)$$

が成り立つようにできる. $\zeta_{I,k}$ の要素から $\xi_{I,k}$ を選んだ残りの関数を並べた列ベクトルを $\eta_{I,k}(x)$ とし, $\eta_{I,k}(x)$ のベクトルの長さを $q_{I,k}$ とおく. また,

$$\bar{\eta}_{I,k} \triangleq (\eta_{I,k}^T, \dots, \eta_{I,k}^T)^T \quad (4.26)$$

と定義する. $D(G)\eta_{I,k}$ の各行は $D(G)\bar{\xi}_{I,k}$ の行に一次従属であるので,

$$D(G)\eta_{I,k}(x) = L_{I,k}(x) \cdot D(G)\bar{\xi}_{I,k}(x) \quad (4.27)$$

を満たすような, $q_{I,k} \times p_{I,k}$ 行列 $L_{I,k}(x)$ が存在する.

$$\rho_{I,k}(x) \triangleq D(f)\eta_{I,k}(x) - L_{I,k}(x) \cdot D(f)\bar{\xi}_{I,k}(x) \quad (4.28)$$

とおき, また, $\zeta_{I,k+1}(x)$ を,

$$\begin{aligned} d\zeta_{I,k+1}(x) + d\bar{\xi}_{I,k} + d\bar{\eta}_{I,k} \\ = d\rho_{I,k} + dL_{I,k} + d\bar{\xi}_{I,k} + d\bar{\eta}_{I,k} \end{aligned} \quad (4.29)$$

を満たすような, 最小の長さの列ベクトルとする.

(4.29) 式より, $\zeta_{I,k+1}$ を構成する関数は, 互いに関数的に独立, かつ $\bar{\xi}_{I,k}, \bar{\eta}_{I,k}$ を構成する関数に関数的に独立である. $L_{I,k}, \rho_{I,k}$ を構成する関数より選び出すことで, $\zeta_{I,k}$ は, (存在するならば) 簡単に求めることができる. $\eta_{I,k}$ が存在しないか, あるいは,

$$dL_{I,k} + d\rho_{I,k} \subset d\bar{\xi}_{I,k} + d\bar{\eta}_{I,k} \quad (4.30)$$

であれば $\zeta_{I,k+1}$ が存在せず, そのときの k を k_I において, 本アルゴリズムは終了する. $\eta_{I,k}$ が存在し, かつ (4.30) 式が成り立たなければ, 次の Step に進む. $\square$

上記のアルゴリズムにおいて, $p_{I,k-1} = p_{I,k}$ ($1 \leq k \leq k_I$, ただし $p_{I,0} = 0$ とする) の場合は, $\xi_{I,k}$ を長さが 0 の列ベクトル, $L_{I,k}$ を $q_{I,k} \times 0$ の行列, $\rho_{I,k} \triangleq D(f)\eta_{I,k}$ とする.

ここで, $z_{I,k}$ を,

$$z_{I,k}(x) \triangleq (\bar{\xi}_{I,k}(x)^T, \bar{\eta}_{I,k}(x)^T)^T \quad (4.31)$$

と定義し, $\dim dz_{I,k}$, $\text{rank } D(G)z_{I,k}$ は, $x \in U$ において一定であると仮定する. 以下の議論においても, この仮定は有効であるものとする. また, 次節の定理 1 より, $d\bar{h}_I^+$ に含まれる最大の Locally Controlled Invariant Distribution は, dz_{I,k_I}^+ となる.

アルゴリズム 2 が, 文献 8) の Nonlinear Structure Algorithm と主に異なる点は, $L_{I,k}$ が定数とは限らない点と, 従属となった関数を次の Step に繰り越さずに捨てている点である. 独立な関数はたかだか n 個であるので, 有限回の Step で, $\zeta_{I,k}$ は生成されなくなりアルゴリズムは終了する. また,

$$(d/dt)\eta_{I,k} - L_{I,k}(x) \cdot (d/dt)\bar{\xi}_{I,k} = \rho_{I,k}(x) \quad (4.32)$$

となっている点に注意して頂きたい. すなわち, 文献 13) の計算と同様に,

$$\frac{d}{dt}\eta_{I,k} = D(f)\eta_{I,k} + D(G)\eta_{I,k} \cdot u \quad (4.33)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\xi}_{I,k} = D(f)\bar{\xi}_{I,k} + D(G)\bar{\xi}_{I,k} \cdot u \quad (4.34)$$

なる二つの式の右辺より, (4.27) 式を用いて, $u(t)$ を消去し, 残った関数が $\rho_{I,k}(x)$ である.

