ディスクリプタシステムの LQ 制御問題に対する 消散不等式と一般化代数リカッチ方程式*

川本 睦史**・片山 徹**

The Dissipation Inequality and Generalized Algebraic Riccati Equation for Linear Quadratic Control Problem of Descriptor System*

Atsushi KAWAMOTO** and Tohru KATAYAMA**

We consider the infinite-horizon linear quadratic control problem for a descriptor system (DLQCP) based on the theory of dissipative system. First, we derive a dissipative inequality for the descriptor system satisfied by the optimal cost of DLQCP. This implies that the optimal cost is characterized by the solution of a linear matrix inequality (LMI). Secondly, we show that the solution of LMI characterizing the optimal cost also satisfies a related generalized algebraic Riccati equation (GARE) if DLQCP is regular. Finally, we derive the optimal solution to DLQCP with fixed terminal condition.

1. はじめに

ディスクリプタシステム (DS) は, 物理システムの構造を保存し, 代数的拘束条件や微分要素を含むシステムを表現できるなど, 表現力の高いシステムとして知られている. このことから, DS の LQ 制御問題 (DLQCP) に対して, これまでに多くの研究が発表されている^{1),5),12),14),15)}.

Lewis⁵⁾は, 変分法に基づいて一般化リカッチ方程式 (GRE)

$$\begin{aligned} E^T \dot{X} E + E^T X A + A^T X E + Q \\ - (E^T X B + S) R^{-1} (S^T + B^T X E) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

を導出し, その対称解を用いて DLQCP の解を与えているが, このリカッチ方程式はシステムがインパルスモードをもつときには, 解をもたないことがあるという欠点がある. 片山, 南野^{14),15)}は, この欠点を改善するために, Lewis と同じく変分法に基づいて次のような連立型の GRE

$$\begin{aligned} E \dot{X} + A^T X + Y A + Q \\ - (Y B + S) R^{-1} (S^T + B^T X) = 0 \\ E^T X = Y E \end{aligned} \quad (2)$$

を導出し, その解を用いてシステムがインパルスモードをもつ場合の有限時間 DLQCP の解を与え, さらに GRE(2), (3) 式において $E^T \dot{X} = 0$ とおくことによって得られる一般化代数リカッチ方程式 (GARE)

$$\begin{aligned} A^T X + Y A + Q \\ - (Y B + S) R^{-1} (S^T + B^T X) = 0 \\ E^T X = Y E \end{aligned} \quad (4)$$

が, 無限時間 DLQCP の解法に適用できることを示した. ただし, GRE (2), (3) 式の解は一般に $t \rightarrow \infty$ で定数行列に収束しないことから, 片山, 南野は GARE (4), (5) 式は GRE (2), (3) 式の定常解であるとは考えてはいない. また, Wang ら¹²⁾は, GARE (4), (5) 式において, $Y = X^T$ という制約のついた GARE を用いて, DS の LQ レギュレータのロバスト安定性を考察している.

一方, 状態空間システム (SS) の無限時間 LQCP (SLQCP) に対して, 消散システム理論を用いる解法が知られている^{7),8),10)}. 変分法による解法と異なり, 消散システム理論による解法は, 有限時間問題を経ずに無限時間問題を扱うことができる. Geerts¹⁾は, 無限時間

* 原稿受付 1996年9月12日

** 京都大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Kyoto University; Yoshida-Honmachi, Sakyo ward, Kyoto city, Kyoto 606-01, JAPAN

Key Words: descriptor system, LQCP, dissipation inequality, LMI, generalized algebraic Riccati equation.

DLQCP に対して、DS へ拡張した消散不等式 (DI) を用いて、最適コストの存在性のある線形行列不等式 (LMI) の可解性との等価性を示し、さらに、その LMI に付随した GARE の可解性について論じている。しかし、Geerts が対象にしたのは Lewis 型の GARE であり、(1) 式の GRE と同様に、この GARE は、システムにインパルスモードが存在する場合には解をもたないことがあるので、インパルスモードが存在するシステムに対する DLQCP の解法には利用できない。

本論文では、Geerts¹⁾と同様に、消散システム理論に基づいて DLQCP を考察するが、Lewis 型ではなく、 $Y = X^T$ の制約のついた片山-南野、Wang らの GARE (4)、(5) 式、および、それに関連する LMI を考えることにより、Geerts の結果を修正し、正則な無限時間 DLQCP と GARE との明確な関係を与え、固定端 DLQCP の解を導出する。

2. では、DS の基礎事項についてまとめておくとともに、本論文で考察する正則な DLQCP の問題設定を行う。3. では、DS に対する DI の定義を与え、DLQCP の最適コストが DI および Bellman の最適性条件を満たすことを示し、最適コストを表す行列の集合を定義する。4. では、正則な DLQCP の最適コストが存在するための必要十分条件を与え、その条件下で、ある LMI と GARE が共に解をもつことを示す。5. では、応用上重要な固定端 DLQCP について考察する。最初に、参考文献 14)、15) で導入された GARE の許容解と本論文で定義する GARE の最大解の関係について述べる。つぎに、最適制御則が存在するための必要十分条件を導出し、最適制御則を与える。付録では、いくつかの補題の証明を与える。

2. 問題設定

2.1 ディスクリプタシステム

次式で与えられる $R^+ := [0, \infty)$ 上で定義された DS

$$\sum: E\dot{x} = Ax + Bu, x(0-) = x_0 \quad (6)$$

$$y = Cx + Du \quad (7)$$

について考察する。ここで、 $E, A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$, $D \in R^{p \times m}$ は定数行列であり、 $x(t) \in R^n$ はディスクリプタ変数、 $u(t) \in R^m$ は制御変数、 $y(t) \in R^p$ は出力変数である。 E は一般に非正則であり、 $\text{rank } E = r \leq n$ とする。また、(6) 式の解の一意性を保証するために、 (E, A) はレギュラー、すなわち、 $\det(-sE + A) \neq 0$ であると仮定する。

