可調整パラメータを有する H^∞ 状態フィードバックによる二次安定化*

山本 茂**・牛田 俊***・木村 英紀****

Quadratic Stabilization by H^∞ State Feedback Control with Adjustable Parameter*

Shigeru YAMAMOTO**, Shun USHIDA*** and Hidenori KIMURA****

A new quadratically stabilizing state feedback controller is derived based on the parameterization of H^∞ controllers. The controller contains a contractive time-varying gain. The time-varying gain can be used to adjust the responses of the resulting closed-loop system. As one of the methods of using this adjustable gain, we consider a steepest descent tuning of Lyapunov functions. Particularly, this tuning method is also a new gain-scheduled control design when parameter variations are assumed to be available for feedback control.

1. はじめに

二次安定化制御は、状態空間モデルの係数変動に対するロバスト安定性を保証する。係数変動がノルム有界であるときの二次安定化状態フィードバック制御問題は、Petersen^{1),2)}やKhargonekarら³⁾によって考察され、線形制御の一つが H^∞ コントローラによって与えられることが示された。二次安定化状態フィードバック問題では、不確かな係数行列をもつシステム

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + \Delta A)x + (B_2 + \Delta B)u \\ y &= x\end{aligned}\quad (1)$$

を対象とする。不確かさは次のような構造をもっているものと仮定する。

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \end{bmatrix} = B_1 \Delta(t) \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix}, \quad \Delta(t) \in \mathcal{B}_\Delta \quad (2)$$

ここで、 $\mathcal{B}_\Delta := \{\Delta(t) : \bar{\sigma}(\Delta(t)) \leq 1\}$ であり、 B_1, C_1, D_{12} は不確かさの構造を特徴づける定数行列である。ただし、 $\bar{\sigma}(\cdot)$ は最大特異値を表す。

【定義 1】⁹⁾ システム (1) 式が、 $u=0$ のとき二次安定であるとは、 n 次定数行列 $P > 0$ と定数 $\alpha > 0$ が存在し、

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x \quad (3)$$

の解軌道に沿った関数 $V(t) = x^T P x$ の時間微分が、任意の $x \in R^n, t \in R$ に対して、

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha \|x\|^2 \quad (4)$$

を満たすことである。また、システム (1) 式が、二次安定化可能であるとは、状態フィードバックが存在して、対応する閉ループ系が二次安定となることである。

Khargonekarら³⁾は、システム (1) 式の二次安定化制御問題が、状態フィードバックによる H^∞ 制御問題に帰着できることを証明している。この結果にもとづいて、二次安定化制御則として、 H^∞ コントローラが一般に用いられている。本論文では、2. で紹介する H^∞ 制御理論の結果を用いて、新しい二次安定化状態フィードバック制御則を提案する。参考文献 6) では、出力フィードバック問題が扱われ、 H^∞ コントローラが $S(s) \in \mathcal{BH}^\infty$ でパラメトライズされるのに対し、パラメータ $\Delta_Q(t) \in \mathcal{B}_\Delta$ によって二次安定化コントローラがパラメトライズされることが示されている（ただし、 $\mathcal{BH}^\infty$ は安定でかつ H^∞

* 原稿受付 1996年1月31日

** 大阪大学 基礎工学部 Faculty of Engineering Science, Osaka University; 1-3 Machikaneyama, Toyonaka city, Osaka 560, JAPAN

*** 東京大学 工学部 Faculty of Engineering, The University of Tokyo; 7-3-1 Hongou, Bunkyo ward, Tokyo 113, JAPAN

**** 東京大学 大学院 工学系研究科 Graduate School of Engineering, The University of Tokyo; 7-3-1 Hongou, Bunkyo ward, Tokyo 113, JAPAN

Key Words: quadratic stabilization, H^∞ state feedback controller, tuning parameter, Lyapunov function, norm-bounded uncertainty.

