あるクラスの伝達関数を有する広義の平衡形 実現とその低感度性*

岩 月 正 見**・樋 口 龍 雄**

Balanced Realizations in the Wide Sense with a Class of Transfer Functions
and Their Low Sensitivity*

Masami IWATSUKI** and Tatsuo HIGUCHI**

This paper shows that balanced realizations in the wide sense have minimum statistical sensitivity and pole sensitivity, if the transfer functions have interlacing poles and zeros on the real axis of z -plane (i.r.p.z.). If the transfer functions have i.r.p.z., the balanced realizations in the wide sense can be easily obtained by computing the partial fraction expansion of the transfer functions. Since the state transition matrices of the obtained balanced realizations are diagonal, they can be implemented with much fewer parameters than balanced realizations with fully dense coefficient matrices.

1. ま え が き

与えられた伝達関数を実現するための標準構造は、従来から数多く提案されている。これらの様々な標準構造は無限の精度で実現されるならば、まったく等価な入出力特性を有している。しかし、パラメータの微小変動による入出力特性劣化の度合、すなわちシステム感度は実現構造によって大きく異なる。実際にシステムを実現する場合、希望の入出力特性からのずれは避けられないため、このようなシステム感度は実現構造を評価する上で、重要な尺度の一つとなる。著者らは、状態空間表現できる線形システム一般に対する感度の評価基準の一つとして、統計的感度を提案し、Mooreにより提案された平衡形実現 (balanced realization) が統計的感度を最小にする構造の一つであることを明らかにした³。平衡形実現は、可制御性と可観測性の強さという測度に着目した標準構造の一つであり、モデル低次化に適用されている^{1,2}。また、ディジタルフィルタの近似問題や丸め誤差最小構造と密接な関係にあることが知られている⁴。

しかし、平衡形実現の合成アルゴリズムは、Lyapunov方程式の解法や特異値分解などを必要とし、計算が複雑である。さらに平衡形実現の係数行列は完全に密であるため、パラメータ数が非常に多いという欠点がある。

本論文では、伝達関数のすべての極と零点が実軸上に交代して位置する時、広義の平衡形実現が統計的感度と極感度をともに最小化していることを明らかにする。またこの場合、伝達関数の部分分数展開によって得られたパラメータを直接用いて、広義の平衡形実現が極めて容易に合成できることが示される。さらに得られた実現構造の状態遷移行列は対角行列に選ぶことができるため、係数行列が完全に密である平衡形実現と比較して、非常に少ないパラメータ数で実現できるという優れた特徴を有する。最後に計算例を用いて、状態遷移行列が対角行列である広義の平衡形実現が種々の感度に関して、低感度性を有することが示される。

2. 広義の平衡形実現, 統計的感度最小構造 および極感度最小構造

2.1 広義の平衡形実現

n 次の安定で厳密にプロパーな伝達関数 $H(z)$ が次のように与えられたとする。

$$H(z) = \frac{q_1 z^{-1} + \dots + q_n z^{-n}}{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_n z^{-n}} \quad (1)$$

* 原稿受付 1987. 2. 24

** 東北大学 工学部 Faculty of Engineering, Tohoku University: Aramaki, Sendai 980, JAPAN

Key Words : balanced realization in the wide sense, interlacing real poles and zeros, statistical sensitivity, pole sensitivity, Cauchy index.

この伝達関数 $H(z)$ を有する離散時間線形システムの状態方程式は次式で表わされる。

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \quad (2.1)$$

$$y(k) = cx(k) \quad (2.2)$$

ここで、 $x(k)$ は n 次状態ベクトル、 $u(k)$ と $y(k)$ はそれぞれスカラーの入力と出力であり、 A, b, c はそれぞれ $n \times n, n \times 1, 1 \times n$ の実係数行列である。これらの係数行列を用いると、伝達関数は次のように表わされる。

$$H(z) = c(zI - A)^{-1}b \quad (3)$$

(2) 式で表わされるシステム (A, b, c) が可制御かつ可観測であるならば、次の Lyapunov 方程式

$$K = KA^t + bb^t = \sum_{i=0}^{\infty} A^i bb^t A^{it} \quad (4.1)$$

$$W = A^t W A + c^t c = \sum_{i=0}^{\infty} A^{it} c^t c A^i \quad (4.2)$$

の解 K と W は対称正定行列となる。 K と W はそれぞれシステム (A, b, c) の可制御性グラミアンおよび可観測性グラミアンと呼ばれている。それぞれのグラミアンの固有値の大きさが可制御性と可観測性の強さを定量的に表わす尺度であり、次節で述べる統計的感度と密接な関係がある³。