DS (6) 式の解は、一般にディラックのデルタ超関数 δ やその微分 $\delta^{(i)}$, $i \geq 1$ を含む超関数である。DS を解析するために、次の超関数のクラス C_{imp} を考える⁶⁾。

$$C_{\text{imp}} = C_{\text{sm}} + C_{\text{p-imp}} \quad (8)$$

$$C_{\text{sm}} = \{v | v \text{ は } R^+ \text{ に台をもつ } C^\infty \text{ 関数}\} \quad (9)$$

$$C_{\text{p-imp}} = \left\{v | v = \sum_{i=0}^l \alpha_i \delta^{(i)}, \alpha_i \in R\right\} \quad (10)$$

ここで、 $\delta^{(0)} := \delta$ であり、添字 imp, p-imp, sm は、それぞれ、impulsive-smooth distribution, pure impulsive distribution, smooth distribution の略である。また、容易に確認できるように、 $v \in C_{\text{imp}}$ に対して、 $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in C_{\text{sm}}$, $v_2 \in C_{\text{p-imp}}$ とする分解は一意的である。

(6) 式の解を $x = x(x_0, u)$ と表す。たとえ $u \in C_{\text{sm}}^m$ であっても、 $x \in C_{\text{sm}}^n$ であるとは限らない。このことに関連して次の補題を示しておく^{1), 2)}。

【補題 1】 (E, A) はレギュラーであり、 $u \in C_{\text{sm}}^m$ と仮定する。このとき、 $x \in C_{\text{sm}}^n$ であるための必要十分条件は $Ex_0 = Ex(0+)$ が成立することである。

つぎに、本論文で使用する二つの部分空間の定義とそれに関する補題を挙げる^{2), 3)}。

【定義 1】 $x(x_0, u) \in C_{\text{sm}}^n$, $y = 0$ となるような $u \in C_{\text{sm}}^m$ が存在するとき、点 x_0 は弱不可観測であるといい、この点のつくる空間を $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\sum)$ と書く。このとき、さらに $x(0+) = x_0$ であれば、点 x_0 は不可観測であるといい、この点のつくる空間を $\mathcal{V}_C = \mathcal{V}_C(\sum)$ と書く。

【定義 2】 $x(x_0, u) \in C_{\text{sm}}^n$ となる $u \in C_{\text{sm}}^m$ が存在するとき、点 x_0 は弱一致であるといい、この点のつくる空間を $\mathcal{I}_C^w = \mathcal{I}_C^w(\sum)$ と書く。また、 $x(x_0, u) \in C_{\text{sm}}^n$, $x(0+) = x_0$ となる $u \in C_{\text{sm}}^m$ が存在するとき点 x_0 は一致であるといい、この点のつくる空間を $\mathcal{I}_C = \mathcal{I}_C(\sum)$ と書く。

【補題 2】 $\mathcal{I}_C^w = R^n$ であるための必要十分条件は

$$\text{im } E + \text{im } B + \text{Aker } E = R^n \quad (11)$$

である。

上の補題より弱一致性はインパルス可制御性¹³⁾と等価な概念であることがわかる。

2.2 DLQCP

DLQCP に消散システム理論を適用するために、状態空間の場合と同様に、許容制御として区分的になめらかな関数を考えるが、2.1 で述べたように区分的になめらかな制御入力を用いても、ディスクリプタ変数 x が区分的になめらかなとは限らない。したがって、任意の初期点 $x_0 \in R^n$ に対して、 u, x がともに区分的になめらかなような u を許容制御とする。厳密な定義を以下に与える。

【定義 3】 $T_1 < T_2$ とする。関数 $f: [T_1, T_2] \rightarrow R^k$ が次の二つの条件

- (1) $f \in C^\infty((T_1, T_2) \rightarrow R^k)$
 (2) $\lim_{t \downarrow T_1} f^{(i)}(t), \lim_{t \uparrow T_2} f^{(i)}(t), \forall i \geq 0$ が存在し、有限である

を満たすとき、 f は $[T_1, T_2]$ でなめらかであるといい、 $f \in C_{sm}^k[T_1, T_2]$ と書く。

【定義 4】 R^+ の任意の分割 $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ ($T_0 := 0, T_N := \infty$) に対して、 $u \in C_{sm}^m[T_i, T_{i+1}]$, $x(x_0, u) \in C_{sm}^n[T_i, T_{i+1}]$, $i=0, \dots, N-1$ を満たす区分的になめらかな $u: [0, \infty) \rightarrow R^m$ が存在するとき、点 x_0 は区分的弱一致であるといい、この点のつくる空間を $\mathcal{I}_C^{pw} = \mathcal{I}_C^{pw}(\Sigma)$ と書く。ただし、 $[T_{N-1}, T_N] = [T_{N-1}, \infty) := [T_{N-1}, \infty)$ と定義する。

【補題 3】 $\mathcal{I}_C^{pw} = R^n$ であるための必要十分条件は、(11) 式が成立することである。

(証明) 付録 1 参照。 $\square$

上の補題の条件は、以下に導入する 2 種類の DLQCP が可解であるための必要条件である。

定義 4 の条件を満たす制御入力 u のクラスを $\mathcal{U}$ と書く。コスト関数を

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty y^T y dt \quad (12)$$

と定義する。ここで

$$y^T y = x^T Q x + 2x^T S u + u^T R u \quad (13)$$

と書けば

$$Q = C^T C, S = C^T D, R = D^T D \quad (14)$$

の関係がある。

本論文で扱う自由端および固定端 DLQCP を、それぞれ、次のように定義する。

LQCP⁻: 任意の $x_0 \in R^n$ に対して最適コスト

$$J_-(x_0) = \inf \{ J(x_0, u) | u \in \mathcal{U} \} \quad (15)$$

を計算し、 $J(x_0, u^*) = J_-(x_0)$ を満たす最適制御則 u^* を求める。

LQCP⁺: 任意の $x_0 \in R^n$ に対して最適コスト

$$J_+(x_0) = \inf \{ J(x_0, u) | u \in \mathcal{U}, \lim_{t \rightarrow \infty} x(x_0, u) = 0 \} \quad (16)$$

