繰返し制御系の有限極配置による安定化*

渡 部 慶 二**

Stabilization of Repetitive Control System by Finite Spectrum Assignment Method**

Keiji WATANABE**

This paper is concerned with stabilization of modified repetitive control systems with a low-pass filter in the servocompensator. Since the modified repetitive control system is a retarded-type delay system, the finite spectrum assignment method is applicable for stabilization of the system. The necessary and sufficient condition for spectral controllability of the modified repetitive control system is presented. A scheme of stabilization by finite spectrum assignment is presented. Furthermore, this stabilization method is applied to repetitive control system for plant with delay.

1. はじめに

井上ら^{1,2}により提案された繰返し制御は、周期的な目標入力に高精度で追従できる制御方式として注目され種々の検討がなされてきた。連続時間繰返し制御系は、むだ時間要素から成る正帰還ループを内部モデルとして持つため、複素平面の虚軸上に無限個の極を持つ中立型のむだ時間系になる³⁻⁷。そのため制御系の安定化には制御対象の相対次数ゼロという厳しい条件が必要であり⁴、大部分の制御対象はこれを満たすことができない。そこで、高周波領域での定常偏差を許容することによって安定化を計る方法が提案された。これには、減衰器と部分極配置を用いて虚軸上の無限個の極を左半平面に移動する方法⁷と、ローパスフィルタを用いて左半平面に移動する方法がある³⁻⁶。前者は、内部モデルのむだ時間要素の状態変数も利用するので構成がやや複雑になる。後者は、内部モデルのむだ時間要素の状態変数を用いずに、制御対象のまわりだけの補償で安定化をはかるので構成が簡潔である。しかし、後者の場合、制御対象の入力あるいは出力にむだ時間が含まれると予測制御を導入しても、むだ時間に相当する時間遅れなしに目標入力に追従させることはできない。このことは、むだ時間によ

り周期的外乱の除去特性が劣化することを意味する。この問題の解決には内部モデルのむだ時間要素の状態変数の使用が考えられるが、具体的な検討はまだなされていない。

ところで、内部モデルにローパスフィルタを挿入した繰返し制御系は、中立型むだ時間系でなく、いわゆる遅れ型 (retarded type) のむだ時間系であり、有限極配置法^{8,9,13,14}が適用可能である。そこで本稿では、内部モデルにローパスフィルタを挿入した繰返し制御系の有限極配置法による安定化を検討する。始めに、むだ時間をもたない制御対象を考え、内部モデルにローパスフィルタを挿入した繰返し制御系の状態方程式を与える。つぎに、繰返し制御系のスペクトル可制御の必要十分条件を与え、有限極配置法による繰返し制御系の構成を示す。そして本制御系は、従来の方法³⁻⁶と異なりローパスフィルタのパラメータが閉ループ系の安定性に直接関与しないため、安定性と定常特性を個々に設定できうる利点があることを述べる。最後に、これらの結果をむだ時間をもつ制御対象に拡張することにより、内部モデルのむだ時間要素の状態変数を使用した状態予測制御が実現でき、むだ時間を持たない場合とほぼ同等の目標追従特性、外乱除去特性をもつ繰返し制御系が得られることを示す。

2. 繰返し制御問題

制御対象として次の系が与えられたとする。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = cx(t) \quad (1.2)$$

* 原稿受付 1988. 2. 13

** 山形大学 工学部 Department of Electronic Engineering, Yamagata University : Jonan 4, Yonezawa 992, JAPAN

Key Words : repetitive control, time-delay system, spectral controllability, state predictor, steady-state characteristics.

ただし, $x \in R^n$, $u, y \in R$, $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$, $c \in R^{1 \times n}$,
(A, b) 可制御, (c, A) 可観測とする.