任意の $n \times n$ の正則行列 T により、状態ベクトルを $x'(k) = T^{-1}x(k)$ と変換すると、新しい状態ベクトルを有するシステム (A', b', c') は

$$A' = T^{-1}AT, b' = T^{-1}b, c' = cT \quad (5)$$

となる。この時、システム (A', b', c') の可制御性グラミアン K' と可観測性グラミアン W' は次式ようになる。

$$K' = T^{-1}KT^{-t} \quad (6.1)$$

$$W' = T^t W T \quad (6.2)$$

したがって、 K' と W' の固有値は等価変換行列 T により異なり、状態空間の可制御性と可観測性の強さが変化することがわかる。また、積 $K'W'$ の固有値は、(6) 式から次のようになる。

$$\begin{aligned} K'W' &= (T^{-1}KT^{-t})(T^t W T) \\ &= T^{-1}KWT \end{aligned} \quad (7)$$

したがって、積 $K'W'$ の固有値は等価変換に対して不変であることがわかる。

等価変換行列 T を適当に選ぶことにより、次の定義で示されるような平衡形実現が得られる^{1,2}。

「定義1 システム (A_b, b_b, c_b) の可制御性グラミアン K_b と可観測性グラミアン W_b が、関係式

$$\begin{aligned} K_b &= W_b = \Theta \\ &= \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ \theta_i &= [\lambda_i(KW)]^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

を満たす時、このシステムを平衡形実現という。ここで、 $\lambda_i(X)$ は行列 X の i 番目の固有値を表わす。」

(8) 式からわかるように、状態空間の可制御性と可観測性の強さが等しいことから、システム (A_b, b_b, c_b) は平衡形実現と呼ばれる。

さらに、上述の平衡形実現に対して、状態空間の座標軸に回転の自由度を加えたものを広義の平衡形実現 (balanced realization in the wide sense) と呼び、次のように定義する⁵。

「定義2 システム (A_{wb}, b_{wb}, c_{wb}) の可制御性グラミアン K_{wb} と可観測性グラミアン W_{wb} が、関係式

$$K_{wb} = W_{wb} = U^t \Theta U \quad (9)$$

を満たす時、このシステムを広義の平衡形実現と呼ぶ。ここで、 U は任意の直交行列である。」

(9) 式において、 $U = \pm I$ (I : 単位行列) と置けば、平衡形実現となることは容易にわかる。

2.2 統計的感度最小構造

システムパラメータの微小変動がどの程度出力に影響を及ぼすかを知ることは、システム感度を評価する上で重要である。したがって、本節では、このようなシステム感度の尺度の一つである統計的感度の定義を与え、統計的感度最小構造について述べる。

システム (A, b, c) に対して、その係数行列がランダムに変動しているとして次の仮想システムを考える。

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= [A + \Delta A(k)]\tilde{x}(k) + [b + \Delta b(k)]u(k) \\ \tilde{y}(k) &= [c + \Delta c(k)]\tilde{x}(k) \end{aligned} \quad (10.1)$$

$$\tilde{y}(k) = [c + \Delta c(k)]\tilde{x}(k) \quad (10.2)$$

ここで、係数行列の微小変動 $\Delta A(k), \Delta b(k), \Delta c(k)$ の各要素は、互いに無相関であり、その平均を0、分散を σ^2 ($0 < \sigma \ll 1$) とする。入力信号 $u(k)$ は、平均0、分散1の正規白色過程と仮定する。この時、定常誤差

$$E[\Delta y^2] = \lim_{k \rightarrow \infty} E\{[\tilde{y}(k) - y(k)]^2\} \quad (11)$$