5. アルゴリズムの同値性

本節では, アルゴリズム 1 (C.I.D.A.) とアルゴリズム 2 の同値性について論ずる. 2 つのアルゴリズムの間には次のような関係がある.

定理1 $I=1, \dots, N$ に対して,

$$k_I^* = k_I \quad (5.1)$$

$$\Omega_{I,k} = dz_{I,k}, \quad k=1, \dots, k_I \quad (5.2)$$

なる式が成り立つ。□

定理1の証明 数学的帰納法を用いて証明する。 $k=1$ のときは,

$$\Omega_{I,1} = dz_{I,1} = d\bar{h}_I \quad (5.3)$$

となるので成り立っている。次に、ある $k(<k_I)$ に対し、

$$\Omega_{I,k} = dz_{I,k} \quad (5.4)$$

であると仮定する。ここで、行列 $B(x)$ の行すべてが張る空間を、 $\text{span}_{\text{row}} B(x)$ と表すと約束する。すると、

$$\Omega_{I,k} \cap G^\perp = \text{span}_{\text{row}} \left([\bar{L}_{I,k} | -I_{\bar{q}_{I,k}}] \left[\frac{\partial z_{I,k}}{\partial x} \right] \right) \quad (5.5)$$

が成り立っている。ただし、

$$\bar{q}_{I,k} \triangleq \sum_{j=1}^k q_{I,j} \quad (5.6)$$

$$\bar{L}_{I,k}(x) \triangleq \begin{bmatrix} L_{I,1} & & & \\ & L_{I,2} & & \\ & & \dots & \\ & & & L_{I,k} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

である。また、(4.27) 式より、

$$[\bar{L}_{I,k} | -I_{\bar{q}_{I,k}}] \cdot D(G)z_{I,k} = 0 \quad (5.8)$$

が成り立っている。 $\bar{L}_{I,k}$ の第 s 行を $\bar{L}_{I,k}^s$ 、 G の第 i 行を G^i と表すこととし、(5.8) 式の第 s 行の転置を x で偏微分すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} & G^T \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^s}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^{sT}}{\partial x} \right] \\ & + \sum_{i=1}^n G^{iT} \bar{L}_{I,k}^s \frac{\partial [\partial \bar{L}_{I,k}^s / \partial x]}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^n G^{iT} \frac{\partial [\partial \bar{\eta}_{I,k}^s / \partial x]}{\partial x^i} \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial G^{iT}}{\partial x} \right] \left(\bar{L}_{I,k}^s \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^s}{\partial x^i} \right] - \left[\frac{\partial \bar{\eta}_{I,k}^s}{\partial x^i} \right] \right) = 0, \\ & s=1, \dots, \bar{q}_{I,k} \quad (5.9) \end{aligned}$$

この式を考慮して $\Omega_{I,k} + L_g(\Omega_{I,k} \cap G^\perp)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \Omega_{I,k} + L_g(\Omega_{I,k} \cap G^\perp) &= \Omega_{I,k} \\ & + \sum_{s=1}^{\bar{q}_{I,k}} \text{span}_{\text{row}} \left(G^T \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^{sT}}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^s}{\partial x} \right] \right. \\ & \quad \left. - G^T \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^s}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^{sT}}{\partial x} \right] \right) \quad (5.10) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\text{rank } D(G)\bar{\xi}_{I,k} = p_{I,k}$ であるので、

$$\sum_{s=1}^{\bar{q}_{I,k}} \text{span}_{\text{row}} G^T \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^{sT}}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial \bar{\xi}_{I,k}}{\partial x} \right] \subset d\bar{\xi}_{I,k} \quad (5.11)$$

$$\sum_{s=1}^{\bar{q}_{I,k}} \text{span}_{\text{row}} G^T \left[\frac{\partial \bar{\xi}_{I,k}}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^{sT}}{\partial x} \right] = d\bar{L}_{I,k} \quad (5.12)$$