この制御対象につぎの目標入力を与えられたとする.

$$r(t) = r_0(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.1)$$

$$r(t) = r(t-T) \quad T \leq t \quad (2.2)$$

ただし, $r_0, r \in R$ で, T は繰返し周期である. この目標入力に定常偏差ゼロで追従させるには, 内部モデル原理から

$$\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

あるいは

$$\frac{e^{-sT}}{1-e^{-sT}}$$

の形のサーボ補償器が必要である⁴. しかし, これらの補償器は, 複素平面の虚軸上に無限個の極をもつため, 通常のフィードバックでそれらの極すべてを左側に移動することができない. そこで高周波領域での定常偏差を許容すれば, ローパスフィルタ $q(s)$ (ただし, $q(0)=1$) を導入し

$$(a) \quad \frac{1}{1-q(s)e^{-sT}}$$

あるいは

$$(b) \quad \frac{q(s)e^{-sT}}{1-q(s)e^{-sT}}$$

の形の漸近安定な近似サーボ補償器を用いることができる. これらの補償器を用いた拡大系は Fig. 1 に示される. 定常偏差の補償がなされているので, あとは Fig. 1 の系の漸近安定化を図ればよい. 本稿では, 近似サーボ補償器 (a) を用いた場合について述べるが, 近似サーボ補償器 (b) を用いた時も同様のことがいえる.

3. 繰返し制御系の状態方程式

近似サーボ補償器 (a) を用いた Fig. 1 の系の安定化を考えるため, 制御系の状態方程式を求める. 安定化には外部信号 r が関与しないから $r=0$ とする. サーボ補償器の出力を x_I , ローパスフィルタを簡単のため

$$q(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad (3)$$

とすると次式が成り立つ.

Fig. 1 Augmented system with repetitive servo-compensator

$$x_I(s) = \frac{ae^{-sT}}{s+\alpha} x_I(s) - y(s) \quad (4)$$

(4) 式をラプラス逆変換すると

$$\dot{x}_I(t) = -\alpha x_I(t) + \alpha x_I(t-T) - cAx(t) - cbu(t) - \alpha cx(t) \quad (5)$$

が得られる. (1), (5) 式をまとめると

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha c - cA \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I(t-T) \\ x(t-T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -cb \\ b \end{bmatrix} u(t) \quad (6)$$

が得られる. ここで $\bar{A}(e^{-sT})$, $\bar{b}$ を

$$\bar{A}(e^{-sT}) = \begin{bmatrix} -\alpha + \alpha e^{-sT} & -\alpha c - cA \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} -cb \\ b \end{bmatrix} \quad (8)$$

とおくと

$$|sI - \bar{A}(e^{-sT})| = |sI - A|(s + \alpha - \alpha e^{-sT}) \quad (9)$$

が成立する. (9) 式の零点は制御対象とサーボ補償器の極であり, (6) 式はサーボ補償器 (a) を用いた Fig. 1 の系の状態方程式とみなすことができる.

4. 可制御性

状態方程式が得られたので, つぎに (6) 式の系の可制御性を調べよう. これについてはつぎの定理が成り立つ.

[定理 1] つぎのことは等価である.

(i) (6) 式はスペクトル可制御である.

(ii) $\text{rank}[sI - \bar{A}(e^{-sT}), \bar{b}] = n+1, \forall s \in C$ (10)

(iii) $\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = n+1$ (11)

$$\forall s \in \{s \in C \mid s + \alpha - \alpha e^{-sT} = 0\}$$

(証明) (i), (ii) の等価性は Pandolfi¹⁰, Olbrot¹¹ により証明されているので, ここでは (ii), (iii) の等価性を証明する. (10) 式が成立すれば $s + \alpha - \alpha e^{-sT} = 0$ を満たす s に対し

$$\begin{aligned} & \text{rank}[sI - \bar{A}(e^{-sT}), \bar{b}] \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} \alpha c + cA & -cb \\ sI - A & b \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ sI \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha c \\ A \end{bmatrix}, \\ & \quad \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} (s+a)c & 0 \\ sI-A & b \end{bmatrix} = n+1 \quad (12)$$

が成立する。\$s+a \neq 0\$ なので (12) 式は (11) 式を意味する。逆に (11) 式が成り立てば \$s+a-ae^{-sT}=0\$ を満たす \$s\$ に対し次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \text{rank} \begin{bmatrix} c & 0 \\ sI-A & b \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+a & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ sI-A & b \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} ac+cA & -cb \\ sI-A & b \end{bmatrix} \\ &= \text{rank}[sI-\bar{A}(e^{-sT}), \bar{b}] = n+1 \end{aligned} \quad (13)$$