を計算し、 $J(x_0, u^*) = J_+(x_0)$ を満たす最適制御則 u^* を求める。

2.3 LQCP の正則性

【定義 5】 $\forall x_0 \in R^n$ に対して

$$y \in C_{sm}^p \Leftrightarrow u \in C_{sm}^m, x(x_0, u) \in C_{sm}^n \quad (17)$$

のとき LQCP は正則であるという。それ以外のときは特異であるという。

SLQCP が正則であるための必要十分条件は、 D がフルランクであることである。DLQCP に対する必要十分条件は、Geerts⁴⁾によって導出された。

【補題 4】 DLQCP が正則であるための必要十分条件は

$$\ker \begin{bmatrix} E & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \cap [A \ B]^{-1} \text{im} E = \{0\} \quad (18)$$

である。ただし $A^{-1}W := \{x | Ax \in W\}$ である。

DLQCP が特異ならば最適制御則がインパルスを含むもので達成される可能性がある。本論文では、正則な DLQCP について考察する。

3. 消散不等式

【定義 6】 $DS \Sigma$ を考える。次の二つの条件が成り立つとき関数 $S: R^n \rightarrow R$ は DI (19) 式を満たすという。

- (1) $S(x_0) = 0, \forall x_0 \in \ker E$
 (2) $\forall x_0 \in R^n, \forall T \geq 0, \forall u[0, T] \in \mathcal{U}[0, T]$ に対して

$$\int_0^T y^T y dt + S(x(T-)) \geq S(x_0) \quad (19)$$

が成り立つ。

【定理 1】 $\forall x_0 \in R^n$ に対して $J_-(x_0) < \infty$ のとき $J_-: R^n \rightarrow R$ は Σ に対する DI (19) 式を満たす。さらに、 $\forall x_0 \in R^n$ と $\forall T \geq 0$ に対して、Bellman の最適性の条件

$$J_-(x_0) = \inf \left\{ \int_0^T y^T y dt + J_-(x(T-)) | u[0, T] \right\} \quad (20)$$

が成り立つ。また、 $J_-(x_0) = x_0^T P_- x_0, \forall x_0 \in R^n$ となるような $P_- \in R^{n \times n}, \ker E \subset \ker P_-$ が一意に存在する。 J_+ に対しても同様のことが成り立つ。また、DI (19) 式を満たす任意の S に対して、 $S(x_0) \leq J_+(x_0), \forall x_0 \in R^n$ が成り立つ。

(証明) $T > 0$ のみを考えればよい。 $J_-(x_0)$ が最適性の条件 (20) 式を満たすことを示す。

$$\begin{aligned} J_-(x_0) &= \inf \left\{ \int_0^\infty y^T y dt | u \in \mathcal{U} \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_0^T + \int_T^\infty y^T y dt | u \in \mathcal{U} \right\} \\ &= \inf \left\{ \inf \left\{ \int_0^T + \int_T^\infty y^T y dt | u[T, \infty) \right\} \right. \\ &\quad \left. | u[0, T] \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_0^T y^T y dt + J_-(x(T-)) | u[0, T] \right\} \end{aligned}$$

ただし, $\inf\{|u|T_1, T_2\}$ は $\mathcal{U}[T_1, T_2]$ 上で $u[T_1, T_2]$ を動かして $\inf$ をとることを意味する. ゆえに上式より $\forall x_0 \in R^n, \forall T \geq 0, \forall u[0, T] \in \mathcal{U}[0, T]$ に対して

$$J_-(x_0) \leq \int_0^T y^T y dt + J_-(x(T-)) \quad (21)$$

が成り立つことがわかる, すなわち $J_-(x_0)$ は DI (19) 式を満たす. また, $J_-(x_0) = x_0^T P_- x_0, \forall x_0 \in R^n$ となるような半正定値行列 $P_- \in R^{n \times n}$ が一意に存在することは明らかである^{9), 11)}. この P_- が $\ker E \subset \ker P_-$ を満たすことを示す. $x_0 \in \ker E$ とする. このとき, (6) 式のラプラス変換は $(sE - A)\hat{x} = B\hat{u}$ となる. $u=0$ とすると $\det(sE - A) \neq 0$ より $x=0$ を得る. したがって $y=0$ である. これより $J_-(x_0)=0$ すなわち $\ker E \subset \ker P_-$ を得る. J_+ の場合も同様に証明できる. さて, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}=0$ となるような任意の $u \in \mathcal{U}$ を考える. この u に対して DI (19) 式において $T \rightarrow \infty$ とすると, $S(x(\infty))=0$ より

$$\int_0^\infty y^T y dt \geq S(x_0) \quad (22)$$

を得る. ゆえに, u に関して上式の両辺の $\inf$ をとると, $J_+(x_0) \geq S(x_0)$ を得る. $\square$

したがって, 定理 1 から

$$P_- = E^T X_- = X_-^T E, X_- \in R^{n \times n}$$

$$P_+ = E^T X_+ = X_+^T E, X_+ \in R^{n \times n}$$

とおくことができる, また DI (19) 式を満たす 2 次形式の S は, $S(x_0) = x_0^T E^T X x_0 = x_0^T X^T E x_0$ とおくことができる. このような X_-, X_+, X は一意でない, したがって, これらの集合を, それぞれ,

$$\Gamma_- := \{X_- \in R^{n \times n} | P_- = E^T X_- = X_-^T E\} \quad (23)$$

$$\Gamma_+ := \{X_+ \in R^{n \times n} | P_+ = E^T X_+ = X_+^T E\} \quad (24)$$

$$\Gamma := \left\{ X \in R^{n \times n} \mid S(x_0) = x_0^T E^T X x_0 = x_0^T X^T E x_0 \text{ は DI (19) 式を満たす} \right\} \quad (25)$$

と定義する. DI (19) 式から明らかに $\Gamma_-, \Gamma_+ \subset \Gamma$ が成り立つ.

