強制振り子のカオスに対する OGY 制御と ロバスト性能*

小川 淳**・安田 昌司***・小澤 芳男***・川合 毅***
・松橋 俊彦***・大隅 正人***

Controlling Chaos by OGY Method and Its Robustness on Forced Pendulum*

Atsushi OGAWA**, Masashi YASUDA***, Yoshio OZAWA***, Tsuyoshi KAWAI***,
Toshihiko MATSUHASHI*** and Masato OSUMI***

The OGY method can harness chaotic motion of plants to the periodic orbit which is arbitrarily chosen and has been already verified on comparatively simple and well-known chaotic attractors like Lorentz attractor and so on. Its method is expected because it doesn't need any arithmetic model like differential equations but time-series data of single variable which represents the substantial behavior of target plants. We have already studied on an application of its method to a forced pendulum, whose pivot point is sinusoidally vibrated horizontally, as a typical mechanical plant and shown some problems to be considered.

In this paper, trying to apply the OGY method to the number of the saddle points of the periodic orbits which occur chaotic motion on the forced pendulum, influence of noise given onto the parameters of the forced pendulum is studied using a numerical simulation. Consequently it is suggested that the angle between stable direction and unstable one and the relation between their directions around saddle points on the Poincare section and the directions of the axes of Poincare sections is substantial for the control performance.

1. はじめに

非線形力学系におけるカオス現象を制御できる方法として, Ott, Grebogi, Yorke による OGY 法¹⁾が提案されている. 制御対象の数式モデルを必要とせず, 1 次元時系列信号のみを観察することで可能となる制御方法である, わずかな摂動を加えることで周期軌道に閉じこめることができるため, 実用上の期待がある. 筆者らはこれまでに, ローレンツアトラクタ²⁾よりも複雑な様相を示す非線形力学系³⁾⁻⁵⁾である, 水平方向に周期的外力の加わる強制振り子を対象として, OGY 法を適用し有効性を確認してきた⁶⁾.

本研究では, まず, 制御目標である周期軌道中心点に

おける安定多様体と不安定多様体のなす角度による制御の難易への影響について, 複数の周期軌道中心点に対して考察する. そこでは, OGY 制御に成功した 5 種類の周期軌道を示す. つぎに, 強制振り子の角速度のような各種のパラメータに, ある種のノイズが重畳した場合の制御への影響について考察する. そこでは, ノイズを加えた場合に周期軌道に拘束し続けられるかという観点からのロバスト制御性能を検討する. いずれも数値シミュレーションによる結果をもとに定性的な検討を行う.

最後に, それらも含めて, OGY 制御の実用化における課題について示唆する.

2. OGY 法と強制振り子

2.1 OGY 法

OGY 法のアルゴリズムについて, 参考文献 1) から Fig. 1 を引用して説明する.

- (1) ボアンカレ断面上でカオスアトラクタから任意の周期軌道を抽出, その周期軌道の中心点を探索する.

* 原稿受付 1996 年 4 月 11 日

** 三洋電機 (株) 研究開発本部 SANYO Electric Co., Ltd., R&D Head Quarters; 1-8-13 Hashiridani, Hirakata city, Osaka 573, JAPAN

***三洋電機 (株) メカトロニクス研究所 SANYO Electric Co., Ltd., Mechatronics Research Center; 1-1 Dainich, Higashimachi, Moriguchi city, Osaka 570, JAPAN

Key Words: chaos, control, forced vibration, robustness, simulation.

- (a) The n -th ξ_n pierces near the saddle $\xi_F(P_0)$.
 (b) The parameter P is perturbed to move the saddle along the unstable direction.
 (c) The $(n+1)$ -th ξ_{n+1} falls near the stable manifold of $\xi_F(P_0)$.
 (d) Repeat (a), (b) and (c)

Fig. 1 OGY control algorithm

- (2) ポアンカレ断面上で、周期軌道の中心点近傍の固有値、固有ベクトルを推定する。
 (3) 制御パラメータを変化させたときの周期軌道の中心点の変化量を計算する。
 (4) アトラクタがポアンカレ断面を通過するとき、次式により制御パラメータに摂動を与え、アトラクタを制御する。ただし、中心点から一定の距離以内を通過する時のみ摂動を与える。

$$\Delta P_n = \frac{\chi u}{\chi u - 1} \frac{\xi_n \cdot f u}{g \cdot f u}, \quad (1)$$