また、(1) 式の仮定より制御対象は可制御であり

$$\text{rank}[sI-A, b] = n \quad (14)$$

が成立するから \$s+a-ae^{-sT} \neq 0\$ を満たす \$s\$ に対しても

$$\text{rank}[sI-\bar{A}(e^{-sT}), \bar{b}] = n+1 \quad (15)$$

が成立する。したがって、すべての \$s \in \mathbb{C}\$ に対し (10) 式が成り立つ (証明終)。

上記の条件 (iii) は、通常のサーボ系の内部安定性の条件¹⁵ の自然な拡張になっている。

5. 繰返し制御系の構成

さて、制御対象が (11) 式を満たせば (6) 式はスペクトル可制御であり、

$$\begin{aligned} & k(s, z) \text{adj}(sI-\bar{A}(z))\bar{b} \\ &= K(s, z) [\bar{b}, \bar{A}(z)\bar{b}, \dots, \bar{A}^n(z)\bar{b}] \\ &= \begin{bmatrix} \beta_n(z) & \dots & \beta_1(z) & 1 \\ \vdots & & & \\ \beta_1(z) & & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

を満たす \$z=e^{-sT}\$ の多項式と有限ラプラス変換上の \$(n+1) \times (n+1)\$ 行列 \$K(s, z)\$ が存在する⁹。ただし、\$\beta_i(z)\$ は

$$\begin{aligned} |sI-\bar{A}(z)| &= |sI-A|(s+a-ae^{-sT}) \\ &= s^{n+1} + \beta_1(z)s^n + \dots + \beta_{n+1}(z) \end{aligned}$$

の係数多項式である。繰返し制御系の特性多項式を

$$s^{n+1} + \gamma_1 s^n + \dots + \gamma_{n+1}$$

にしたいときは、上記の \$K(s, z)\$ を用いて

$$\begin{aligned} f(s, z) &= [\beta_{n+1}(z) - \gamma_{n+1}, \dots, \beta_1(z) - \gamma_1] K(s, z) \\ &= [f_1(s, z), f_2(s, z)] \end{aligned} \quad (17)$$

とし、制御を

$$\begin{aligned} u(s) &= f(s, z) \begin{bmatrix} x_I(s) \\ x(s) \end{bmatrix} \\ &= f_1(s, z)x_I(s) + f_2(s, z)x(s) \end{aligned} \quad (18)$$

で与えればよい。(6), (18) 式からなる閉ループ系の特性多項式は (16), (17) 式から

$$\begin{aligned} & |sI-\bar{A}(z)-\bar{b}f(s, z)| \\ &= |sI-\bar{A}(z)| - f(s, z) \text{adj}(sI-\bar{A}(z))\bar{b} \\ &= s^{n+1} + \gamma_1 s^n + \dots + \gamma_{n+1} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。

(注意1) 内部モデルにローパスフィルタを挿入した繰返し制御系の従来の安定化法³⁻⁶ ではローパスフィルタのパラメータが安定性に関与していた。本法では (19) 式から明らかのように閉ループ系の安定化は有限極配置で達成でき、フィルタのパラメータは安定性に直接関係しない。

状態変数 \$x(t)\$ が使用できないときは、オブザーバ

$$\dot{\omega}(t) = (A+kc)\omega(t) + bu(t) - ky(t) \quad (20)$$

で状態 \$x\$ が観測できるから、(18) 式の \$x\$ を \$\omega\$ でおきかえたものを用いればよい。ただし、\$k\$ は \$A+kc\$ を安定行列にする \$n \times 1\$ 定数行列である。まとめると Fig. 2 の繰返し制御系が得られる。

この系の目標追従特性はつぎようになる。オブザーバの伝達関数は

$$\begin{aligned} \frac{\omega(s)}{u(s)} &= (sI-A-kc)^{-1}b - (sI-A-kc)^{-1}kc(sI-A)^{-1}b \\ &= [I - (sI-A)^{-1}kc]^{-1}(sI-A)^{-1}b \\ &\quad - [I - (sI-A)^{-1}kc]^{-1}(sI-A)^{-1}kc(sI-A)^{-1}b \\ &= (sI-A)^{-1}b \end{aligned} \quad (21)$$