が求められ、これを用いて統計的感度 S を次式で定義する。

$$S = E[\Delta y^2] / \sigma^2 \quad (12)$$

上式で表わされる統計的感度 S は、システムの可制御性と可観測性の強さと密接に関連しており、その可制御性グラミアンと可観測性グラミアンを用いて、次式で与えられることが知られている³。

$$S = \text{tr}[K] \text{tr}[W] + \text{tr}[KW] + \text{tr}[W] \quad (13)$$

上式は係数行列 (A, b, c) による伝達関数 $H(z)$ の偏微分のノルムで定義される係数感度の上限からも導出できることが知られている⁶ (4. (48) 式参照)。上式で表わされる統計的感度 S に関して次の命題が成り立つ。

「命題1 システム (A, b, c) が統計的感度最小構造であるための必要十分条件は、その可制御性グラミアン K と可観測性グラミアン W が次の関係式を満たすことである。

$$K = W = U^* \Theta U \quad (14)$$

この時、統計的感度 S は最小値として、

$$S_{\min} = \left(\sum_{i=1}^n \theta_i \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \theta_i \quad (15)$$

をとる。」

(証明) 文献3) 参照。

したがって、定義2と命題1より、統計的感度を最小にする実現構造は広義の平衡形実現であることがわかる。

2.3 極感度最小構造

伝達関数の極は安定性、入出力特性を決める上で重要である。したがって、システムパラメータの微小変動が、伝達関数の極にどの程度影響を及ぼすかを知ることは重要である。本節では、このような尺度である極感度を定義し、極感度最小構造について述べる。

伝達関数の極は、状態遷移行列 A の固有値として求められるから、極感度は次のように定義できる。

$$S_p = \sum_{i=1}^n \text{tr} \left\{ \left[\frac{\partial \lambda_i(A)}{\partial A} \right] \left[\frac{\partial \lambda_i(A)}{\partial A} \right]^* \right\} \quad (16)$$

ここで、 $*$ は共役転置を表わす。上式で表わされる極感度 S_p に関して次の命題が成り立つ。

「命題2 極感度 S_p が最小となるための必要十分条件は、状態遷移行列 A が正規行列すなわち、

$$AA^* = A^*A \quad (17)$$

となることである。このとき、極感度 S_p は最小値として、

$$S_{p \min} = n \quad (18)$$

をとる。」

(証明) 文献7) 参照。

3. あるクラスの伝達関数を有する広義の平衡形実現

本章では、伝達関数のすべての極と零点が実軸上で交代して位置する時（以下、このような極零点配置を持つことを性質 i.r.p.z. (interlacing real poles and zeros) を満たすという。）、広義の平衡形実現は統計的感度を最小にしているだけでなく、極感度をも最小にしていることを明らかにする。さらにこの場合、伝達関数の部分分数展開係数を直接用いて、広義の平衡形実現が極めて容易に合成できることを示す。

3.1 統計的感度と極感度の最小性

まず、以後の議論で必要となる Cauchy index と対称行列の符号について述べておく。

ω を実数とする時、実有理関数 $F(\omega)$ の $a < \omega < b$ における Cauchy index とは、 ω が a から b へと変化してゆくとき、 $F(\omega)$ が $-\infty$ から $+\infty$ にジャンプする回数から、これとは反対に $+\infty$ から $-\infty$ にジャンプする回数を引いたものである。これを $I_a^b F(\omega)$ と書く¹¹。

また、正則な対称行列 R の符号 (p, q) は次のように定義される。

$$\begin{cases} p = R \text{ の正の固有値の数} \\ q = R \text{ の負の固有値の数} \end{cases} \quad (19)$$

ここで、 $p+q=n$ である。

一般に、上記の Cauchy index および対称行列の符号とシステムの係数行列 A, b, c には、次の命題に示されるような関係が成り立つことが知られている。

「命題3 システム (A, b, c) に対して、次式を満たすようなただ一つの対称行列が存在する。

$$RA = A^*R, \quad Rb = c^* \quad (20)$$

また、対称行列 R の符号 (p, q) の差 $p-q$ は伝達関数の Cauchy index に等しい。」

(証明) 文献10) 参照。

また、連続時間システムと同様に⁸、離散時間システムにおいても平衡形実現の係数行列 A_b, b_b, c_b には次の定理に示されるような関係が成り立つ。

「定理1 $\theta_1 > \dots > \theta_{r+1} = \dots = \theta_{r+s} > \dots > \theta_n$ の時、平衡形実現の係数行列 A_b, b_b, c_b は次式の関係を満たす。