ΔP_n : 制御パラメータに与える摂動量

χu : 周期軌道中心点付近の固有値

ξ_n : 周期軌道中心点を原点としたポアンカレ断面上の点の座標

$f u$: 周期軌道中心点付近の写像行列の転置行列の固有ベクトル

g : 制御パラメータに摂動を与えた時の周期軌道中心点の移動量

2.2 対象とする強制振子

実際のプラントへの応用を考慮して、これまでにOGY制御の成功例が示されているローレンツアトラクタやエノンマップよりも複雑な様相を示すカオスとして、本論文では、Fig. 2に示すような、支点を水平方向に周期振動させるタイプの強制振子を対象とした。基礎式は、減衰項を有するもので以下の式で表される。

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{C}{ML}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = \frac{A}{L}\omega^2\sin\phi\cos\theta, \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \quad (3)$$

Fig. 2 Model of forced pendulum

A : 強制振動の振幅

ω : 強制振動の角速度 ($d\phi/dt$)

ϕ : 強制振動の位相

M : 振子の質量

L : 振子の支点から重心までの距離

θ : 振子の鉛直となす角

g : 重力加速度

C : 減衰係数

実際のプラントへの適用を考慮するならば、本来はプラントの構造は未知であり、当然、上記のような非線形系の微分方程式は得られないのが一般的であるため、まず、プラントから得られる時系列信号から埋め込みによってプラントのアトラクタの生成およびポアンカレ断面の作成を行わなければならない。しかしながら、埋め込みの過程だけでも、いまだ多くの議論がなされている段階であり、本論文では、上記の微分方程式に対して4次のRunge-Kutta法を用いた近似計算を行うことで得られる数値から解析を開始することにした。計算における時間ステップは、0.002としている。また、ポアンカレ断面は、空間 $\theta - \dot{\theta} - \phi$ における $\theta - \dot{\theta}$ 平面を使い、通常 $\phi = 0$ とした。

OGY制御における微妙な摂動を与える制御パラメータとしては、強制外力の角速度である ω が適当と考え、OGY制御における制御パラメータ ΔP として使用することにした。(1)式における周期軌道付近の固有値 χ 、固有ベクトル f は、近似計算によって得られたポアンカレ断面上の移動ベクトルをもとに最小自乗法で算出した。

2.3 OGY制御の対象領域

OGY制御で前提となる周期軌道の中心点の発見法は、確立したアルゴリズムは見あたらない。本研究では、ポアンカレ断面を軌道が順次通過する点に番号を付け、た

例えば、2 周期であれば、 N 番目と $N+2$ 番目の点間の距離を網羅的に調べ、その距離の小さい組み合わせが集まっている部分において、それらの点の座標の平均値を周期軌道中心点であると考え、以下の OGY 制御を適用することにした。また、中心点の発見が容易なように、分岐図などを用いて調べた結果に基づいて、安定状態からカオスへと遷移する初期のカオスについて解析している。実際、この制約を取り除くと最大 Lyapunov 数が 6 以上となり、発散が大きく中心点の発見は困難であった。したがって今回の解析は、下記の限定された条件下において発生するカオスを中心として確認された結果を示している。

$$\omega = 10.9 \pm 0.1 [\text{rad/s}]$$

$$A = 0.125 [\text{m}]$$

$$L = 0.08 [\text{m}]$$

$$C = 4.0 [\text{N} \cdot \text{s}], 6.0 [\text{N} \cdot \text{s}]$$

周期的な強制外力が、その位相 $\phi = 0$ を通過するときに OGY 制御のアルゴリズムに従って加える摂動 $\Delta P (= \Delta\omega)$ の範囲としては、試行錯誤による結果から $\pm 0.1 [\text{rad/s}]$ に設定した。また、この範囲では、常にカオス状態であることを確認してある⁶⁾。参考までに Fig. 3 に、 $C = 4.0$ の場合について、 ω を横軸にとった Lyapunov 数の分布を示す。