【補題 5】 $DS \Sigma$ を考える. $X \in R^{n \times n}, E^T X = X^T E$ および $x_0 \in R^n, T \geq 0, u[0, T] \in \mathcal{U}[0, T]$ とする. このとき

$$\int_0^T y^T y dt + x(T-)^T X^T E x(T-) \quad (26)$$

$$= x_0^T X^T E x_0 + \int_0^T \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T L(X) \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \quad (27)$$

$$L(X) := \begin{bmatrix} A^T X + X^T A + C^T C & X^T B + C^T D \\ B^T X + D^T C & D^T D \end{bmatrix} \quad (28)$$

が成り立つ.

(証明) 直接計算により

$$y^T y + \frac{d}{dt} (x^T X^T E x) = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T L(X) \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (29)$$

が $[0, T]$ で成り立つ. これを $t=0$ から $t=T$ まで積分すればよい. $\square$

【定理 2】 $J_-(x_0) < \infty, \forall x_0 \in R^n$ とする. $\forall x_0 \in R^n, \forall T \geq 0, \forall u[0, T] \in \mathcal{U}[0, T]$ と $\forall X \in \Gamma$ に対して

$$\int_0^T \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T L(X) \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \geq 0 \quad (30)$$

が成り立つ. さらに $\forall X_- \in \Gamma_-$ に対して

$$\inf \left\{ \int_0^T \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T L(X_-) \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \mid u[0, T] \right\} = 0 \quad (31)$$

が成り立つ. 同様のことが $\forall X_+ \in \Gamma_+$ についても成り立つ. また, $\forall X \in \Gamma, \forall X_+ \in \Gamma_+$ に対して, 不等式 $E^T X \leq E^T X_+$ を得る.

(証明) $\forall x_0, \forall T \geq 0, \forall u[0, T] \in \mathcal{U}[0, T], \forall X \in \Gamma$ に対して

$$x(T-)^T X^T E x(T-) + \int_0^T y^T y dt \geq x_0^T X^T E x_0 \quad (32)$$

が成り立つ. (32) 式と補題 5 より, (30) 式を得る. 同様に, 定理 1 の (20) 式と補題 5 より, $\forall X_- \in \Gamma_-$ に対して, (31) 式が成立する. 定理の残りの部分は, $S \leq J_+, S(x_0) = x_0^T E^T X x_0, J_+(x_0) = x_0^T E^T X_+ x_0, \forall x_0$ に注意することにより証明できる. $\square$

4. LMI と GARE

ここでは, 以下の 4 条件を仮定する,

条件 1 $J_-(x_0) < \infty, \forall x_0 \in R^n$

条件 2 $J_+(x_0) < \infty, \forall x_0 \in R^n$

条件 3 DLQCP は正則.

条件 4 D は列フルランク.

すなわち, DLQCP⁻ の場合は, 条件 1, 3, 4 を仮定し, DLQCP⁺ の場合は, 条件 2, 3, 4 を仮定する. また, 条件 4 は, リカッチ方程式を導入するための付加的な仮定である. しかし, 条件 3 が成り立つとき, 評価関数を不変のままに, 重み行列 C, D の取り方を変えることによって, D を列フルランクにすることができるので, 条件 4 を導入しても一般性を失わない.

条件 1, 2 が成り立つための必要十分条件は次の補題で与えられる¹⁾.

【補題 6】 $J_-(x_0) < \infty, \forall x_0 \in R^n$ であるための必要十分条件は $\mathcal{I}_C^{nw} = R^n$ かつ $\forall \lambda \in \{s \in C | \operatorname{Res} \geq 0\}$ に対

して

$$\eta[\lambda E - A \ B] = 0, \eta E V = 0 \Leftrightarrow \eta = 0 \quad (33)$$

である. また, $J_+(x_0) < \infty, \forall x_0 \in R^n$ であるための必要十分条件は $\mathcal{I}_C^{pw} = R^n$ かつ $\forall \lambda \in \{s \in C | \text{Res} \geq 0\}$ に対して

$$\text{rank}[\lambda E - A \ B] = n \quad (34)$$

である.

(証明) 参考文献1) 参照. $\square$

本論文では, 次の線形行列不等式 (LMI)

$$\begin{bmatrix} A^T X + X^T A + Q & X^T B + S \\ B^T X + S^T & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (35)$$

$$E^T X = X^T E \quad (36)$$

および一般化代数リカッチ方程式 (GARE)

$$A^T X + X^T A + Q - (X^T B + S)R^{-1}(S^T + B^T X) = 0 \quad (37)$$

$$E^T X = X^T E \quad (38)$$

を扱う, ただし, Q, S, R は, (14) 式で定義したものである. ここで, LMI と GARE の解の間の関係, および LMI/GARE と DI の関係について述べる^{7),8),10)}.

(37) 式の左辺を $R(X)$ とおくと

$$T(X)^T L(X) T(X) = \begin{bmatrix} R(X) & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$T(X) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}(S^T + B^T X) & I \end{bmatrix} \quad (40)$$

が成り立つ. したがって, GARE (37), (38) 式の解は, LMI (35), (36) 式の解の中で, $L(X)$ のランクを最小化する解になっている. また, 上の LMI (あるいは GARE) に解 X が存在するとき, $S_0(x) = x^T E^T X x$ とすると, 補題5より, $S_0(x)$ が DI (19) 式を満たすことがわかる.

以下では, 本章の前提条件のもとで, $X \in \Gamma$ の中に LMI (35), (36) 式を満たすものが存在し, $X_- \in \Gamma_-$, $X_+ \in \Gamma_+$ の中に GARE (37), (38) 式を満たすものが存在することを示す. これにより, SS の場合と同様に, 最適コストは, LMI の最小ランク解で特徴付けることができる. しかし, SS と異なり注意が必要な点は, $\Gamma, \Gamma_-, \Gamma_+$ には, $\ker E$ の自由度が存在するので, 任意の $\Gamma, \Gamma_-, \Gamma_+$ の要素が LMI あるいは GARE を満たしてはいないということである.

以下では, SVD 座標系

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (41)$$

$$y = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D u \quad (42)$$

を用いて議論する.

【補題7】 DLQCP が正則であるための必要十分条件は

$$\begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \\ C_2 & D \end{bmatrix} \quad (43)$$

が列フルランクであることである.