$$A_b^* = \Pi A_b \Pi, \quad b_b = \Pi c_b^* \quad (21)$$

ここで、行列 Π は次のように表わされる符号行列である。

$$\Pi = \text{block diag} (\Pi_1, U_s \Pi_2 U_s^*, \Pi_3)$$

$$\Pi_1 = \text{diag} (\pi_1, \dots, \pi_r)$$

$$\Pi_2 = \text{diag} (\pi_{r+1}, \dots, \pi_{r+s})$$

$$\Pi_3 = \text{diag} (\pi_{r+s+1}, \dots, \pi_n)$$

$$\pi_i = \pm 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

また、 U_s は $s \times s$ の直交行列である。」

(証明) (4) 式で与えられる Lyapunov 方程式に (8) 式を代入すると、次式を得る。

$$\Theta = A_b \Theta A_b^* + b_b b_b^* \quad (22.1)$$

$$\Theta = A_b^* \Theta A_b + c_b^* c_b \quad (22.2)$$

(22.1) 式に (20) 式を代入し、両辺に両側から対称行列 R をかけると、次式を得る。

$$R \Theta R = A_b^* (R \Theta R) A_b + c_b^* c_b \quad (23)$$

となる。上式と (22.2) 式を比較すれば、

$$\Theta = R\Theta R \quad (24)$$

を得る。ここで、 R は対称行列であるから、直交行列 U と対角行列 Λ_R を用いて、次のように表わすことができる。

$$R = U\Lambda_R U^t \quad (25)$$

$$\Lambda_R = \text{diag}(\lambda_{R1}, \lambda_{R2}, \dots, \lambda_{Rn})$$

(25) 式を (24) 式に代入し、両辺の左側から U^t を、右側から U をかけると次式を得る。

$$P = \Lambda_R P \Lambda_R = U^t \Theta U \quad (26)$$

行列 P の第 i 対角成分 p_{ii} を書き表わすと、

$$p_{ii} = \lambda_{Ri}^2 p_{ii} \quad (27)$$

となり、 $\lambda_{Ri} = \pm 1$ を得る。したがって、命題 3 と (25) 式から、 R は符号行列 Π と直交行列 U を用いて次式のように表わせる。

$$R = U\Pi U^t \quad (28)$$

したがって、

$$R = R^t = R^{-1} \quad (29)$$

を満たし、(24) 式から、

$$\Theta R = R\Theta \quad (30)$$

を得る。(30) 式の第 (i, j) 成分を書き表わすと、

$$\theta_{ij} r_{ij} = \theta_j r_{ij} \quad (31)$$

となり、 $\theta_i \neq \theta_j$ のとき、

$$r_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (32)$$

を得る。したがって、 $i \leq r$ または $i \geq r+s+1$ の時、(24) 式の第 i 対角成分は

$$\theta_i = \sum_{i=1}^n \theta_j r_{ij}^2 = \theta_i r_{ii}^2 \quad (33)$$

となり、次式を得る。

$$r_{ii} = \pm 1 \quad (34)$$

(28) 式、(32) 式と (34) 式から、

$$R = \Pi = \text{block diag}(\Pi_1, U_s \Pi_2 U_s^t, \Pi_3) \quad (35)$$

を得る。

また一般に、(21) 式を満たすシステムの可制御性グラミアンと可観測性グラミアンの関係について、次の補題が成り立つ。

「補題 1 システム (A, b, c) が (21) 式を満たす時、その可制御性グラミアン K と可観測性グラミアン W に次の関係式が成り立つ。

$$K = \Pi W \Pi \quad (36)$$

(証明) (4.2) 式の Lyapunov 方程式に (21) 式を代入

し、両辺に両側から符号行列 Π をかけると、

$$\begin{aligned} \Pi W \Pi &= A \Pi W A \Pi + b b^t \\ &= A(\Pi W \Pi)(\Pi A \Pi) + b b^t \\ &= A(\Pi W \Pi) A^t + b b^t \end{aligned}$$