Fig. 3 Lyapunov number λ vs ω

3. 各種の周期軌道への OGY 制御

$C = 4.0$ においては、一つの 2 周期軌道への OGY 制御に成功した⁶⁾。より多くの場合を検討するために、 $C = 6.0$ (他のパラメータは変えない) すなわち減衰を強くしたことにより、新たに幾つかの中心点を発見することができた。 $C = 6.0$ の場合に OGY 制御可能であることを確認できた 5 種類の周期軌道について、ポアンカレ断面上での中心点のおよその位置を Fig. 4(a)~(c) に示す。強制振り子は軸対称な挙動を示すので、 $\phi = 0^\circ$ での 2 周期、3 周期の中心点は、 $\phi = 180^\circ$ で対称な位置にも 2 周期、3

Fig. 4 Poincare section for $\phi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$

周期があるといった性質も中心点発見に役だった。図中で、right, left と添字で示しているのは、別の周期軌道として区別するためである。また、2 周期 (右) 軌道に対して OGY 制御を行った場合の振り子先端 (支点と反対側の端点) の挙動を Fig. 5 に示す。2 周期 (左) 軌道

Fig. 5 Chaotic locus of the end point of the forced pendulum under controlling onto a 2nd periodic orbit

Fig. 6 Schematic view of stable and unstable manifold around each saddle-point

では、これと左右対称の位置に軌跡が描かれる。あとで述べるように OGY 制御では、トラップしようとしている中心点近傍を軌道が通過するときに初めて摂動が加えられるので、図では2周期にトラップされている部分(2周期軌道を何回か通過するので濃く見える)とそれ以外

の軌道(破線)が表示されている。中央部で水平方向の破線を示しているが、これは強制振りの支点の軌跡を示している。トラップされるまでの様子は、初期条件によって異なる。

Fig. 6(a)~(f)に各周期軌道中心点近傍における、安定

多様体と不安定多様体を、ポアンカレ断面を通過する点と次に通過する点を線で結ぶことで写像を視覚化して示している。たとえば、1 周期であれば、 N 番目の通過点と $N+1$ 番目の通過点を結ぶ。2 周期であれば、 N 番目と $N+2$ 番目を結ぶ。ここで、ポアンカレ断面を作成する場合の約束に従って、断面を一方に通過する場合のみをカウントすることになっている。安定方向、不安定方向と $\theta - \dot{\theta}$ 軸の方向との関係を示すために、 $\theta=0$, $\dot{\theta}=0$ と平行な線分もあわせて参考までに表示している。

このような線分の集合から、目視によりおおまかな方向を各図に添付して示した。それらの添付図から流れの安定方向と不安定方向のなす角度には、極端に小さい場合は少なく、これは OGY 制御のアルゴリズムにおいて、摂動 ΔP により期待している効果から考えて妥当な結果であると考えられる。

制御に成功しなかった例を Fig. 7(a)~(c) に示す。Fig. 7(a) はポアンカレ断面上での候補となりうる中心点のおよその位置を示す。Fig. 7(b), (c) により、中心点まわりのベクトルを観察してみると、制御に成功した場合に比べて明確な流れの様子がなく、不安定方向と安定方向のベクトルが交差しているように見える部分もある。中心点の近傍に別の中心点があるためではないかと推測される。中心点の発見方法は、2.3 で述べた方法をとっており、それは OGY 制御に成功することで結果的に中心点であったことと推定できる。したがって Fig. 7(b), (c) では中心点（の候補）を示すことができない。

また、上記したトラップされるまでの過程については、Fig. 8 に上記の 3 周期（左）をその一例として振り子の鉛直方向との角度 θ の時系列を示す。OGY 制御は時間軸の原点から適用しているが、カオス軌道が、制御しようとしている中心点の近傍を通過するまでは実質的な効果がない。Fig. 8 から、実際に摂動 ΔP を加えるまでに 10 秒程度の遷移時間が観測され、これは、振り子の挙動の初期値や制御しようとしている中心点により異なる。中心点により異なる理由としては、中心点近傍の引き込み領域の大きさに依存しているものと推測される。

このように、OGY 制御では、任意の周期軌道に制御可能ではあるが、実際には、上記のような周期軌道中心点により、制御性能に差があることが幾つかの数値シミュレーション結果から発見できた。

4. ノイズの重畳による制御性能への影響

実際のプラントへの応用を考慮すると、摂動 ΔP をはじめとする各種のパラメータに微弱な変動が重畳された場合の制御性能への影響を調べておくことは価値がある。観測誤差、制御量の誤差などを想定して、以下で述べるような方法で検討した。