したがって、

$$\Omega_{I,k} + L_g(\Omega_{I,k} \cap G^\perp) = \Omega_{I,k} + d\bar{L}_{I,k} \quad (5.13)$$

が成り立つ。次に、 $\Omega_{I,k+1}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \Omega_{I,k+1} &\triangleq \Omega_{I,k} + L_f(\Omega_{I,k} \cap G^\perp) + L_g(\Omega_{I,k} \cap G^\perp) \\ &= \Omega_{I,k} + d\bar{L}_{I,k} \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\bar{q}_{I,k}} \text{span} \left(f^T \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^{sT}}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial \bar{\xi}_{I,k}}{\partial x} \right] \right. \\ &\quad \left. - f^T \left[\frac{\partial \bar{\xi}_{I,k}}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^{sT}}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial \bar{\rho}_{I,k}}{\partial x} \right] \right) \quad (5.14) \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\bar{\rho}_{I,k} \triangleq (\rho_{I,1}^T, \dots, \rho_{I,k}^T)^T \quad (5.15)$$

である。ここで、

$$\sum_{s=1}^{\bar{q}_{I,k}} \text{span } f^T \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^{sT}}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial \bar{\xi}_{I,k}}{\partial x} \right] \subset d\bar{\xi}_{I,k} \quad (5.16)$$

$$\sum_{s=1}^{\bar{q}_{I,k}} \text{span } f^T \left[\frac{\partial \bar{\xi}_{I,k}}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial \bar{L}_{I,k}^{sT}}{\partial x} \right] \subset d\bar{L}_{I,k} \quad (5.17)$$

であるので、(5.14) 式は、

$$\begin{aligned} \Omega_{I,k+1} &= \Omega_{I,k} + d\bar{L}_{I,k} + d\bar{\rho}_{I,k} \\ &= dz_{I,k+1} \quad (5.18) \end{aligned}$$

と書くことができる。上式が成り立てば、 $k_I^* = k_I$ は明らか。□

アルゴリズム2において、関数の選択が異なれば $\xi_{I,k}$ 、 $\eta_{I,k}$ も異なり、 $\xi_{I,k}$ 、 $\eta_{I,k}$ は一意に決定しない。しかし、定理1より、これについて、次の系が成り立つ。

系1 $I=1, \dots, N$; $k=1, \dots, k_I$ に対して、 $p_{I,k}$ および $dz_{I,k}$ は、関数の選択によらず、一定である。□

系1は、直接証明することもできるが、 $\Omega_{I,k}$ が一意に決定するので、定理1より明らかである。

6. ブロック無干渉化可能であるための必要十分条件

4. および5.の結果を用いて、系(2.1)、(2.2)式を状態フィードバック(2.3)式によってブロック無干渉化することができるための必要十分条件を求める。ここで、次の仮定をおこなう。

$$(1) \text{ rank } \beta(x) = r \quad (6.1)$$

(2) 制御対象 (2.1), (2.2) 式は, 強出力可制御である.

仮定 (1) より,

$$\tilde{e} = e \quad (6.2)$$

$$\text{span}(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_e) = \text{span}(\theta_1, \dots, \theta_e) \quad (6.3)$$

が成り立つので, 系 (2.1), (2.2) 式と系 (2.4), (2.5) 式の強出力可制御性は一致する. よって, 仮定 (2) より閉ループ系は強出力可制御である. したがって, 以降は, Invariance 性のみを調べればよい.