となる。上式と (4.1) 式を比較すれば、

$$K = \Pi W \Pi$$

を得る。

補題 1 から、(21) 式を満たすシステムの可制御性グラミアン K と可観測性グラミアン W は対角要素が等しく、非対角要素は符号を除いて等しいことがわかる。

さらに、符号行列 Π に関して、次の補題が成り立つ^{8,9}。

「補題 2 符号行列 Π が

$$\Pi = \pm I \quad (37)$$

となるための必要十分条件は、伝達関数 $H(z)$ のすべての極と零点が実軸上で交代して位置することである。」(証明) 伝達関数 $H(z)$ が性質 i.r.p.z. を満たす時、 $H(z)$ は次式のように部分分数展開できる。

$$H(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{z - \lambda_i} \quad (38)$$

ここで、 a_i, λ_i は実数であり、 a_i の符号はすべて + あるいはすべて - のどちらか一方である。この時、Cauchy index は次のような値をとる¹¹。

$$I_{-\pi}^{+\pi} H(e^{j\omega}) = p - q = \sum_{i=1}^n \text{sgn}(a_i) = \begin{cases} n \\ -n \end{cases} \quad (39)$$

したがって、符号行列 Π の符号 (p, q) は次のようになる。

$$(p, q) = \begin{cases} (n, 0) \\ (0, n) \end{cases} \quad (40)$$

(21) 式と上式より、 $\Pi = \pm I$ を得る。

性質 i.r.p.z. を満たす離散時間システムの極と零点がすべて正であるならば、そのシステムは低域通過形の傾向を有し、すべて負であるならば、そのシステムは高域通過形の傾向を有する。また、正と負の極と零点が混在するならば、そのシステムは帯域通過形の傾向を有する。

回路網理論の分野では、連続時間システムにおいてこのような性質 i.r.p.z. を満たす伝達関数は非振動のインパルス応答を持ち、RC あるいは RL 回路で実現できることが古くから知られている¹¹。

伝達関数が性質 i.r.p.z. を満たす時、広義の平衡形実現は次の定理で示されるような特徴的な性質を持つ。

「定理 2 伝達関数 $H(z)$ が性質 i.r.p.z. を満たす時、システム (A_{wb}, b_{wb}, c_{wb}) が広義の平衡形実現となるための必要十分条件は、その係数行列が次のような関係式

を満たすことである。

$$A_{wb}^t = A_{wb}, \quad b_{wb} = \pm c_{wb}^t \quad (41)'$$

(証明) まず、十分性を証明する。伝達関数 $H(z)$ が性質 i.r.p.z. を満たす時、(41) 式が成り立つならば、補題 1 と補題 2 より

$$K = \Pi W \Pi = (\pm I) W (\pm I) = W$$

を得る。したがって、(41) 式が成り立つ時、広義の平衡形実現となる。

次に必要性を証明する。任意の直交行列 U を等価変換行列として、平衡形実現 (A_b, b_b, c_b) を広義の平衡形実現 (A_{wb}, b_{wb}, c_{wb}) に変換すると、

$$A_{wb} = U^t A_b U, \quad b_{wb} = U^t b_b, \quad c_{wb} = c_b U \quad (42)$$

となる。したがって、定理 1 と補題 2 から、平衡形実現 (A_b, b_b, c_b) が (41) 式を満たすことは明らかであるから、次式を得る。

$$\begin{aligned} A_{wb}^t &= U^t A_b^t U = U^t A_b U = A_{wb}, \\ b_{wb} &= U^t b_b = U^t c_b^t = \pm c_{wb}^t \end{aligned} \quad (43)$$

したがって、広義の平衡形実現ならば、(41) 式を満たす。

定理 2 は、伝達関数が性質 i.r.p.z. を満たす時には、可制御性グラミアンと可観測性グラミアンを経由することなく係数行列のみに着目すれば、広義の平衡形実現が得られることを表わしている。

さらにこの場合、広義の平衡形実現に関して、次の定理が成り立つ。

「定理 3 伝達関数 $H(z)$ が性質 i.r.p.z. を満たす時、広義の平衡形実現は統計的感度最小構造かつ極感度最小構造である。」

(証明) 定義 2 の (9) 式と命題 1 の (14) 式が一致していることから、統計的感度最小構造であることは明らかである。

定理 2 の (41) 式から、状態遷移行列 A_{wb} は

$$A_{wb}^t A_{wb} = A_{wb} A_{wb}^t$$

を満たす。したがって、命題 2 から、伝達関数 $H(z)$ が性質 i.r.p.z. を満たす時、広義の平衡形実現は極感度最小構造となる。

3.2 合成法

定理 2 から、伝達関数 $H(z)$ が性質 i.r.p.z. を満たす場合、(41) 式が成り立つように係数行列を選べば、広義の平衡形実現が得られることになる。したがって、まず、状態遷移行列を最も簡単な対称行列の一つとして対角行列に選ぶ。