(a) Poincaré section for $\phi = 0^\circ$

(b) Uncontrollable case (2nd periodic orbit)

(c) Uncontrollable case (1st periodic orbit)

Fig. 7 Uncontrollable cases ($\omega=10.9$, $C=6$)

Fig. 8 Time-series of θ under controlling chaos of 3rd periodic orbit(left)

Table 2 Robustness for each periodic orbits controlled by OGY method against noise added on each parameters

Plant Explored plain Periodic orbits Parameters with noise	Damping factor: $C=6.0$						$C=4.0$
	Poincare section: $\phi=0^\circ$						$\phi=0^\circ$
	1st periodic	2nd periodic (right)	2nd periodic (left)	3rd periodic (right)	3rd periodic (left)	2nd periodic (right)	2nd periodic
a	0.7	0.9	0.9	0.6	0.6	0.8	0.9
ω	0.2	0.1	0.1	0.1	$<<0.1$	$<<0.1$	$<<0.1$
C	1.0	1.5	1.4	0.6	0.6	1.1	1.0
θ	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1	0.6	0.2
$\dot{\theta}$	0.1	0.5	0.6	0.1	0.1	<0.1	21.0
ϕ	$<<0.1$	0.3	0.3	0.1	0.1	0.1	<0.1

Table 1 Max value of noise

Constant parameters	max value	Variables	max value
A	0.1255	θ	30.0
ω	10.9	$\dot{\theta}$	3.14
C	4.0, 6.0	ϕ	3.14

ノイズを加えるパラメータとそのノイズの値の範囲について Table 1 に示す。

A , ω , C といった定数についてはその値自身を最大値とする変動幅とし, θ , $\dot{\theta}$, ϕ といった変数については, とりうる最大値を変動幅とした. ノイズは, コンピュータで発生できる 0 から $2^{31}-1$ の範囲での擬似乱数に上記の値をかけたものを用いた。

OGY 制御されている状態から, 検討しようとしているひとつのパラメータにノイズを加え, 7500 ステップの期間 (1 ステップを 0.002 秒としているので 15 秒間), 観察し, 安定であればノイズを少し大きくして再度 15 秒間観察する. 順次徐々に大きくして行った. 制御不能かどうかの判定法としては, OGY 制御の摂動量 $\Delta\omega$ が, 制御方法のアルゴリズムから制約されている制御可能な範囲 $\pm 0.1[\text{rad/s}]$ に収まらなくなったとき, 制御不能に陥ったと判定した. 制御不能と可能の境界にあると思われる振る舞いも観測されたため, その時間変化の一例 ($C=4.0$, ポアンカレ断面 $\phi=0^\circ$) を Fig. 9(a)~(i) に示す. たとえば Fig. 9(a), (c), (f) では, 安定して制御可能であり, Fig. 9(b), (d) の場合は, 不能と可能の境界にあるように振る舞い, Fig. 9(e), (i) では, わずかな時間で全く制御不能になることが観測される. 不安定化する限界でのノイズの大きさについて比較するため, ノイズの最大値に対して, そのとき加えているノイズの大きさを百分率で表示した。

前記の 5 種類の周期軌道および Fig. 9 にてノイズに対する応答を示した 2 周期軌道について, 各種パラメータの耐ノイズ性をまとめると Table 2 のようになる. 表中, 上記したように不安定化する境界の値を明示するのに,

明らかに不安定化した場合は数値のみ, ややその数値より小さい場合には $<$ を, はるかに小さい値で不安定化した場合には $<<$ を付した. この区別は, 制御不可能の定義を厳密に与えていないことから, 主観的判断に基づいているが, 以下での定性的考察のために示した。

Table 2 にまとめた結果を考察すると, C の値, ポアンカレ断面の選択も含めての周期軌道中心点およびノイズを印加するパラメータの種類により制御への影響にかなり差があることがわかる. とくに, ω はノイズに弱い. また, $\dot{\theta}$ では, 特にノイズに強い場合が発見されたが, 同じ周期軌道であってもポアンカレ断面が異なると, 強さが異なっている. この点についてさらに詳しく調べてみた。