ノルムが1未満の実有理伝達関数の集合を表す)。本論文では、参考文献6)と同様の考え方にもとづいて、時変パラメータをもつ二次安定化状態フィードバック制御則が構成できることを示す。参考文献6)ではさらに、この時変パラメータ $\Delta_Q(t)$ を利用する方法の一つとして、閉ループ系の Lyapunov 関数を最も速く減少させる方法も提案された。しかし、この方法では閉ループ系の状態が観測できることと、制御対象の不確かさ $\Delta(t)$ が既知であることが前提条件であった。一方、状態フィードバック系では、不確かさ $\Delta(t)$ に関する仮定のみが問題となる。

4. 以降では、 $\Delta(t)$ が既知であるとし、この場合は必ず制御性能の改善が可能であることを示す。 $\Delta(t)$ が不確かさではなく、既知のパラメータであるとするゲインスケジューリング的⁷⁾な枠組においては、参考文献6)の手法が、特に効果的であることが示される。

2. H^∞ 状態フィードバックのパラメトリゼーション

この節では、3. 以降で必要となる、Liu ら⁴⁾によって与えられた H^∞ コントローラのパラメトリゼーションについて述べる。

次式で記述される線形時不変な状態フィードバック制御系を考える。

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

ただし、 $x \in R^n, w \in R^r, u \in R^p, z \in R^m, y \in R^n$ であり、 (A, B_2) は可安定、 (C_1, A) は可観測とする。また、 D_{12} は $m > p$ で列フルランクとする。このとき、次式を満たす D_{12}^+ と D_{12}^- が存在する。

$$\begin{bmatrix} D_{12}^+ \\ D_{12}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{12} & (D_{12}^+)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{m-p} \end{bmatrix} \quad (7)$$

一般に B_1 はフルランクとは限らないが⁸⁾、 D_{11} と D_{21} が0であるので、 B_1 を列フルランクと仮定しても一般性を失わない。以下では、 B_1 は列フルランクとする。

【定理1】⁴⁾ (6) 式のプラントに対し、 w から z への閉ループ伝達関数 (Fig. 1) の H^∞ ノルムを1未満とし、

Fig. 1 H^∞ control problem

かつ閉ループ系を安定にする H^∞ コントローラのクラスは、真にプロパーな自由パラメータ $S(s) \in \mathcal{BH}^\infty$ を用いて、

$$K(s) = \mathcal{F}_l(\Sigma(s), S(s)) \\ := \Sigma_{11} + \Sigma_{12} S(s) (I - \Sigma_{22} S(s))^{-1} \Sigma_{21} \quad (8)$$

$$\Sigma(s) := \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \Sigma_{11} = F_\infty \\ \Sigma_{12} = -W^{-1} \\ \Sigma_{21} = -B_1^+ (sI - A - B_2 F_\infty) + B_1^T X_l^{-1} \\ \Sigma_{22} = -B_1^+ B_2 W^{-1} \end{cases} \quad (10)$$

で与えられる[†] (Fig. 2). X_l は、Riccati 方程式

$$\hat{A}_2 X_l + X_l \hat{A}_2^T + X_l C_1^T (D_{12}^+)^T D_{12}^+ C_1 X_l \\ + B_1 B_1^T - B_2 D_{12}^+ (D_{12}^+)^T B_2^T = 0 \quad (11)$$

の正定な安定化解であり、 W, B_1^+ はそれぞれ、 $W D_{12}^+ (D_{12}^+)^T W^T = I_p$, $B_1^+ B_1 = I_r$ を満たすように選ぶ。各記号は以下のとおりである。

$$F_\infty := -[D_{12}^+ C_1 + D_{12}^+ (D_{12}^+)^T B_2^T X_l^{-1}] \quad (12)$$

$$\hat{A}_2 := A - B_2 D_{12}^+ C_1 \quad (13)$$

Fig. 2 H^∞ controller

3. 二次安定化コントローラの導出

2. の H^∞ コントローラ $K(s)$ のパラメトリゼーションにもとづいて^{††}, (1) 式のシステムに対する新しい二次

[†] コントローラは、さらに自由度 $U(s)$ をもつが、本論文では $U(s) = 0$ の場合を取り扱う。詳しくは参考文献4)を参照のこと。

^{††} 参考文献4)以外のコントローラのパラメトリゼーション(例: 参考文献5))を用いることも可能である。

安定化状態フィードバックコントローラを導出する。

【定理 2】³⁾ (1), (2) 式で記述されるシステムが二次安定化可能であるための必要十分条件は, (6) 式のプラントに対する H^∞ 制御問題が可解となることである。すなわち,

$$\|\mathcal{F}_l(G(s), K(s))\|_\infty < 1 \quad (14)$$

を満たす H^∞ コントローラが存在することである。

この H^∞ 制御問題において, w から z への閉ループ伝達関数 $\mathcal{F}_l(G(s), K(s))$ は, (8) 式より,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l(G(s), K(s)) &= \mathcal{F}_l(G(s), \mathcal{F}_l(\Sigma(s), S(s))) \\ &:= \mathcal{F}_l(\Theta(s), S(s)) \end{aligned} \quad (15)$$