ここで, $\xi_I(x)$, $\eta_I(x)$, $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\rho_I(x)$, $L_I(x)$, $L(x)$, $\alpha(x)$, $B(x)$, p_I , p を次のように定義する.

$$\xi_I(x) \triangleq \bar{\xi}_{I, k_I}(x), \quad \eta_I(x) \triangleq \bar{\eta}_{I, k_I}(x), \quad I = 1, \dots, N \quad (6.4)$$

$$\xi(x) \triangleq (\xi_1(x)^T \dots \xi_N(x)^T)^T \quad (6.5)$$

$$\eta(x) \triangleq (\eta_1(x)^T \dots \eta_N(x)^T)^T \quad (6.6)$$

$$\rho_I(x) \triangleq \bar{\rho}_{I, k_I}, \quad I = 1, \dots, N \quad (6.7)$$

$$L_I(x) \triangleq \bar{L}_{I, k_I}(x), \quad I = 1, \dots, N \quad (6.8)$$

$$L(x) \triangleq \text{diag.} (L_1(x), \dots, L_N(x)) \quad (6.9)$$

$$\alpha(x) \triangleq -D(f)\xi(x) \quad (6.10)$$

$$B(x) \triangleq D(G)\xi(x) \quad (6.11)$$

$$p_I \triangleq p_{I, k_I}, \quad I = 1, \dots, N \quad (6.12)$$

$$p \triangleq \sum_{I=1}^N p_I \quad (6.13)$$

すると, 次の定理が成り立つ.

定理 2 $m_1, \dots, m_N$ が与えられ, $r_1, \dots, r_N$ が未知の場合, $x \in U$ において系 (2.1), (2.2) をブロック無干渉化するような制御則 (2.3) が存在するための必要十分条件は,

$$\text{rank } B(x) = p \quad (6.14)$$

である. $\square$

定理 3 $m_1, \dots, m_N, r_1, \dots, r_N$ が与えられている場合, $x \in U$ において系 (2.1), (2.2) をブロック無干渉化するような制御則 (2.3) が存在するための必要十分条件は,

$$\text{rank } B(x) = p \quad (6.15)$$

$$r_I \geq p_I, \quad I = 1, \dots, N \quad (6.16)$$

である. $\square$

(6.14) 式が成り立てば, $B(x)$ は $r \times p$ の行列であるから, (6.16) 式を満たすような $r_1, \dots, r_N$ は必ず存在する. よって, 定理 3 のみを証明すればよい.

定理 3 を証明する前に, (6.15), (6.16) 式が成り立つときフィードバック則 α, β を導く方法の 1 つについて述べる. まず, $\alpha'(x)$, $B'(x)$, $C_I(x)$, $C(x)$, $C'(x)$ を,

$$\alpha'(x) \triangleq (\alpha(x)^T \ 0 \dots 0)^T \in \mathbf{R}^n \quad (6.17)$$

$$B'(x) \triangleq \begin{bmatrix} B(x) \\ \vdots \\ * \dots * \end{bmatrix} \quad (r \times r \text{ 行列}) \quad (6.18)$$

$$C_I \triangleq [I_{p_I} \ 0] \quad (p_I \times r_I \text{ 行列}) \quad (6.19)$$

$$C \triangleq \text{diag.} (C_1, \dots, C_N) \quad (p \times r \text{ 行列}) \quad (6.20)$$

$$C' \triangleq \begin{bmatrix} C \\ * \dots * \\ \vdots \\ * \dots * \end{bmatrix} \quad (r \times r \text{ 行列}) \quad (6.21)$$

と定義する. ただし, $r = p$ の場合は, $\alpha'(x) \triangleq \alpha(x)$, $B'(x) \triangleq B(x)$, $C' \triangleq C$ とする. また, $r > p$ の場合, * の部分は,

$$\text{rank } B'(x) = r \quad (6.22)$$

$$\text{rank } C' = r \quad (6.23)$$

となるように決定するものとする. すると,

$$\alpha(x) = B'(x)^{-1} \cdot \alpha'(x) \quad (6.24)$$

$$\beta(x) = B'(x)^{-1} \cdot C' \quad (6.25)$$

のように $\alpha(x)$, $\beta(x)$ を決定することができる. このフィードバック則は, 仮定 (6.1) 式を満たしている.