である。これを用いると Fig. 2 の系の目標入力 \$r\$ から出力偏差 \$e\$ までの伝達関数は次式で与えられる。

Fig. 2 Repetitive control system designed by finite spectrum assignment method

$$\begin{aligned}
\frac{e(s)}{r(s)} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{s+a} e^{-sT}} \frac{f_1(s, z) c(sI-A)^{-1} b}{1 - f_2(s, z) (sI-A)^{-1} b}} \\
&= \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{s+a} e^{-sT}\right) \{1 - f_2(s, z)\}}{\left(1 - \frac{\alpha}{s+a} e^{-sT}\right) \{1 - f_2(s, z) (sI-A)^{-1} b\}} \quad \checkmark \\
&\quad \uparrow \frac{(sI-A)^{-1} b}{+ f_1(s, z) c(sI-A)^{-1} b} \\
&= \frac{(s+a - \alpha e^{-sT}) \{ |sI-A| - f_2(s, z) \text{adj}(sI-A) b \}}{D(s, z)} \quad (22)
\end{aligned}$$

ただし、 $D(s, z)$ は

$$\begin{aligned}
D(s, z) &= (s+a - \alpha e^{-sT}) \{ |sI-A| - f_2(s, z) \text{adj}(sI-A) b \\
&\quad + f_1(s, z) (s+a) c \text{adj}(sI-A) b \\
&= |sI-A| (s+a - \alpha e^{-sT}) \\
&\quad - [f_1(s, z), f_2(s, z)] \begin{bmatrix} -(s+a) c \text{adj}(sI-A) b \\ (s+a - \alpha e^{-sT}) \text{adj}(sI-A) b \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} -(ac+cA) \text{adj}(sI-A) b - |sI-A| cb \\ (s+a - \alpha e^{-sT}) \text{adj}(sI-A) b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

と展開される。ここで $D(s, z)$ の右辺の $-(s+a) c \text{adj}(sI-A) b$ と $|sI-A| - f_2(s, z) \text{adj}(sI-A) b$ の右辺の $-(ac+cA) \text{adj}(sI-A) b - |sI-A| cb$ の間にはつぎの関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&-(s+a) c \text{adj}(sI-A) b \\
&= -(ac+cA) \text{adj}(sI-A) b - |sI-A| cb
\end{aligned}$$

すなわち、 $c(sI-A)^{-1} b$ に s をかけると

$$sc(sI-A)^{-1} b = cA(sI-A)^{-1} b + cb$$

となり、さらに $|sI-A|$ をかけると

$$sc \text{adj}(sI-A) b = cA \text{adj}(sI-A) b + |sI-A| cb$$

が得られる。これを $-(s+a) c \text{adj}(sI-A) b$ に代入することによって上記の関係が成立する。したがって、

$$D(s, z) = |sI-A| - f_2(s, z) \text{adj}(sI-A) b \quad (23)$$

が成り立ち目標入力 r から出力偏差 e までの伝達関数は次式で表わされる。

$$\frac{e(s)}{r(s)} = \frac{(s+a - \alpha e^{-sT}) \{ |sI-A| - f_2(s, z) \text{adj}(sI-A) b \}}{|sI-A| - f_2(s, z) \text{adj}(sI-A) b} \quad (24)$$

一方、制御対象の入力に加わる外乱を $d(s)$ 、目標入力 $r(s)$ を $r(s) = 0$ としたとき、つぎの式が成り立つ。

$$e(s) = -y(s) = -c(sI-A)^{-1} b \{ u(s) + d(s) \} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\omega(s) &= (sI-A - kc)^{-1} b u(s) \\
&\quad - (sI-A - kc)^{-1} kc(sI-A)^{-1} b \{ u(s) + d(s) \} \\
&= (sI-A)^{-1} b u(s) - (sI-A - kc)^{-1} kc(sI-A)^{-1} b d(s) \quad (26)
\end{aligned}$$

$$u(s) = f_1(s, z) x_1(s) + f_2(s, z) \omega(s) \quad (27)$$

$$x_1(s) = -\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{s+a} e^{-sT}} c(sI-A)^{-1} b \{ u(s) + d(s) \} \quad (28)$$