(証明) (18) 式を用いれば証明は容易である. $\square$

X を SVD 座標系に合わせて

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \quad (44)$$

と分割すると

$$E^T X = X^T E \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}^T & 0 \\ X_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

より, $X_{11} = X_{11}^T, X_{12} = 0$ であり, X_{21}, X_{22} は, 任意の行列である. したがって, $\Gamma, \Gamma_-, \Gamma_+$ を特徴付けるのは, X_{11} である. 特に, $X \in \Gamma_-, \Gamma_+$ の場合, X_{11} は一意に定まる.

同様に

$$R(X) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{bmatrix} \quad (46)$$

と分割すると, 次式を得る.

$$R_{11} = A_{11}^T X_{11} + X_{11} A_{11} + C_1^T C_1 - (X_{11} B_1 + X_{21}^T B_2 + C_1^T D) R^{-1} \times (D^T C_1 + B_2^T X_{21} + B_1^T X_{11}) \quad (47)$$

$$R_{12} = X_{21}^T (A_{22} - B_2 R^{-1} (B_2^T X_{22} + D^T C_2)) - (X_{11} B_1 + C_1^T D) R^{-1} (B_2^T X_{22} + D^T C_2) + A_{21}^T X_{22} + X_{11} A_{12} + C_1^T C_2 \quad (48)$$

$$R_{22} = -(X_{22}^T B_2 + C_2^T D) R^{-1} (D^T C_2 + B_2^T X_{22}) + A_{22}^T X_{22} + X_{22}^T A_{22} + C_2^T C_2 \quad (49)$$

【補題8】 $X_{22} \in R^{(n-r) \times (n-r)}$ を $R_{22} = 0$ を満たすようにとる. このとき $(E, A - B R^{-1} (S^T + B^T X))$ はレギュラーかつインパルスモードをもたない.

(証明) 条件 $\mathcal{I}_C^{pw} = R^n$ のもとで, $R_{22} = 0$ を満たす $X_{22} \in R^{(n-r) \times (n-r)}$ は, 必ず存在する (証明は, 参考文献15) 参照). SVD 座標系に合わせて

$$A - B R^{-1} (S^T + B^T X) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (50)$$

とおく. $(E, A - BR^{-1}(S^T + B^T X))$ がレギュラーかつインパルスモードをもたないための必要十分条件は, $\tilde{A}_{22}$ が正則であることである. 簡単な計算より, $\tilde{A}_{22} = A_{22} - B_2 R^{-1}(D_2^T C_2 + B_2^T X_{22})$ を得る. $\tilde{A}_{22}$ が正則であることを示す. $\tilde{A}_{22} = A_{22} - B_2 D^\dagger C_2$, $D^\dagger = (D^T D)^{-1} D^T$ とおくと, $R_{22} = 0$ より

$$\tilde{A}_{22}^T X_{22} + X_{22}^T \tilde{A}_{22} + C_2^T C_2 - C_2^T D R^{-1} D^T C_2 - X_{22}^T B_2 R^{-1} B_2^T X_{22} = 0 \quad (51)$$

を得る. さて, D は列フルランクであるから

$$\begin{bmatrix} D^\dagger \\ D^\perp \end{bmatrix} [D (D^\perp)^T] = I_p \quad (52)$$

となる D の正規直交成分 $D^\perp \in R^{(p-m) \times p}$ が存在する. また上の二つの行列は互いに逆行列であるから

$$[D (D^\perp)^T] \begin{bmatrix} D^\dagger \\ D^\perp \end{bmatrix} = D D^\dagger + (D^\perp)^T D^\perp = I_p \quad (53)$$

が成り立つ. $\tilde{A}_{22} := A_{22} - B_2 R^{-1} B_2^T X_{22}$ とし, (53) 式を用いると (51) 式は

$$\tilde{A}_{22} X_{22} + X_{22}^T \tilde{A}_{22} + C_2^T (D^\perp)^T (D^\perp) C_2 + X_{22}^T B_2 R^{-1} B_2^T X_{22} = 0 \quad (54)$$

と書ける. いま $\tilde{A}_{22}$ が正則でない, すなわち $\tilde{A}_{22} x = 0, x \neq 0$ とすると, (54) 式より次式を得る.

$$\|D^\perp C_2 x\|^2 + \|B_2^T X_{22} x\|_{R^{-1}}^2 = 0 \quad (55)$$

これより $D^\perp C_2 x = 0$, $B_2^T X_{22} x = 0$ を得る. さて, DLQCP は正則であるから, 補題 7 より $\begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \\ C_2 & D \end{bmatrix}$ は

列フルランクである. したがって, $\begin{bmatrix} \tilde{A}_{22} \\ D^\perp C_2 \end{bmatrix}$ は列フルランクである. このとき $B_2^T X_{22} x = 0$ より $\begin{bmatrix} \tilde{A}_{22} \\ D^\perp C_2 \end{bmatrix} x =$

$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{22} \\ D^\perp C_2 \end{bmatrix} x = 0$ となり矛盾する. $\square$

【補題 9】 $X_{22} \in R^{(n-r) \times (n-r)}$, $X_{21} \in R^{(n-r) \times r}$ をそれぞれ $R_{22} = 0$, $R_{12} = 0$ を満たすようにとる. このとき, この $X \in \Gamma$ は, LMI (35), (36) 式を満たす. さらに, $X \in \Gamma_-$, $X \in \Gamma_+$ の場合, X は GARE (37), (38) 式を満たす.