定理 3 の証明 (十分性) (6.24), (6.25) 式の $\alpha(x)$, $\beta(x)$ に対して, (2.6), (2.7) 式の $\tilde{f}(x)$, $\tilde{g}(x)$ が定義されているとする. このとき, $\xi(x)$, $\eta(x)$ に $D(\tilde{f})$, $D(\tilde{G})$ (ただし, $\tilde{G} \triangleq [\tilde{g}_1 | \dots | \tilde{g}_r]$) を作用させると,

$$\begin{aligned} D(\tilde{f})\xi(x) &= D(f)\xi(x) + D(G)\xi(x) \cdot B'(x)^{-1} \alpha'(x) \\ &= D(f)\xi(x) + \alpha(x) = 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$D(\tilde{G})\xi(x) = D(G)\xi(x) \cdot B'(x)^{-1} \cdot C' = C \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} D(\tilde{f})\eta(x) &= D(f)\eta(x) + D(G)\eta(x) \cdot B'(x)^{-1} \alpha'(x) \\ &= D(f)\eta(x) \\ &\quad + L(x) \cdot D(G)\xi(x) \cdot B'(x)^{-1} \cdot \alpha'(x) \\ &= D(f)\eta(x) + L(x) \cdot \alpha(x) \\ &= (\rho_1^T, \dots, \rho_N^T)^T \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} D(\tilde{G})\eta(x) &= D(G)\eta(x) \cdot B'(x)^{-1} \cdot C' \\ &= L(x) \cdot D(G)\xi(x) \cdot B'(x)^{-1} \cdot C' \\ &= L(x) \cdot C \end{aligned} \quad (6.29)$$

となる. 上式を, ブロックごとの式に書き換えれば,

$$D(\tilde{f})\xi_I(x) = 0, \quad I = 1, \dots, N \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} D([\tilde{g}_{r_{J-1}+1} | \dots | \tilde{g}_{r_J}])\xi_I(x) &= \begin{cases} [I_{p_I} \ 0] & (I = J) \\ 0 & (I \neq J) \end{cases} \\ I = 1, \dots, N; J = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$D(\tilde{f})\eta_I(x) = \rho_I(x), \quad I = 1, \dots, N \quad (6.32)$$

$$D([\tilde{g}_{\hat{r}_{j-1}+1}|\cdots|\tilde{g}_{\hat{r}_j}])\eta_I(x) = \begin{cases} [L_I(x)|0] & (I=J) \\ 0 & (I \neq J), \end{cases}$$

$$I=1, \dots, N; J=1, \dots, N \quad (6.33)$$

となる。よって、(4.30)式より、

$$d(D(\tilde{f})\xi_I(x)) = \text{span}(0), \quad I=1, \dots, N \quad (6.34)$$

$$d(D(\tilde{g}_j)\xi_I(x)) = \text{span}(0),$$

$$j=1, \dots, r; I=1, \dots, N \quad (6.35)$$

$$d(D(\tilde{f})\eta_I(x)) \subset d\xi_I(x) + d\eta_I(x), \quad I=1, \dots, N \quad (6.36)$$

$$d(D(\tilde{g}_j)\eta_I(x)) \subset d\xi_I(x) + d\eta_I(x),$$

$$j=1, \dots, r; I=1, \dots, N \quad (6.37)$$

が成り立つ。また、

$$d\bar{h}_I(x) = d\xi_{I,1}(x) + d\eta_{I,1}(x) \subset d\xi_I(x) + d\eta_I(x),$$

$$I=1, \dots, N \quad (6.38)$$

であるので、(6.34)~(6.38)式と σ_I の定義より、

$$d\sigma_I \subset d\xi_I(x) + d\eta_I(x) = \Omega_I^* \quad (6.39)$$

が成立する。上式および (6.31), (6.33) 式より、Invariance 性の条件式 (3.13) が成り立つことは明らかである。□

次に、必要性の証明をおこなう。

定理3の証明 (必要性) 系をブロック無干渉化する $\alpha(x), \beta(x)$ が存在すると仮定する。すると、 $d\sigma_I^+$ は、系 (2.1), (2.2) の Locally Controlled Invariant Distribution であり、かつ、 $d\bar{h}_I^+$ に含まれることは明らかである。 Ω_I^{*+} は、 $d\bar{h}_I^+$ に含まれる Locally Controlled Invariant Distribution のなかでは最大であるので、

$$d\sigma_I \supset \Omega_I^* = d\xi_I + d\eta_I, \quad I=1, \dots, N \quad (6.40)$$