(26), (28) 式を (27) 式に代入し $u(s)$ について解き、それを (25) 式に代入し、(20) 式さらに (23) 式の関係を用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{e(s)}{d(s)} &= -\frac{\left(1 - \frac{\alpha}{s+a} e^{-sT}\right) c(sI-A)^{-1} b}{\left(1 - \frac{\alpha}{s+a} e^{-sT}\right) \{1 - f_2(s, z) (sI-A)^{-1} b\}} \quad \checkmark \\
&\quad \uparrow \frac{\{1 - f_2(s, z) (sI-A - kc)^{-1} b\}}{+ f_1(s, z) c(sI-A)^{-1} b} \\
&= -\frac{(s+a - \alpha e^{-sT}) c \text{adj}(sI-A)}{|sI-A|} \\
&\quad \frac{b(1 - f_2(sI-A - kc)^{-1} b)}{-f_2(s, z) \text{adj}(sI-A) b} \quad (29)
\end{aligned}$$

(24), (29) 式から、 α を適当な大きな値に選べば低周波領域で

$$\left| 1 - \frac{\alpha}{s+a} e^{-sT} \right|$$

の値を小さくでき、これらの周波数成分に対する定常偏差を小さくできる。

(注意2) 従来の安定化法³⁻⁶ではローパスフィルタのパラメータが安定性に深く関わっており、安定性と定常特性の間にトレードオフがあった。本方法ではローパスフィルタのパラメータが安定性に関与しないので、ローパスフィルタのパラメータ α を任意の大きな値に選ぶことができ、これによって定常偏差を小さくすることができる。

6. むだ時間をもつプラントへの応用

制御対象 (1) 式の入力に時間遅れがある

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t-L) \\
y(t) &= cx(t) \quad (30)
\end{aligned}$$

の場合を考えよう。繰返し制御系の状態方程式は(6)式の $u(t)$ を $u(t-L)$ で置き換えたものとなるので、状態変数の遅れと入力の遅れが異なる場合の有限極配置問題になる^{8,14}。入力の時間遅れが一種類なので、定理1(iii)の条件を満たせば(6)式の系はスペクトル可制御であり、(18)式の x_l, x の代わりに(6)式の時間 L だけ先の状態を予測したものをを用いればよい。すなわち、オブザーバ

$$\dot{\omega}(t) = (A+kc)\omega(t) + bu(t-L) - ky(t) \quad (31)$$

で状態を観測し、その値を用いて時間 L だけ先の制御系の状態を

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi_l(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} &= \exp(A_0 L) \begin{bmatrix} x_l(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \\ &+ \int_{t-L}^t \exp(A_0(t-\tau)) \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_l(\tau+L-T) \\ \omega(\tau+L-T) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -cb \\ b \end{bmatrix} u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (32)$$

で予測し、

$$u(s) = f_1(s, z)\xi_l(s) + f_2(s, z)\xi(s) \quad (33)$$

とすればよい。ただし、

$$A_0 = \begin{bmatrix} -a & -ac-cA \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad (34)$$

である。まとめると Fig. 3 の制御系が得られる。(32)、(33)式から明らかなように、この制御系は内部モデルの状態変数 x_l の有限区間の過去の値を使用した状態予測制御になる。

この系の目標入力 r から出力偏差 e までの伝達関数は、つぎのようにして求められる。(30)~(33)式をラプラス変換することによりつぎの式が得られる。

$$e(s) = r(s) - y(s) = r(s) - c(sI-A)^{-1}be^{-sL}u(s) \quad (35)$$

$$\omega(s) = (sI-A)^{-1}be^{-sL}u(s) \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi_l(s) \\ \xi(s) \end{bmatrix} &= \exp(A_0 L) \begin{bmatrix} x_l(s) \\ \omega(s) \end{bmatrix} \\ &+ [I - \exp(A_0 L)e^{-sL}](sI-A_0)^{-1} \begin{bmatrix} ax_l(s)e^{-s(T-L)} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -cb \\ b \end{bmatrix} u(s) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} x_l(s) &= \frac{a}{s+\alpha} e^{-sT} x_l(s) + r(s) \\ &- c(sI-A)^{-1}be^{-sL}u(s) \end{aligned} \quad (38)$$

Fig. 3 Repetitive control system with time delay

$$u(s) = f_1(s, z)\xi_l(s) + f_2(s, z)\xi(s) \quad (39)$$

(36)、(38)式を(37)式に代入し、

$$\exp(A_0 L) = \begin{bmatrix} e^{-aL} & -\int_0^L e^{-a(L-\tau)}(ac+cA)e^{A\tau}d\tau \\ 0 & e^{AL} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$(sI-A_0)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\alpha} & -\frac{1}{s+\alpha}(ac+cA)(sI-A)^{-1} \\ 0 & (sI-A)^{-1} \end{bmatrix} \quad (41)$$