となる (Fig. 3)。ここで, $\Theta(s)$ は $G(s)$ と $\Sigma(s)$ とのスター積[†]であり, 各要素は次式で与えられる。

Fig. 3 A plant connected with a controller

$$\begin{aligned} \Theta_{11}(s) &= G_{11} + G_{12}\Sigma_{11}(I - G_{22}\Sigma_{11})^{-1}G_{21} \\ \Theta_{12}(s) &= G_{12}[I + \Sigma_{11}(I - G_{22}\Sigma_{11})^{-1}G_{22}]\Sigma_{12} \\ \Theta_{21}(s) &= \Sigma_{21}(I - G_{22}\Sigma_{11})^{-1}G_{21} \\ \Theta_{22}(s) &= \Sigma_{22} + \Sigma_{21}(I - G_{22}\Sigma_{11})^{-1}G_{22}\Sigma_{12} \end{aligned}$$

上式に (6), (10) 式を代入する。

$$\Theta(s) = \begin{bmatrix} A + B_2 F_\infty & B_1 - B_2 W^{-1} \\ C_1 + D_{12} F_\infty & 0 - D_{12} W^{-1} \\ B_1^T X_l^{-1} & -I & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

この $\Theta(s)$ が縦長であるときは, $\Theta(-s)^T \Theta(s) = I$ を満たし, $\Theta(s)$ が横長であるときは, 適当な $\hat{\Theta}(s)$ が存在して,

$$\begin{bmatrix} \Theta(-s)^T & \hat{\Theta}(-s)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta(s) \\ \hat{\Theta}(s) \end{bmatrix} = I \quad (17)$$

を満たす。このとき,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta(s) \\ \hat{\Theta}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

と入出力を定義すれば, 任意の ω に対し,

$$\begin{aligned} \|y_1(j\omega)\|^2 + \|y_2(j\omega)\|^2 + \|\hat{y}_2(j\omega)\|^2 \\ = \|u_1(j\omega)\|^2 + \|u_2(j\omega)\|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

となる。これより,

$$\|y_1(j\omega)\|^2 + \|y_2(j\omega)\|^2 \leq \|u_1(j\omega)\|^2 + \|u_2(j\omega)\|^2$$

を得る。ここで, 任意の正の定数 $\epsilon < 1$ を用いて, 新たに入出力を

$$\begin{bmatrix} z \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \epsilon I \end{bmatrix} \Theta(s) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \epsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \xi \end{bmatrix} \quad (20)$$

と定義すれば, (18) 式から (20) 式への変形と同じように,

$$\|z(j\omega)\|^2 + \|\epsilon^{-1}\eta(j\omega)\|^2 \leq \|w(j\omega)\|^2 + \|\epsilon\xi(j\omega)\|^2 \quad (21)$$

を得る。さらに, $\epsilon < 1$ であるから,

$$\|z(j\omega)\|^2 + \|\eta(j\omega)\|^2 < \|w(j\omega)\|^2 + \|\xi(j\omega)\|^2 \quad (22)$$

が成り立つ ($\eta = 0$ かつ $\xi = 0$ のときは, $\|z(j\omega)\|^2 \leq \|w(j\omega)\|^2$ となるが, (14) 式において中心解を用いると $\|\Theta_{11}\|_\infty < 1$ が満たされているので,

$$\|z(j\omega)\|^2 < \|w(j\omega)\|^2 \quad (23)$$

となる)。したがって, 任意の正の $\epsilon < 1$ に対して,

$$\left\| \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \epsilon I \end{bmatrix} \Theta(s) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \epsilon I \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (24)$$

が成立する。(24) 式は, Fig. 4 のシステムが,

$$\begin{bmatrix} \Delta(t) & 0 \\ 0 & \Delta_Q(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{B}_\Delta \quad (25)$$

Fig. 4 An equivalent system

[†]たとえば, 参考文献 8) を参照のこと

に対し二次安定であることを示している³⁾。これは、 $\Theta(s)$ が、仮想的な不確かさ

$$\begin{bmatrix} \Delta(t) & 0 \\ 0 & \epsilon^2 \Delta_Q(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

に対し二次安定であることと等価である。したがって、Fig. 5はFig. 3において、コントローラの自由パラメータである $S(s)$ のブロックが $Q(t) := \epsilon^2 \Delta_Q(t)$ となったものと等価であることがわかる。