(証明) 補題 8 より, $A_{22} - B_2 R^{-1}(D^T C_2 + B_2^T X_{22})$ は正則であるからこの GARE は, (48) 式より X_{11} , X_{22} に対して, $R_{12} = 0$ を満たす X_{21} はただ一つ定まる. $u_0 = -R^{-1}(S^T + B^T X)x = K_0 x$ とすると補題 8 より閉

ループ系

$$E\dot{x} = (A - BR^{-1}(S^T + B^T X))x \quad (56)$$

はインパルスモードをもたないので, $u_0[0, T] \in \mathcal{U}[0, T]$ である. (56) 式は (50) 式より

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

すなわち

$$\dot{x}_1 = (\tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12} \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{A}_{21})x_1 = \hat{A}x_1 \quad (58)$$

$$\dot{x}_2 = -\tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{A}_{21} x_1 \quad (59)$$

と書ける. したがって

$$x_1 = e^{\hat{A}t} x_{01} \quad (60)$$

$$x_2 = -\tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{A}_{21} e^{\hat{A}t} x_{01} \quad (61)$$

となる. このとき, 定理 2 の (30) 式と (39) 式より

$$\int_0^T x_1^T R_{11} x_1 dt \geq 0 \quad (62)$$

を得る. $T \rightarrow 0+$ とすると, 上式より $x_{01}^T R_{11} x_{01} \geq 0$ を得る. ゆえに, x_{01} の任意性より $R_{11} \geq 0$ が成り立つ. (39) 式より

$$L(X) \geq 0 \Leftrightarrow R(X) \geq 0 \quad (63)$$

であるから, $R_{11} \geq 0$, $R_{12} = 0$, $R_{22} = 0$ より, この X は, LMI (35), (36) 式を満たす.

さらに, $X \in \Gamma_-$, $X \in \Gamma_+$ のとき, 定理 2 の (31) 式と (39) 式より

$$\inf \left\{ \int_0^T x_1^T R_{11} x_1 + \|u - K_0 x\|_R^2 dt | u[0, T] \right\} = 0 \quad (64)$$

が成り立つ. 上の議論より, $R_{11} \geq 0$ であるから, 上式より

$$u = K_0 x, R_{11} x_1 = 0 \quad (65)$$

を得る. このとき, (60) 式より $R_{11} e^{\hat{A}t} x_{01} = 0$ である. $t \rightarrow 0+$ とすると $R_{11} x_{01} = 0$ となる. ゆえに, x_{01} の任意性より $R_{11} = 0$ となる. すなわち, この X は, GARE (37), (38) 式を満たす. $\square$

(注意 1) LMI の解の存在証明には, DLQCP の正則性の条件は実際には必要ない. しかし, 正則性の条件を仮定しない場合の証明は繁雑になるので, 本論文では, 簡単化のために DLQCP の正則性を仮定して LMI の解の存在を示した.

(注意2) 補題8, 9より, DLQCPの正則性は, GAREの可解性とその解を用いて構成したフィードバック制御則 $u = K_0 x$ がなめらかになることを保証していることがわかる. ただし, SLQCPにおけるリカッチ方程式と異なり, DLQCPの正則性が満足されない場合でも, GAREが実解をもつことがあるということに注意しなければならない. この場合の制御則 $u = K_0 x$ はインパルスを含んだものになる.

5. DLQCP⁺

ここでは, 応用上重要な問題である DLQCP⁺ について考察する. 本章を通して, 4.の条件2, 3, 4を仮定する.

【定義7】 GARE (37), (38) 式の解の中で, $E^T X$ を2次形式の意味で最大にするものを GAREの最大解と呼ぶ.

【補題10】 GARE (37), (38) 式の任意の最大解は Γ_+ に属する.

(証明) GAREの任意の解 X は Γ に属する. さらに, 4.の結果より, GAREを満たす $X_+ \in \Gamma_+$ が存在する. したがって, 最大解 $X_{\max}$ に対して, $E^T X_+ = E^T X_{\max}$ が成り立つ. ゆえに, 任意の最大解は Γ_+ に属する. $\square$

補題10より, GARE (37), (38) 式を満たす $X \in \Gamma_+$ は, 最大解であることがわかる.

つぎに, 参考文献14), 15)の無限時間 DLQCP⁺の結果について簡単にまとめておく. GARE (4), (5) 式にある解 X_a, Y_a が存在して, フィードバック制御則 $u = -R^{-1}(B^T X_a + D^T C)x$ を施したときの閉ループ系

$$E\dot{x} = (A - BR^{-1}(S^T + B^T X_a))x \quad (66)$$

が, (1) レギュラー, (2) インパルスモードをもたない, かつ, (3) 安定であるとき, フィードバックゲイン $K_a = -R^{-1}(S^T + B^T X_a)$ を許容フィードバックゲインと呼び, X_a, Y_a を GAREの許容解と呼ぶ. 許容解の概念は, SSに対する代数リカッチ方程式の安定化解を一般化したものである. 許容解は, 4.の条件2, 3, 4に加えて

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega E & B \\ C & D \end{bmatrix} = n + m, \quad \forall \omega \in R \quad (67)$$

という条件が成り立てば, 存在し, それを用いて無限時間 DLQCP⁺の解を与えることができる. さらに, GARE (4), (5) 式に許容解 X_a, Y_a が存在すれば, その中に必ず $Y_a = X_a^T$ を満たすものが存在する. すなわち, 本論文で扱う GARE (37), (38) 式に許容解が存在する, また, 許容解は, ハミルトン正準方程式に付随する一般化固有値問題を利用して計算できる.

SSの場合, 安定化解と最大解は一致する^{7), 8)}. では, DSの場合はどうであろうか. 最大解と許容解は, ともに $R_{22} = 0$ を満たす実 $(n-r) \times (n-r)$ 行列 X_{22} によってパラメトライズされるため, 一意的ではない. しかし, それらが作る集合が等しくなるという意味で, 最大解と許容解は一致する. これを, GARE (37), (38) 式の性質に関する次の補題を準備した後で示す.

【補題11】 GARE (37), (38) 式の任意の解 X に対して, $(E, A - BR^{-1}(S^T + B^T X))$ は, レギュラーかつインパルスモードをもたない. さらに, $E^T X_1 = E^T X_2$ を満たす任意の GAREの解 X_1, X_2 に対して, ある正則行列 T が存在して

$$\begin{aligned} -sE + A - BR^{-1}(S^T + B^T X_1) \\ = T(-sE + A - BR^{-1}(S^T + B^T X_2)) \end{aligned} \quad (68)$$

が成り立つ.