および

$$sc(sI-A)^{-1}be^{-sL} = cA(sI-A)^{-1}be^{-sL} + cbe^{-sL} \quad (42)$$

の関係式を用いて整理すると

$$\begin{aligned} \xi_l(s) &= \frac{\frac{a}{s+\alpha}e^{-s(T-L)}}{1 - \frac{a}{s+\alpha}e^{-sT}} \{r(s) - c(sI-A)^{-1}be^{-sL}u(s)\} \\ &- c(sI-A)^{-1}bu(s) + e^{-aL}r(s) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\xi(s) = (sI-A)^{-1}bu(s) \quad (44)$$

が得られる。これらを(39)式に代入し $u(s)$ について解き、さらに(35)式に代入すると

$$\frac{e(s)}{r(s)} = \frac{N_r(s)}{D_r(s)} = \frac{N_{ro}(s)}{D_{ro}(s)} \quad (45)$$

が得られる。ただし

$$\begin{aligned} N_r(s) &= \left(1 - \frac{a}{s+\alpha}e^{-sT}\right) \{1 - f_2(sI-A)^{-1}b \\ &- c(sI-A)^{-1}b(e^{-(s+\alpha)L}-1)\} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} D_r(s) &= \left(1 - \frac{a}{s+\alpha}e^{-sT}\right) \{1 - f_2(sI-A)^{-1}b \\ &+ f_1c(sI-A)^{-1}b \} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} N_{ro}(s) &= (s+\alpha-ae^{-sT}) \{|sI-A| - f_2(s, z)\text{adj} \\ &(sI-A)b - c\text{adj}(sI-A)b(e^{-(s+\alpha)L}-1)\} \end{aligned} \quad (48)$$

$$D_{ro}(s) = |sI-\bar{A}(z) - \bar{b}f(s, z)| \quad (49)$$

閉ループ系の極は(49)式からむだ時間がない場合に等しい。定常特性(目標入力追従特性)は、(46)式{ }

の第3項を除けばむだ時間がない場合に等しい。低周波領域では

$$\left| 1 - \frac{\alpha}{s + \alpha} e^{-j\omega T} \right|$$

の値が小さいので、むだ時間がない場合とほぼ同様な目標追従特性が得られる。

一方、制御対象の入力端に加わる外乱 d に対しては、(35)、(36)、(38) 式の代わりにつぎの式が成り立つ。

$$e(s) = -y(s) = -c(sI - A)^{-1}b\{e^{-sL}u(s) + d(s)\} \quad (50)$$

$$\omega(s) = (sI - A)^{-1}be^{-sL}u(s) - (sI - A - kc)^{-1}kc(sI - A)^{-1}bd(s) \quad (51)$$

$$x_I(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} e^{-sT} x_I(s) - c(sI - A)^{-1}b\{e^{-sL}u(s) + d(s)\} \quad (52)$$

(51)、(52) 式を (37) 式に代入し、上記と同様の計算と

$$\int_0^L e^{-\alpha(L-\tau)} (ac + cA) e^{A\tau} d\tau = ce^{AL} - ce^{-\alpha L} \quad (53)$$

の関係を用いると

$$\begin{aligned} \xi_I(s) &= \frac{\alpha}{s + \alpha} e^{-s(T-L)} \{-c(sI - A)^{-1}b[e^{-sL}u(s) + d(s)]\} \\ &\quad - c(sI - A)^{-1}bu(s) - e^{-\alpha L}c(sI - A)^{-1}bd(s) \\ &\quad + (ce^{AL} - ce^{-\alpha L})(sI - A - kc)^{-1}kc(sI - A)^{-1}bd(s) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \xi(s) &= (sI - A)^{-1}bu(s) - e^{AL}(sI - A - kc)^{-1}kc(sI - A)^{-1}bd(s) \end{aligned} \quad (55)$$

が得られる。これらを (39) 式に代入し $u(s)$ を求め、それを (50) 式に代入し

$$\begin{aligned} &(sI - A)^{-1}b + (sI - A - kc)^{-1}kc(sI - A)^{-1}b \\ &= (sI - A - kc)^{-1}b \end{aligned} \quad (56)$$