となっている。閉ループ系においては、Invariance 性の条件式 (3.13) 式が成り立たねばならないので、

$$D([\tilde{g}_{\hat{r}_{j-1}+1}|\cdots|\tilde{g}_{\hat{r}_j}])\xi_I = 0,$$

$$I=1, \dots, N; J=1, \dots, N; I \neq J \quad (6.41)$$

となる。ここで、行列 $R_I(x)$ を、

$$R_I(x) \triangleq D([\tilde{g}_{\hat{r}_{j-1}+1}|\cdots|\tilde{g}_{\hat{r}_j}])\xi_I,$$

$$I=1, \dots, N \quad (6.42)$$

とおく。(6.41), (6.42) 式より、

$$D(\tilde{G})\xi(x) = D(G)\xi(x) \cdot \beta(x)$$

$$= \text{diag.}(R_1(x), \dots, R_N(x)) \quad (6.43)$$

が成り立つ。よって、

$$D(G)\xi_I(x) \cdot \beta(x) = \underbrace{[0 \cdots 0]}_{\hat{r}_{I-1}} \underbrace{[R_I(x)]}_{r_I} \underbrace{[0 \cdots 0]}_{r-\hat{r}_I},$$

$$I=1, \dots, N \quad (6.44)$$

$$\text{rank } D(G)\xi_I = p_I, \quad I=1, \dots, N \quad (6.45)$$

であるので、(6.1) 式を考慮すると、

$$\text{rank } R_I(x) = p_I, \quad I=1, \dots, N \quad (6.46)$$

$$p_I \geq r_I, \quad I=1, \dots, N \quad (6.47)$$

でなければならない。(6.46) 式より、

$$\text{rank diag.}(R_1(x), \dots, R_N(x)) = p \quad (6.48)$$

が成り立つ。したがって、(6.1), (6.43) 式より、

$$\text{rank } B(x) = p \quad (6.49)$$

が証明された。□

(6.24), (6.25) 式の制御則による閉ループ系において、1 番目のブロックのサブシステムの状態変数は、

$$z_I \triangleq (\xi_I^T, \eta_I^T)^T \quad (6.50)$$

である。また、このとき、(6.39), (6.40) 式より、

$$d\sigma_I = \Omega_I^* = dz_I \quad (6.51)$$

が成り立つ。

(6.24), (6.25) 式の $\alpha(x), \beta(x)$ は系を線形化するとは限らない。また、安定化については考慮していないので、各サブシステムの状態変数を用いたフィードバックをブロックごとに施すことにより、(可能であるか否かは別として) ブロック無干渉制御系のまま安定化することを計るべきであろう。

7. 例題

次の例題を考える。

$$n=7, r=4, m=3, N=2 \quad (7.1)$$

$$r_1=3, r_2=1, m_1=2, m_2=1 \quad (7.2)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2(x^2-x^7) \\ x^4x^6+x^2+x^5-x^7 \\ x^2+x^6-x^7 \\ x^1-x^7 \\ x^7 \\ x^1-x^7 \\ x^2-x^7 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x^4 & x^4(x^1-x^7) & x^4 & 0 \\ 1 & x^1-x^7 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$h(x) = \text{col.}(x^7, -x^1+x^3+x^7, x^6) \quad (7.5)$$

この系に対して、 $k_I, \xi(x), \eta(x)$ を計算する。まず、

$I=1$, Step 1 に対して,

$$\zeta_{1,1}(x) = \text{col.}(x^7, -x^1+x^3+x^7) \quad (7.6)$$

$$D(G)\zeta_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x^1-x^7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

であるから,

$$\bar{\xi}_{1,1}(x) \triangleq \xi_{1,1}(x) = (-x^1+x^3+x^7) \quad (7.8)$$

$$\bar{\eta}_{1,1}(x) \triangleq \eta_{1,1}(x) = (x^7) \quad (7.9)$$

$$L_{1,1}(x) = [0], \quad \rho_{1,1}(x) = (x^2-x^7) \quad (7.10)$$

$$\zeta_{1,2}(x) = (x^2-x^7) \quad (7.11)$$

となる。 $I=1$, Step 2 に対しては,

$$D(G)(\bar{\xi}_{1,1}^T, \zeta_{1,2}^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & x^1-x^7 & 1 & 0 \\ x^4 & x^4(x^1-x^7) & x^4 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