Fig. 5 A plant connected with a time-varying controller

以上のことから、次の結果を得る。

【定理 3】 (5) 式のプラントに対する H^∞ 制御問題 (14) 式が可解であるならば、不確かさをもつシステム (1) 式は二次安定化可能である。このとき、二次安定化制御則は次式で与えられる。

$$K(s) = \mathcal{F}_l(\Sigma(s), \epsilon^2 \Delta_Q(t)), \quad (27)$$

$$\Delta_Q(t) \in \mathcal{B}_\Delta, \quad \epsilon < 1$$

あるいは、(27) 式は、等価な表現として次式でかける。

$$K(s) = \mathcal{F}_l(\Sigma(s), Q(t)), \quad \bar{\sigma}(Q(t)) < 1 \quad (28)$$

ここで、(27)、(28) 式のコントローラは、状態空間表現で表すべきであるが、記述の簡略化のため伝達関数表現を用いている。

(注意) 定理 3 の導出は参考文献 6) と同様の考えにもとづいている。しかし、参考文献 6) で得られた出力フィードバックの結果を (1) 式のシステムに適用して、定理 3 を導くことはできない。

(注意) 制御則 (27)、(28) 式の実現のためには、 Σ_{21} がプロパーでないため、適当な真にプロパーな $\mathcal{BH}^\infty$ の要素 $\sigma(s)$ を用いて、

$$\Sigma = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma(s)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

なる置換が必要である。この場合でも、3. の議論は成り立つ。

4. 時変ゲインによる Lyapunov 関数の最急降下チューニング

この節では、参考文献 6) と同様に、コントローラに含まれている時変パラメータ $\Delta_Q(t)$ の選び方の一つとして、Lyapunov 関数の時間微分を最小にする方法を考察する。

(5) 式のプラントに対する H^∞ 制御問題 (14) 式が可解であると仮定する。このとき、不確かさをもつシステム (1) 式は二次安定化可能である。定理 3 より、二次安定化制御則は、 $\mathcal{F}_l(\Sigma(s), \epsilon^2 \Delta_Q(t))$ で与えられ、閉ループ系

$$\begin{cases} y = \mathcal{F}_u(G(s), \Delta(t))u \\ u = \mathcal{F}_l(\Sigma(s), \epsilon^2 \Delta_Q(t))y \end{cases} \quad (29)$$

は、二次安定となる。この閉ループ系は Fig. 6 のように表現でき、(16) 式より、閉ループ系の実現は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{A}x + \bar{D}\bar{\xi} \\ \bar{\eta} &= \bar{E}x + \bar{H}\bar{\xi} \\ \bar{\xi} &= \bar{\Delta}(t) \bar{\eta} \end{aligned} \quad (30)$$

ただし、 $\bar{A}, \bar{D}, \bar{E}, \bar{H}, \bar{\Delta}(t)$ は次式である。

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{D} \\ \bar{E} & \bar{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 F_\infty & B_1 & -\epsilon B_2 W^{-1} \\ C_1 + D_{12} F_\infty & 0 & -\epsilon D_{12} W^{-1} \\ \epsilon B_1^T X_l^{-1} & -\epsilon I & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\bar{\Delta}(t) := \begin{bmatrix} \Delta(t) & 0 \\ 0 & \Delta_Q(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{B}_\Delta \quad (32)$$

Fig. 6 An equivalent system

また、これと等価な実現 (Fig. 7) は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\Delta x + D_\Delta \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} &= E_\Delta x + H_\Delta \tilde{\xi} \\ \tilde{\xi} &= \Delta_Q(t) \tilde{\eta}, \quad \bar{\sigma}(\Delta_Q(t)) \leq 1 \end{aligned} \quad (33)$$

ただし、 $A_\Delta, D_\Delta, E_\Delta, H_\Delta$ は次式で与えられる。

Fig. 7 An equivalent system

$$\begin{bmatrix} A_\Delta & D_\Delta \\ E_\Delta & H_\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 F_\infty & -\epsilon B_2 W^{-1} \\ \epsilon B_1^T X_l^{-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ -\epsilon I \end{bmatrix} \Delta(t) \begin{bmatrix} (C_1 + D_{12} F_\infty) & -\epsilon D_{12} W^{-1} \end{bmatrix}$$