および

$$\begin{aligned} &(sI - A)^{-1}b + e^{AL}(sI - A - kc)^{-1}kc(sI - A)^{-1}be^{-sL} \\ &= e^{AL}(sI - A - kc)^{-1}be^{-sL} + \int_{-L}^0 e^{-A\tau} e^{s\tau} d\tau \end{aligned} \quad (57)$$

の関係を用いると、 $d(s)$ から $e(s)$ までの伝達関数がつぎの式で与えられる。

$$\frac{e(s)}{d(s)} = -\frac{N_d(s)}{D_d(s)} = -\frac{N_{d0}(s)}{D_{d0}(s)} \quad (58)$$

ただし

$$\begin{aligned} N_d(s) &= \left(1 - \frac{\alpha}{s + \alpha} e^{-sT}\right) c(sI - A)^{-1}b \\ &\quad \{1 - f_2 e^{AL}(sI - A - kc)^{-1}be^{-sL} \\ &\quad + (f_1 c - f_2) \int_{-L}^0 e^{-A\tau} e^{s\tau} d\tau \\ &\quad + f_1 (ce^{AL} - ce^{-\alpha L})(sI - A - kc)^{-1}be^{-sL}\} \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} D_d(s) &= \left(1 - \frac{\alpha}{s + \alpha} e^{-sT}\right) \{1 - f_2(s, z)(sI - A)^{-1}b \\ &\quad + f_1(s, z)c(sI - A)^{-1}b\} \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} N_{d0}(s) &= (s + \alpha - \alpha e^{-sT}) c \operatorname{adj}(sI - A) b \\ &\quad \{1 - f_2 e^{AL}(sI - A - kc)^{-1}be^{-sL} \\ &\quad + (f_1 c - f_2) \int_{-L}^0 e^{-A\tau} e^{s\tau} d\tau \\ &\quad + f_1 (ce^{AL} - ce^{-\alpha L})(sI - A - kc)^{-1}b\} \end{aligned} \quad (61)$$

$$D_{d0}(s) = |sI - \bar{A}(z) - \bar{b}f(s, z)| \quad (62)$$

である。低周波領域では

$$\left| 1 - \frac{\alpha}{s + \alpha} e^{-j\omega T} \right|$$

の値が小さいので、むだ時間がない場合とほぼ同様な外乱除去特性が得られる。

7. 数値例

つぎの制御対象を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -30 & -11 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-L) \\ y(t) &= [30 \quad 0] x(t) \end{aligned} \quad (63)$$

この制御対象に対しサーボ補償器 (a) を用いた繰返し制御系を構成しよう。まず、フィルタを

$$q(s) = \frac{15}{s + 15} \quad (64)$$

に選ぶ。繰返し制御系の極を $-15, -15, -16$ になるような $f(s, z)$ を求める。オブザーバを

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -30 & -11 \end{bmatrix} \omega(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-L) \\ &\quad + \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.4 \end{bmatrix} \{[30 \quad 0]\omega(t) - y(t)\} \end{aligned} \quad (65)$$

とする。このオブザーバの極は $-17, -18$ である。これらを用いて Fig. 3 の系を構成する。むだ時間がない ($L = 0$) 時の目標入力に対する応答を Fig. 4 に示す。

ここで点線は目標入力、実線が系の出力応答である。入力端に周期外乱が加わったときの制御しないときの自由応答を Fig. 5 に、制御した時の出力応答を Fig. 6 に示す。むだ時間が $L = 1$ の時の周期目標入力、周期外乱に対する応答を Fig. 7, 8 に示す。これらの図から分かるように、制御入力 u はむだ時間に相当する時間だけ先回りして与えられているので、上記で述べたようにむだ時間がない場合とほぼ同じ定常偏差が得られる。

なお、Fig. 7 で $t = 0$ から $t = 9$ まで制御入力 u がほぼ 0 になっているが、これは予測器 (32) 式の $\exp(A_0 L)$ の値が 0 に近い値になっているため、予測値はほぼ第 2

Fig. 4 Response of the repetitive control system to periodic reference input

Fig. 5 Free response of the repetitive control system to periodic disturbance

Fig. 6 Response of the repetitive control system to periodic disturbance

Fig. 7 Response of the repetitive control system with delay to periodic reference input