であるので,

$$\xi_{1,2}(x) = (), \quad \bar{\xi}_{1,2}(x) = (-x^1+x^3+x^7) \quad (7.13)$$

$$\eta_{1,2}(x) = (x^2-x^7), \quad \bar{\eta}_{1,2}(x) = \text{col.}(x^7, x^2-x^7) \quad (7.14)$$

$$L_{1,2}(x) = [x^4], \quad \rho_{1,2}(x) = (x^5) \quad (7.15)$$

$$\zeta_{1,3}(x) = \text{col.}(x^4, x^5) \quad (7.16)$$

と計算される。ただし, () は, 長さが 0 の列ベクトルであるとする。 $I=1$, Step 3 に対しては,

$$D(G)(\bar{\xi}_{1,2}^T, \zeta_{1,3}^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & x^1-x^7 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

であるので,

$$\xi_{1,3}(x) = \text{col.}(x^4, x^5) \quad (7.18)$$

$$\bar{\xi}_{1,3}(x) = \text{col.}(-x^1+x^3+x^7, x^4, x^5) \quad (7.19)$$

$$\eta_{1,3}(x) = (), \quad \eta_{1,3}(x) = \eta_{1,2}(x) \quad (7.20)$$

となり, $I=1$ のループは Step 3 で終わる。よって, $k_1=3$ である。次に, $I=2$, Step 1 に対しては,

$$\zeta_{2,1}(x) = (x^6) \quad (7.21)$$

$$D(G)\zeta_{2,1} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (7.22)$$

であるので,

$$\bar{\xi}_{2,1}(x) \triangleq \xi_{2,1}(x) = () \quad (7.23)$$

$$\bar{\eta}_{2,1}(x) \triangleq \eta_{2,1}(x) = (x^6) \quad (7.24)$$

$$L_{2,1}(x) = [], \quad \rho_{2,1}(x) = (x^1-x^7) \quad (7.25)$$

$$\zeta_{2,2}(x) = (x^1-x^7) \quad (7.26)$$

となる。ただし, [] は, 列がない空の行列とする。

$I=2$, Step 2 に対しては,

$$D(G)(\bar{\xi}_{2,1}^T, \zeta_{2,2}^T)^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \quad (7.27)$$

であるので,

$$\bar{\xi}_{2,2}(x) = \xi_{2,2}(x) = (x^1-x^7) \quad (7.28)$$

$$\eta_{2,1}(x) = (), \quad \bar{\eta}_{2,2}(x) = \eta_{2,1}(x) \quad (7.29)$$

となり, $I=2$ のループは Step 2 で終わる。よって, $k_2=2$ である。

(6.10), (6.11) 式より,

$$a(x) = \text{col.}(-x^6, x^7-x^1, -x^7, x^7-x^2) \quad (7.30)$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 1 & x^1-x^7 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

$$a'(x) = a(x), \quad B'(x) = B(x) \quad (7.32)$$

$$C' = C = I_4 \quad (7.33)$$

$$\text{rank } B(x) = 4, \quad x \in \mathbf{R}^7 \quad (7.34)$$

$$\dim(d\bar{\xi}_{1,3}(x) + d\bar{\eta}_{1,3}(x) + d\bar{\xi}_{2,2}(x) + d\bar{\eta}_{2,2}(x)) = 7, \quad x \in \mathbf{R}^7 \quad (7.35)$$

であるので, $x \in U = \mathbf{R}^7$ において制御則が存在し,

$$a(x) = \text{col.}(-x^1+x^7, -x^7, -(x^7)^2+(x^1-1)x^7-x^6+x^1, -x^2+x^7) \quad (7.36)$$

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -x^1+x^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

と計算される。このとき, 座標変換,

$$z = \text{col.}(x^7, -x^1+x^3+x^7, x^2-x^7, x^4, x^5, x^6, x^1-x^7) \quad (7.38)$$