(証明) 付録2参照. $\square$

(注意3) これまでの議論から, (38) 式は, DLQCPのコストを表していると解釈することができる. 補題11の後半は, 等しいコストを与える GAREの解 X は, 一般に一意的でないが, $u = -R^{-1}(S^T + B^T X)x$ とした閉ループ系の挙動は一意的に決まることを示している. GAREの解の非一意性は, (68) 式の変換行列 T に表れる.

【補題12】 任意の許容解は, 最大解である. 逆に, 任意の最大解は, 許容解である.

(証明) SVD座標系で考える. 許容解を X_a とし, $A_a = A - BR^{-1}(B^T X_a + D^T C)$ とおく. このとき (E, A_a) は r 個の安定な指数モードをもつ. したがって r 個の安定固有値に対応する一般化固有ベクトル, 一般化主ベクトルを列ベクトルとする $n \times r$ 行列を V とすると

$$A_a V = E V \Lambda \quad (69)$$

が成り立つ. ここで Λ は安定固有値に対応するジョルダン形式をした $r \times r$ 行列である. GAREの任意の解を X とし, $\Delta_a = X_a - X$ とおくと, (37) 式より

$$A_a^T \Delta_a + \Delta_a^T A_a = -\Delta_a^T B R^{-1} B^T \Delta_a \leq 0 \quad (70)$$

が成り立つ. いま (70) 式の前から V^H , 後ろから V を掛けて整理すると

$$\Lambda^H (V^H E^T \Delta_a V) + (V^H E^T \Delta_a V) \Lambda \leq 0 \quad (71)$$

を得る. $V^H E^T \Delta_a V = (V^H E^T \Delta_a V)^H$ は Lyapunov 不等式 $\Lambda^H Y + Y \Lambda \leq 0$ の解であり, Λ は安定ゆえ Lyapunov 不等式の基本的性質から $V^H E^T \Delta_a V \geq 0$ を得る. V は列フルランクであるから, SVD座標系に合

わせて $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ とおくと V_1 は正則になる、実際、

$A_a = \begin{bmatrix} A_{a,11} & A_{a,12} \\ A_{a,21} & A_{a,22} \end{bmatrix}$ とおくと $E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と (69) 式より $V_2 = -A_{a,22}^{-1}A_{a,21}V_1$ を得る。したがって

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r \\ -A_{a,22}^{-1}A_{a,21} \end{bmatrix} V_1 \quad (72)$$

が成り立つ。ゆえに V が列フルランクであることと、 V_1 が正則であることは等価である。したがって、 X_a, X の (1,1) ブロックを $X_{a,11}, X_{11}$ と表すと

$$V^H E^T \Delta_a V \geq 0 \Leftrightarrow V_1^H (X_{a,11} - X_{11}) V_1 \geq 0 \quad (73)$$

となるので、 V_1 の正則性から $X_{a,11} - X_{11} \geq 0$ 、すなわち $E^T X_a \geq E^T X$ を得る。ゆえに許容解 X_a は最大解である。

逆に、任意の最大解を X_+ とすると、許容解 X_a は最大解であるから、 $E^T X_a = E^T X_+$ が成り立つ。したがって、補題 11 より、任意の最大解は許容解になる。□

つぎに条件 (67) 式について考察する。条件 (67) 式は、最適制御則を求めるための十分条件であるが、次の補題より必要条件にもなっていることがわかる。

【定理 3】 4. の条件 2, 3, 4 を仮定する。このとき、 $J_+(x_0) = x_0^T E^T X_+ x_0, \forall x_0 \in R^n$ を満たす最適制御則が存在するための必要十分条件は、(67) 式が成り立つことである。

(証明) 十分性は、この定理の仮定および (67) 式が成り立つとき、GARE に許容解が存在し、それを用いて最適制御則が構成できることから明らかである¹⁴⁾。

必要性を背理法により示す。条件 (67) 式が成り立たない、すなわち、ある $\omega_0 \in R$ に対して

$$\begin{bmatrix} A - BR^{-1}S^T - j\omega_0 E \\ D^\perp C \end{bmatrix} x_0 = 0 \quad (74)$$

を満たす $x_0 \neq 0$ が存在したときに、最適制御則が存在すると仮定する。また、4. の結果から、 $X_+ \in \Gamma_+$ の中に、(37), (38) 式を満たすものが存在する。(37) 式に $X = X_+$ を代入した式の左右に、それぞれ、 x_0^H, x_0 をかけて整理すると、 $B^T X_+ x_0 = 0$ を得る。また、4. の議論から、最適制御則が存在するとき、それは GARE を満たす $X_+ \in \Gamma_+$ を用いて

$$u = -R^{-1}(S^T + B^T X_+)x \quad (75)$$

と表される。したがって、閉ループ系の方程式は

$$E\dot{x} = (A - BR^{-1}(S^T + B^T X_+))x \quad (76)$$

となるが、(74) 式と $B^T X_+ x_0 = 0$ より

$$(A - BR^{-1}(S^T + B^T X_+))x_0 = j\omega_0 E x_0 \quad (77)$$

となり、閉ループ系に $j\omega$ 極が残る。これは矛盾である。□

最後に、本章の主要結果をまとめる。

【定理 4】 DLQCP⁺ の最適制御則が存在するための必要十分条件は、4. の条件 2, 3 および (67) 式が成り立つことである。これらの条件および条件 4 が成り立つとき、DLQCP⁺ の最適制御則 u^* は、GARE(37), (38) 式の最大解 X_+ を用いて

$$u^* = -(D^T D)^{-1}(D^T C + B^T X_+)x \quad (78)$$

で与えられる。

6. おわりに

本論文では、DLQCP を消散システム理論 (消散不等式) から考察した。本論文の主要結果を以下に示す。

- 4. では最適コストの存在性から、消散不等式を通じて GARE (37), (38) 式を自然に導出することにより、正則な DLQCP と GARE の関係を明確にした。その結果、DLQCP の正則性は GARE の許容解の存在性に関わる重要な性質であることがわかった。
- 5. において、正則な無限時間 DLQCP⁺ に対して、可解であるための必要十分条件を求め、その条件下で最適制御則を与えた。これにより、正則な無限時間 DLQCP⁺ に対する完全な解法が確立された。
- LMI, GARE の解の存在を示した補題 9 は、参考文献 10) の補題 4, 補題 5 の DS への自然な拡張である。