Fig. 8 Response of the repetitive control system with delay to periodic disturbance

8. おわりに

サーボ補償器にローパスフィルタを挿入した連続時間繰返し制御系は、状態予測器を挿入するだけで、後はその結果、制御対象の零点とサーボ補償器の極の間で零点-極消去がなければ有限極配置可能なこと、従来の方法³⁻⁶と異なり、本方法ではローパスフィルタが安定性に関係せず安定化は状態フィードバックによる有限極配置で、定常特性はローパスフィルタで個々に調整できることを示した。また、むだ時間をもつ制御対象に対する繰返し制御系は、状態予測器を挿入するだけで、後は

項の積分項で決まり、それが $t > T-L=9$ で作動するからである。また、目標入力と制御系の出力の間にわずかな時間遅れがあるが、これは位相遅れと考えられる。

むだ時間を持たない場合と同じ構成で安定化でき、むだ時間をもたない場合とほぼ同等の定常特性（目標追従特性、外乱除去特性）が実現できることを示した。さらに、本方法では、数値例で示したように、従来のようにフィードフォワードパス¹²をつけずに、数周期で目標入力に近づけることができる利点がある。

本方法の難点は、有限区間の積分を要することと、目標入力に収束するまでの過渡状態で応答に、“逆応答”などの望ましくない応答がでる場合があることである。前者はディジタル信号処理プロセッサ (DSP) の使用で対処できる。後者は制御系の極の選びかたなどでの対処が考えられるが、詳しい検討は別の機会にしたい。

参 考 文 献

- 1) 井上, 中野, 久保, 松本, 馬場: 陽子シンクロトロン電磁石電源の繰返し運転における高精度制御, 電気学会論文誌 C, 100 巻, 7 号, pp. 234~240 (1980)
- 2) 井上, 岩井, 中野: プレイバックサーボ系の高精度制御, 電気学会論文誌 C, 101 巻, 4 号, pp. 89~96 (1981)
- 3) 原, 小俣, 中野: 繰返し制御系の安定条件と設計法, 計測自動制御学会論文集, 22 巻, 1 号, pp. 36~42 (1986)
- 4) 山本, 原: 繰返し制御系の内部モデル原理と安定化可能性, 計測自動制御学会論文集, 22 巻, 8 号, pp. 830~834 (1986)
- 5) 原, 山本: 多変数繰返し制御系の安定性—安定条件と安定化補償器のクラス, 計測自動制御学会論文集, 22 巻, 12 号, pp. 1256~1261 (1986)
- 6) 原: 繰返し制御, 計測と制御, 25 巻, 12 号, pp. 1111~1119 (1986)
- 7) 渡部, 山足: スペクトル分解法による繰返し制御系の安定化, 計測自動制御学会論文集, 22 巻, 5 号, pp. 535~541 (1986)
- 8) 新, 北森: 入力, 状態に異なるむだ時間を含む線形遅れ型むだ時間系の有限極配置法, 第 15 回制御理論シンポジウム, pp. 291~294 (1986)
- 9) 渡部, 伊藤: 状態にむだ時間をもつ系の有限極配置, 計測自動制御学会論文集, 18 巻, 9 号, pp. 886~892 (1982)
- 10) L. Pandolfi: On Feedback Stabilization of Functional Differential Equations, Bollettino U. M. I., Vol. 12, No. 4, pp. 626~635 (1975)
- 11) A. W. Olbrot: Stabilizability, Detectability and Spectrum Assignment for Linear Autonomous Systems with General Delays, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-23, No. 5, pp. 887~890 (1978)
- 12) 小俣, 中野: フィードフォワード制御による繰返し制御系の過渡特性の改善, 第 22 回 SICE 学術講演会, 2107 (1983)
- 13) 玄, 新, 大久保: 本質的なむだ時間一つ含む 1 入力線形系の有限極配置法, 計測自動制御学会論文集, 23 巻, 4 号, pp. 386~393 (1987)
- 14) 玄, 新, 大久保: 入力, 状態に異なるむだ時間を含む線形系の有限極配置法, 計測自動制御学会論文集, 13 巻, 4 号, pp. 413~415 (1987)
- 15) 木村, 井上: 多変数制御系の理論と応用 VII, システムと制御, 22 巻, 11 号, pp. 683~692 (1978)