性質 i.r.p.z. を満たす伝達関数 $H(z)$ は (38) 式のように部分分数展開できる。したがって、上式に含まれる

パラメータ λ_i を直接用いて、状態遷移行列 A_{wb} を次のように対角行列に選ぶことができる。

$$A_{wb} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \quad (44)$$

(38) 式、(41) 式と (44) 式から、係数行列 b_{wb} と c_{wb} は次式を満たさなければならない。

$$b_{wb} c_{wb} = \text{diag}[a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (45.1)$$

$$b_{wb} = \pm c_{wb} \quad (45.2)$$

したがって、 b_{wb} と c_{wb} を次のように選べばよい。

$$b_{wb}^t = [|\alpha_1|^{1/2}, |\alpha_2|^{1/2}, \dots, |\alpha_n|^{1/2}] \quad (46.1)$$

$$c_{wb} = [\pm |\alpha_1|^{1/2}, \pm |\alpha_2|^{1/2}, \dots, \pm |\alpha_n|^{1/2}] \quad (46.2)$$

以上のことから、伝達関数が性質 i.r.p.z. を満たす時、伝達関数の部分分数展開係数を直接用いて、極めて容易に広義の平衡形実現が合成できることがわかる。さらに、広義の平衡形実現のパラメータ数は一般に $(n^2 + 2n)$ 個を必要とするのに対し、ここで合成される広義の平衡形実現の状態遷移行列は対角行列であるから、 $3n$ 個のパラメータ数しか必要としない。したがって、係数行列に含まれる 0 要素を不感であるとすれば、更に低感度な実現構造であるといえる。

バターワースやチェビシェフなどの標準的なデジタルフィルタの極と零点は、複素数であることが多く、このようなデジタルフィルタでは、一般に性質 i.r.p.z. を満たすことは少ない。しかし、大規模なシステムを実現する場合、性質 i.r.p.z. を満たす部分と満たさない部分を分けて合成し、それらを並列接続あるいは縦続接続すれば、実現に要する計算量が減少され、かつ極めて低感度な実現構造が得られると考えられる。

4. 計算例

次の 3 次の伝達関数 $H(z)$ を考える。

$$H(z) = \frac{1.5216 z^{-1} - 1.9642 z^{-2} + 0.5934 z^{-3}}{1 - 1.8415 z^{-1} + 1.0549 z^{-2} - 0.1827 z^{-3}} \quad (47)$$

上式で表わされる伝達関数 $H(z)$ は次のような極 λ_i と零点 z_i を持つ。

$$\lambda_1 = 0.3255$$

$$\lambda_2 = 0.6433$$

$$\lambda_3 = 0.8728$$

$$z_1 = 0.4822$$

$$z_2 = 0.8057$$

したがって、この伝達関数 $H(z)$ は性質 i.r.p.z. を満たす。また、(38) 式の留数 α_i は次のようになる。

$$\alpha_1 = 0.6626$$

$$\alpha_2 = 0.5558$$

$$\alpha_3 = 0.3031$$

Table 1 Coefficient matrices, statistical sensitivity and pole-sensitivity

Structure	A			b	c ^t	S	S _p
Controllability	0.0	1.0	0.0	0.0	0.5934	1770.063	1177.909
Canonical	0.0	0.0	1.0	0.0	-1.9642		
Realization	0.1827	-1.0549	1.8415	1.0	1.5216		
Balanced	0.6703	-0.2055	-4.1662	1.1854	1.1854	14.693	3.0
Realization	-0.2055	0.6116	-0.1688	0.3375	0.3375		
	-4.1662	-0.1688	0.5596	0.0508	0.0508		
Balanced	0.3255	0.0	0.0	0.8140	0.8140	14.693	3.0
Realization	0.0	0.6433	0.0	-0.7455	-0.7455		
in the Wide Sense	0.0	0.0	0.8728	0.5506	0.5506		