を用いて, 閉ループ系を表すと,

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z^3 \\ 0 \\ 0 \\ z^5 \\ 0 \\ 0 \\ z^7 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ z^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v \quad (7.39)$$

$$y = \text{col.}(z^1, z^2, z^6) \quad (7.40)$$

と表すことができる。この系がブロック無干渉化されていることは, 明らかである。

8. 結 言

本論文では, まず, 入出力線形化不可能な系に対して, Nonlinear Structure Algorithm を拡張した。次に,

このアルゴリズムを用いて、ブロック無干渉化の必要十分条件を求め、あわせて制御則を構成する方法を示した。

アルゴリズム2と Controlled Invariant Distribution Algorithm との間には (Local な) 同値性が存在する。上記の必要十分条件の必要性の証明には、この同値性を用いた。アルゴリズム2が C.I.D.A. と比べて有利なのは、 dh_1^+ に含まれる最大の Locally Controlled Invariant Distribution を積分した関数を直接求めることができる点である。ただし、生成する関数は一意的には決定しない。また、文献3), 8) の Nonlinear Structure Algorithm のかわりとして、入出力線形化に用いることは適当でない。

高次の系に対して本論文のアルゴリズムを手で計算することは大きな労力を要する。したがって、実際に用いる際は、計算機による数式処理を用いることが望ましい。筆者は、本論文の方法に基づいたプログラムを MACSYMA で試作し、7. の例題の計算に用いた。

本論文で扱ったブロック無干渉化問題は、 $x \in U$ における一様性を仮定している。その意味で、今回の方法は Local であるといえる。しかし、非線形系において完全に Global な制御則を求めることは、ブロック無干渉化に限らず、非常に困難な問題であると思われる。

今後の課題としては、Full Control の仮定 (6.1) 式がない場合のブロック無干渉化などがあげられる。また、アルゴリズム2は、ブロック無干渉化問題に限らず、一般の問題に適用することができるであろう。

参 考 文 献

- 1) A. Isidori, A. J. Krener, C. Gori-Giorgi & S. Monaco : Nonlinear Decoupling via Feedback : A Differential Geometric Approach ; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-26, No. 2, pp. 331~345 (1981)
- 2) H. Nijmeijer : Controlled Invariance for Affine Control Systems ; Int. J. Contr., Vol. 34, pp. 825~833 (1981)
- 3) A. Isidori : Nonlinear Control Systems : An Introduction, Springer-Verlag (1985)
- 4) H. Nijmeijer & J. M. Schumacher : The Regular Local Noninteracting Control Problem for Nonlinear Control Systems ; SIAM J. Contr. Opt., Vol. 24, No. 6, pp. 1232~1245 (1986)
- 5) 北, 島 : Invariance の理論とその応用-V. 無干渉制御系- ; システムと制御, 26 巻, 4 号, pp. 247~255 (1982)
- 6) 山下, 島 : Invariance の理論による非線形系のブロック無干渉化 ; 第 29 回自動制御連合講演会予稿集 (1986)
- 7) L. M. Silverman : Inversion of Multivariable Linear Systems ; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-14, No. 3, pp. 270~276 (1969)
- 8) A. Isidori & A. Ruberti : On the Synthesis of Linear Input-Output Responses for Nonlinear Systems ; Syst. Contr. Lett., Vol. 4, pp. 17~22 (1984)
- 9) M. D. Di Beedetto : On the Equivalence of the Invariant Subdistribution Algorithm and the Structure Algorithm ; Syst. Contr. Lett., Vol. 8, pp. 137~145 (1986)
- 10) 島, 川上, 得丸 : Invariance の理論とその応用-I. 操作量を線形に含む非線形系の Invariance- ; システムと制御, 23 巻, 10 号, pp. 594~601 (1979)
- 11) 島, 石動, 運崎 : Invariance の理論とその応用-VII. 外乱無干渉化- ; システムと制御, 29 巻, 1 号, pp. 45~54 (1985)
- 12) 山下, 島 : Invariance の理論とその応用-IX. 多入力多出力非線形系の出力可制御性 ; システムと制御, 31 巻, 6 号, pp. 450~456 (1987)
- 13) 北, 島 : Invariance の理論とその応用-VI. 対応定数による表現と L 積分左逆システムの設計 ; システムと制御, 26 巻, 12 号, pp. 791~800 (1982)