$C=4.0$ とした場合, 2 周期軌道でポアンカレ断面が $\phi=0^\circ$ のとき耐ノイズ性は, θ が非常に強く, 次に A と C であり, ω , $\dot{\theta}$, ϕ は非常に弱かった. これに比べて, $C=6.0$ の場合には, 他のポアンカレ断面でも, ばらつきはあるものの, 特別に強いものはなかった. この原因として, ポアンカレ断面での中心点近傍のようすを Fig. 6 で示したような安定多様体と不安定多様体を線分でベクトル表示する方法を用い, それらとポアンカレ断面を構成する, θ 軸, $\dot{\theta}$ 軸とのなす角度を調べた. その結果を Table 3 に示す. 耐ノイズ性が非常に強かった場合, 安定方向と $\dot{\theta}$ 軸のなす角度は 3° と非常に小さいことがわかる. いっぽう, さほど耐ノイズ性が強くなかった場合を見ると, 安定方向と θ 軸のなす角度はあまり小さくはない. 同じ周期軌道で異なるポアンカレ断面で OGY 制御した場合, 角度と耐ノイズ性には若干の関連性が見られる. このような観察を根拠として, $\dot{\theta}$ 軸と安定多様体の方向が非常に近いかな否かにより, $\dot{\theta}$ の耐ノイズ性に差が出たのではないかと推測される。

また, いずれの場合も, ω の耐ノイズ性は弱い. ω は OGY 制御で摂動に用いている制御量であるため, 微小な変動でもプラントに大きな影響を与えることが必要であるが, 実システムで適用する場合には, ノイズの影響をなるべく受けにくいことを考慮しなければならないこ

Fig. 9 Time-series of ΔP with the effect of noise

とがわかる。

5. おわりに

OGY 法で強制振子のカオスを 5 種類の周期軌道中心点近傍に制御可能であることを確認した。

実用化にあたっての課題としては、複雑なカオストラクタにおいても所望の周期軌道をより簡単に発見する方法、周期軌道の中心点において制御できるための安定多様体・不安定多様体のなす角度についての条件、各種パラメータにノイズが加わる場合は、ポアンカレ断面に

Table 3 Comparison of robustness using the angle between the Poincare axes and the direction of stable manifold

Plant	Damping factor: $C=6.0$						$C=4.0$
	Poincare section: $\phi=0^\circ$					$\phi=90^\circ$	$\phi=0^\circ$
Explored plain	1st periodic	2nd periodic (right)	2nd periodic (left)	3rd periodic (right)	3rd periodic (left)	2nd periodic (right)	2nd periodic
Periodic orbits							
Parameters with noise							
θ	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1	0.6	0.2
θ	0.1	0.5	0.6	0.1	0.1	<0.1	21.0
Angle between the Poincare axes and stable direction	57°	26°	25°	36°	36°	39°	3°

より、そのロバスト性能が変化することを考慮して中心点を選ばなければならないことなどが明らかとなった。

残された課題のひとつとして、OGY 制御を開始してから周期軌道にトラップするまでの遷移時間について実例を示した。今後は、その対策の検討を行う予定である。

最後に、中心点周りの流れの解析方法についてご教示いただきました、京都大学工学部北野正雄先生に深甚の謝意を表します。また、ご指導いただいた当社、研究開発本部塚本一義博士、制御システム研究部鈴木龍司部長に謝意を申し添えます。

参考文献

- 1) E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke: Controlling chaos; *Phys. Rev. Let.*, Vol. 64, pp. 1196–1199 (1990)
- 2) M. Ding and J. A. Scott Kelso: *Controlling Chaos "A Selection Mechanism For Neural Information Processing"*, World Scientific (1991)
- 3) M. Kitano: Chaos and period-doubling bifurcations in a simple acoustic system; *Phys. Rev. Let.*, Vol. 50, pp. 713–716 (1983)
- 4) T. Hikiyara and M. Touno: Controlling chaos of magneto-elastic beam by delayed feedback-stabilization by onset window; 電気学会研究会資料, No. IP-96-4, pp. 31–37 (1996)
- 5) 小泉, 細川: カオスと伝熱の制御; 電気学会研究会資料, No. IP-96-3, pp. 17–29 (1996)
- 6) 安田, 小川, 市川, 鈴木, 大隅: 強制振りのカオスと OGY 制御; 機論, Vol. 60, No. 572, C, pp. 1256–1261 (1994)