(47) 式で与えられる伝達関数 $H(z)$ を有する可制御標準形実現, 平衡形実現および本論文で提案した広義の平衡形実現の係数行列, 統計的感度および極感度を Table 1 に示す. Table 1 から, 平衡形実現と広義の平衡形実現が二つの感度をともに最小化していることがわかる. また, 広義の平衡形実現の状態遷移行列は対角行列となり, パラメータ数が少ないことがわかる. また, 次式で定義される周波数感度 $S_f(\omega)$

$$S_f(\omega) = \text{tr} \left\{ \left[\frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial A} \right] \left[\frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial A} \right]^* + \left[\frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial b} \right] \left[\frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial b} \right]^* + \left[\frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial c} \right] \left[\frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial c} \right]^* \right\} \quad (48)$$

について比較したものを Fig. 1 に示す. Fig. 1 から, 周波数感度に関しても, 平衡形実現と広義の平衡形実現が非常に低感度であることがわかる.

Fig. 1 Frequency sensitivity

5. あとがき

本論文では, 伝達関数のすべての極と零点が実軸上で交代する時, 広義の平衡形実現が統計的感度と極感度をともに最小化していることを明らかにした. さらにこの場合, 広義の平衡形実現の一つが伝達関数の部分分数展開係数から極めて容易に合成できることが示された. また, 得られた実現構造の状態遷移行列が対角行列に選べることから, 係数行列が完全に密である平衡形実現と比較して, 少ないパラメータ数で合成できることも示された.

しかし, 本論文では, 伝達関数のすべての極と零点が実軸上で交代する時のみに関して, 広義の平衡形実現が非常に優れた性質を持つことを述べたに過ぎない. 一般の場合については, 今後の課題とした.

最後に日頃から熱心に御討論いただいた 本学工学部川又政征助教授に感謝いたします.

参考文献

- 1) B. C. Moore : Principal Component Analysis in Linear Systems : Controllability, Observability and Model Reduction ; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-26, No. 1, pp. 17~32 (1981)
- 2) L. Pernebo & L. M. Silverman : Model Reduction via Balanced State Space Representations ; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-27, No. 2, pp. 382~387 (1982)
- 3) 川又, 岩月, 樋口 : 線形システムにおける感度最小構造としての平衡形実現 ; 計測自動制御学会論文集, Vol. 21, No. 9, pp. 900~906 (1986)
- 4) 川又, 樋口 : デジタルフィルタと線形システム理論 ; システムと制御, Vol. 31, No. 5, pp. 325~332 (1987)
- 5) S. Shokoochi : Block-Balanced Realizations ; IEEE Int. Symp. Circuits Syst. Proc. Montreal, pp. 825~829 (1984)
- 6) V. Tavsanoğlu & L. Theile : Optimal Design of State-Space Digital Filters by Simultaneous Minimization of Sensitivity and Round-off Noise ; IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. CAS-31, No. 10, pp. 884~888 (1984)
- 7) R. E. Skelton & D. A. Wagie : Minimal Root Sensi-

- tivity in Linear Systems ; Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 7, No. 5, pp. 570~574 (1984)
- 8) E. A. Jonckheere : Principal Component Analysis of Flexible Systems—Open Loop Case ; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-29, No. 12, pp. 1095~1097 (1984)
 - 9) R. W. Brockett : Some Geometric Questions in the Theory of Linear Systems ; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-21, No. 4, pp. 449~455 (1976)
 - 10) K. V. Fernando & H. Nicholson : On the Cauchy Index of Linear Systems ; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-28, No. 2, pp. 222~224 (1983)
 - 11) 高橋, 有本 : 回路網とシステム理論 ; コロナ社 (1974)
 - 12) 岩月, 樋口 : あるクラスの伝達関数を有する平衡形実現とその極零点配置 ; 第 29 回自動制御連合講演会前刷, 1086, pp. 197~198 (1986)
 - 13) 岩月, 樋口 : 線形システムにおける符号付平衡形実現と極感度最小構造 ; 電子情報通信学会創立 70 周年記念総合全国大会講演論文集, 1-1 (1987)
-