二次安定の定義により,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &:= 2x^T P \bar{A}x + 2x^T P \bar{D} \bar{\Delta}(t) (I - \bar{H} \bar{\Delta}(t))^{-1} \bar{E}x \\ &= 2x^T P A_\Delta x \\ &\quad + 2x^T P D_\Delta \Delta_Q(t) (I - H_\Delta \Delta_Q(t))^{-1} E_\Delta x \\ &\leq -\alpha \|x\|^2 \end{aligned} \quad (35)$$

を満たす、正定行列 $P > 0$ が存在する。この P は、ある $\rho > 0$ に対して、Riccati 方程式

$$\begin{aligned} &\bar{A}^T P + P \bar{A} \\ &+ (P \bar{D} + \bar{E}^T \bar{H}) (I - \bar{H}^T \bar{H})^{-1} (P \bar{D} + \bar{E}^T \bar{H})^T \\ &+ \bar{E}^T \bar{E} + \rho I = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

を満たす解として計算される。このとき、閉ループ系の Lyapunov 関数は、

$$V = x^T P x \quad (37)$$

である。

参考文献6)では、時変パラメータ $\Delta_Q(t)$ の選び方として、Lyapunov 関数の時間微分を最小にする方法が検討された。すなわち、

$$\Delta_{Q\text{opt}}(t) = \arg\min_{\Delta_Q} \dot{V}(t) \quad (38)$$

を満たす $\Delta_{Q\text{opt}}(t)$ を求める問題である。 $\Delta(t)$ が既知の場合の解は、参考文献6)で、次の定理4のように与えられている。 $\Delta(t)$ が既知であるという仮定は、一般には満たされないが、何らかの方法により $\Delta(t)$ の推定が逐次可能となれば、定理4の方法を用いることができる。これは今後の課題である。また、 $\Delta(t)$ を既知パラメータとするゲインスケジューリングの枠組においては、定理4は一つの新しいゲインスケジューリング制御則を与えている。いずれの場合も重要なことは、制御則の計算に用いる $\Delta(t)$ の値が、実際の値と異なっていたとしても、閉ループは二次安定となることである。

【定理4】 (30)式で記述されるシステムの Lyapunov 関数の最急降下チューニングパラメータ $\Delta_{Q\text{opt}}(t)$ は、

$$\Delta_{Q\text{opt}}(t) = \begin{cases} 0 & \left(\begin{array}{l} D_\Delta^T P x = 0 \text{ or} \\ E_\Delta x = 0 \end{array} \right) \\ \mathcal{HM}(\Xi, \tilde{Q}) & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (39)$$

である。ただし、 Ξ と $\tilde{Q}$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Xi &= \begin{bmatrix} (I - H_\Delta^T H_\Delta)^{-\frac{1}{2}} & H_\Delta^T (I - H_\Delta H_\Delta^T)^{-\frac{1}{2}} \\ H_\Delta (I - H_\Delta^T H_\Delta)^{-\frac{1}{2}} & (I - H_\Delta H_\Delta^T)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ &:= \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\tilde{Q} = -\frac{\Xi_{11} D_\Delta^T P x x^T E_\Delta^T \Xi_{22}}{\|\Xi_{11} D_\Delta^T P x\| \|\Xi_{22} E_\Delta x\|} \quad (41)$$

また、 $\mathcal{HM}(\Xi, \tilde{Q}) := (\Xi_{11} \tilde{Q} + \Xi_{12})(\Xi_{21} \tilde{Q} + \Xi_{22})^{-1}$ である。

(略証) (34)式より、 $\bar{\sigma}(H_\Delta) < 1$ が成り立つことがわかる。このとき、直交行列

$$\mathcal{H} := \begin{bmatrix} -H_\Delta^T & (I - H_\Delta^T H_\Delta)^{\frac{1}{2}} \\ (I - H_\Delta H_\Delta^T)^{\frac{1}{2}} & H_\Delta \end{bmatrix} \quad (42)$$

を定義すると、写像

$$\tilde{Q} := \mathcal{F}_I(\mathcal{H}, \Delta_Q) \quad (43)$$

は全単射となり、逆写像は、

$$\Delta_Q := \mathcal{HM}(\Xi, \tilde{Q}) \quad (44)$$

となる。(43)式の写像を用いると、(35)式の $\dot{V}(t)$ を最小にする問題は、

$$\arg\min_Q x^T P D_\Delta \Xi_{11} \tilde{Q}(t) \Xi_{22} E_\Delta x \quad (45)$$