参考文献

- 1) T. Geerts: Coordinate-free interpretations of the optimal costs for LQ-problems subject to implicit systems; *Department of Economics Research Memorandum, Tilburg Univ.*, FEW 604 (1993)
- 2) T. Geerts: Solvability conditions, consistency and weak consistency for linear differential-algebraic equations and time-invariant singular systems: The general case; *Lin. Alg. & Appl.*, Vol. 181, pp. 111-130 (1993)
- 3) T. Geerts: Invariant subspaces and invertibility properties for singular systems: The general case; *Lin. Alg. & Appl.*, Vol. 183, pp. 61-88 (1993)
- 4) T. Geerts: Regularity and singularity in linear-quadratic control subject to implicit continuous-time systems; *Circ. Syst. & Sign. Proc.*, Vol. 13, No. 1, pp. 19-30 (1994)

- 5) F. L. Lewis: Preliminary notes on optimal control for singular systems; *Proc. 24th CDC*, Ft. Lauderdale, FL, pp. 266-272 (1985)
- 6) M. L. J. Hautus and L. M. Silverman: System structure and singular control; *Lin. Alg. & Appl.*, Vol. 50, pp. 369-402 (1983)
- 7) J. C. Willems: Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-16, No. 6, pp. 621-634 (1971)
- 8) H. L. Trentelman and J. C. Willems: The dissipative inequality and the algebraic Riccati equation; *The Riccati Equation* (S. Bittanti, A. J. Laub and J. C. Willems, Eds.), Springer Verlag, pp. 197-242 (1991)
- 9) B. P. Molinari: Nonnegativity of a quadratic functional; *SIAM J. Contr. & Opt.*, Vol. 13, pp. 792-806 (1975)
- 10) B. P. Molinari: The time-invariant linear quadratic optimal control problem; *Automatica*, Vol. 13, pp. 347-357 (1977)
- 11) B. D. O. Anderson and J. B. Moore: *Optimal Control: linear quadratic methods*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1990)
- 12) Y. Y. Wang, P. M. Frank and D. J. Clements: The robustness properties of the linear quadratic regulators for singular systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-38, No. 1, pp. 96-100 (1993)
- 13) D. Cobb: Feedback and pole placement in descriptor system; *Int. J. Control.*, Vol. 33, No. 6, pp. 1135-1146 (1981)
- 14) 片山, 南野: 一般化リカッチ方程式に基づくディスクリプタシステムの最適レギュレータ; 計測自動制御学会論文集, Vol. 31, No. 4, pp. 497-504 (1995)
- 15) T. Katayama and K. Minamino: On the linear quadratic regulator problem for descriptor system; *Tech. Report No. 93008*, Dept. Appl. Math. & Physics (1993)

付 録

付録 1. 補題 3 の証明

十分性は補題 2 より明らかである。必要性を示す。(11) 式が成立しないと仮定する。 $\eta B=0$, $\eta E=0$, $\eta A\bar{x}=0$, $\forall \bar{x} \in \ker E$ とする。 $x \in C_{sm}^n[0, T]$ が存在するから $\eta Ax(0+)=0$ が成り立つ。したがって $\eta Ax_0=\eta A(x_0-x(0+))=0$ ($x_0-x(0+) \in \ker E$) を得る。 x_0 は任意であるから $\eta A=0$ を得る。 $\det(sE-A) \neq 0$ より $[E \ A]$ はフルランクであるから $\eta=0$ となる。

付録 2. 補題 11 の証明

前半は、補題 8 より、明らかである。

後半を示す。前半の結果より、任意の GARE の X に対して、 $(E, A-BR^{-1}(S^T+B^TX))$ はレギュラーかつインパルスモードをもたないので r 個の有限固有値をもつ。 $A_1=A-BR^{-1}(S^T+B^TX_1)$, $A_2=A-BR^{-1}(S^T+$

$B^TX_2)$ とおく。 (E, A_1) の有限固有値に対応する一般化固有ベクトル、一般化主ベクトルを列ベクトルとする $n \times r$ 行列を V とすると

$$A_1V=EV A_f \quad (A1)$$

が成り立つ。ここで A_f は有限固有値に対応するジョルダン形式の $r \times r$ 行列である。 $\Delta=X_1-X_2$ とおくと、(37) 式より

$$A_1^T\Delta+\Delta^TA_1=-\Delta^TB R^{-1}B^T\Delta \quad (A2)$$

が成り立つ。上式の前から V^H , 後ろから V を掛けて整理すると

$$\Lambda_f^H V^H E^T \Delta V + V^H E^T \Delta V A_f = -\|B^T \Delta V\|_{R^{-1}}^2$$

を得る。 $E^T \Delta=0$ であるから上式より $B^T \Delta V_1=0$ すなわち $B^T X_1 V=B^T X_2 V$ を得る。ゆえに

$$EV A_f=A_1V=A_2V \quad (A3)$$

が成り立つ。したがって、 $\ker E=\text{im} W$ を満たす列フルランク行列 W に対して、(A1), (A3) 式より次式を得る。

$$\begin{aligned} (-sE+A_1)[V \ W] \\ = [EV \ A_1W] \begin{bmatrix} -sI+A_f & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A4)$$

$$\begin{aligned} (-sE+A_2)[V \ W] \\ = [EV \ A_2W] \begin{bmatrix} -sI+A_f & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A5)$$

(E, A_1) , (E, A_2) は、この補題の前半よりレギュラーであるので、 $[V \ W]$, $[EV \ A_iW]$, $i=1, 2$ は正則である。ゆえに、(A4), (A5) 式より

$$T=[EV \ A_1W][EV \ A_2W]^{-1} \quad (A6)$$

とすれば、(68) 式が成り立つことがわかる。