を求める問題に帰着され、 $D_\Delta^T P x \neq 0$ かつ $E_\Delta x \neq 0$ の条件のもとで、(41)式を得る。したがって、(44)式より $\Delta_{Q\text{opt}} = \mathcal{HM}(\Xi, \tilde{Q})$ となる。上の条件が満たされない場合は、 $\Delta_{Q\text{opt}} = 0$ とする。□

5. 数値例

4.で提案した最急降下チューニングによる最適化手法の有効性を、数値例を通して検証する。(1)式で表されるプラントとして、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \delta_1(t) & -1 + \delta_2(t) \end{bmatrix} x(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \delta_1(t) + \delta_2(t) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (46)$$

を考える. (5), (6) 式の表現を用いると,

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$w = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix} z \quad (48)$$

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ -1 & -1 & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \\ I_2 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (49)$$

となる. コントローラとして, Lyapunov 関数を最も早く減少させる時変チューニング則を用いた場合と, H^∞ コントローラの中心解 F_∞ を用いた場合のシミュレーション結果の比較を Fig. 9~Fig. 11に示す. パラメータ変動として,

$$\begin{aligned} \Delta(t) &:= \begin{bmatrix} \delta_1(t) & \delta_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \end{bmatrix}, \quad \bar{\sigma}(\Delta(t)) = 1 \end{aligned} \quad (50)$$

を与えた (Fig. 8). Fig. 9は, $\Delta_Q(t) = 0$ とした中心解の場合 (破線) との比較である. 時変チューニングパラメータの効果により, Lyapunov 関数がより早く減少していることを示している. このときの $\Delta_Q(t)$ の変化を Fig. 10に示す. また, 二次安定性の定義より, 状態変数の値が時変コントローラを用いた場合にすべての時刻において小さくなることは保証されないが, Fig. 11に示されるように小さく抑えられる傾向があるため, 実際の制御系では制御性能が向上することが期待される.

6. おわりに

不確かな係数行列をもつシステムに対し, H^∞ コントローラのパラメトリゼーションにもとづいて, 時変な可調整パラメータを有する新しい二次安定化状態フィー

Fig. 8 An uncertainty $\Delta(t)$ in simulations

Fig. 9 Time responses of the Lyapunov function

Fig. 10 Time response of time-varying tuning parameter $\Delta_Q(t)$

Fig. 11 Time responses of the state $x_i(t), i=1,2$

ドバックコントローラを導出した. 数値例を挙げて, 時変パラメータの選び方の一つの指針である, 閉ループの Lyapunov 関数を最も早く減少させる方法の有効性を確かめた. この手法は, 状態フィードバック制御のようにシステムの状態が観測可能な場合に有効である. さらに, 時変コントローラ的设计には, システムの不確かさの情報が必要であるので, システム同定による不確かなモデ

ルの作成が不可欠であり、今後の課題である。しかし、本論の結果は、制御対象のパラメータ変動が既知である場合の新しいゲインスケジューリングの方法を与えている。

参考文献

- 1) I. R. Petersen: A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems; *Systems and Control Lett.*, Vol. 8, pp. 351–357 (1987)
- 2) I. R. Petersen: Stabilization of an uncertain linear system in which uncertain parameters enter into the input matrix; *SIAM J. Contr. and Optimiz.*, Vol. 26, No. 6, pp. 1257–1264 (1988)
- 3) P. P. Khargonekar, I. R. Petersen and K. Zhou: Robust stabilization of uncertain systems: quadratic stabilizability and H_∞ control theory; *IEEE Trans. on Auto. Contr.*, Vol. 35, No. 3, pp. 356–361 (1990)
- 4) K. Liu, T. Mita and R. Kawatani: Parametrization of state feedback H_∞ controllers; *Int. J. Control*, Vol. 51, No. 3, pp. 535–551 (1990)
- 5) H. Kimura and R. Kawatani: Synthesis of H^∞ controllers based on conjugation; *Proc. of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 7–13 (1988)
- 6) 山本, 木村: H^∞ コントローラによる二次安定化制御と時変ゲインによるチューニング; 計測自動制御学会論文集, Vol. 32, No. 4, pp. 486–494 (1996)
- 7) 内田: ゲインスケジューリング; 計測と制御, Vol. 34, No. 3, pp. 182–195 (1995)
- 8) 美多: H^∞ 制御, 昭晃堂 (1994)
- 9) B. Ross Barmish: Necessary and sufficient condition for quadratic stabilizability of an uncertain linear system; *J. Optimiz. Theory Appl.*, Vol. 46, No. 4, pp. 399–408 (1985)