次数指定の H_∞ 制御器設計法 — 双線形行列不等式からの接近*

井前 讓**・古館 貴***

A Design Method of Fixed-Order H_∞ Controllers via Bilinear Matrix Inequalities*

Joe IMAE** and Takashi FURUDATE***

In this paper, we deal with fixed-order H_∞ controller design problems, based on bilinear matrix inequalities. BMI problems are nonlinear, non-differentiable and non-convex, and therefore very difficult to obtain global solutions numerically. First, we convert BMI problems into differentiable problems introducing so-called shift-parameters. Next, combining the shift-parameter scheme with quasi-Newton methods, we propose a new computational technique as BMI solvers. Lastly, we demonstrate the effectiveness of our approach by simulations, with applications to the design of fixed-order H_∞ controllers.

1. はじめに

設計仕様の多くが線形行列不等式 (LMI) に表現可能であること¹⁾, また半正定値計画法の発展により効率のよい強力な LMI 解法アルゴリズムが整備されていること²⁾⁻⁵⁾などにより, LMI を基礎とした制御系設計・解析が近年活発に研究されている. 特に H_∞ 制御に関しては, Riccati 方程式を利用する Doyle らの手法⁶⁾と比較して, H_∞ 制御器導出に際しての前提条件が比較的少ないこと, その導出方法が比較的容易であることなどの利点が指摘されており, 見通しのよい議論が可能となっている^{7),8)}.

ところで, H_∞ 制御の重要な設計問題の一つに, 制御器の次数を一般化制御対象のそれより小さく指定する H_∞ 制御器低次元化問題がある. 対象とする現実システムが一般に高次元であることを考えると, H_∞ 制御器の低次元化は実用的観点から解決すべき重要な課題といえる. この低次元化問題に対しては LMI 表現の立場からいくつ

かの研究が行われている. たとえば, 許容可能領域への射影を交互に繰り返す交互射影法⁹⁾, 微分に代わる概念を利用する subgradient 法¹⁰⁾, ポテンシャル関数のある種の指標とするポテンシャル減少法¹¹⁾, 双対 LMI 問題を取り扱う XY-centring 法¹²⁾などが挙げられる. しかしながら, 制御器の次数を指定する場合, LMI の性質を持たないいわゆる階数条件が新たに加わることになり, そのため取扱いが一層困難となっている. この階数条件の問題点は LMI を基礎とする限り必ず生じるものであり, 残念ながら現時点での研究成果は十分といえない.

本論文では H_∞ 制御の低次元化問題を取り扱う. その際, BMI 表現の立場をとるならば階数条件は生じないというよく知られた事実に基づき, LMI 表現ではなく双線形行列不等式 (BMI) 表現の立場をとる. ところで, BMI 表現を用いるならば階数条件は生じないと言われているにもかかわらず, BMI 表現による低次元 H_∞ 制御器の研究はほとんど行われていない. また, 具体的な設計例の報告は皆無に等しい. その主な理由としては, BMI 問題は一般に解法困難な NP-hard な問題として知られており, 最近の精力的な研究¹³⁾⁻¹⁵⁾にもかかわらず BMI 解法の効率的アルゴリズムが提案されていないことが考えられる. 本論文ではこの点を考慮し, BMI 問題を可微分な最小化問題に変換する際にシフトパラメータを導入して従来とは異なる独自の変換法を採用する. そ

* 原稿受付 1997 年 9 月 8 日

** 岩手大学 工学部 Faculty of Engineering, Iwate University; 4-3-5 Ueda, Morioka city, Iwate 020-8551, JAPAN

*** (株) テレビ岩手 TVI Corp.; 2-10 Uchimarui, Morioka city, Iwate 020-0023, JAPAN

Key Words: H_∞ control, fixed-order controller, bilinear matrix inequalities, quasi Newton method, computational technique.

して、この変換法と準ニュートン法を融合させることにより新たな BMI 解法アルゴリズムを提案する。さらに、この提案アルゴリズムを用いるならば、BMI 表現による低次元 H_∞ 制御器設計は十分に実現可能であることを、いくつかの具体的な設計例を通して明らかにする。なお、本設計において提案されたアルゴリズムの本質的な部分は局所解を求めるものであり、大域解を直接求めるために開発されたアルゴリズムとは本質的に異なる。

2. H_∞ 制御

まず初めに、 H_∞ 制御の基礎理論を整理し、本論文で取り扱う BMI 問題について述べる。

いま、一般化制御対象 P が

$$\dot{x}_p = Ax_p + B_1w + B_2u \quad (1a)$$

$$z = C_1x_p + D_{11}w + D_{12}u \quad (1b)$$

$$y = C_2x_p + D_{21}w \quad (1c)$$

で与えられたとする。ただし、状態量 $x_p \in \mathbb{R}^n$ 、外乱 $w \in \mathbb{R}^{m_1}$ 、制御入力 $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ 、制御量 $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ 、出力 $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ である。 (A, B_2) は可安定で、かつ (A, C_2) は可検出とする。制御則 $u = Ky$ により次のようなフィードバック系を構成することを考える (Fig. 1)。

Fig. 1 Feedback system

- 1) 閉ループシステムが内部安定となる。
- 2) 外乱 w から制御量 z への伝達関数の H_∞ ノルムが設計仕様 γ より小さくなる。

H_∞ 制御器 K を

$$\dot{x}_K = A_Kx_K + B_Ky, \quad x_K \in \mathbb{R}^k \quad (2a)$$

$$u = C_Kx_K + D_Ky \quad (2b)$$

とするとき、与えられた $\gamma > 0$ と (1) 式の一般化制御対象に対して制御器が存在するための必要十分条件は、

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -X_{cl} \end{matrix} < 0 \quad (3)$$

を満たす $X_{cl} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ 、 $\Theta \in \mathbb{R}^{(k+m_2) \times (k+p_2)}$ が存在することである⁷⁾。ここに、

$$A_{cl} = A_0 + \hat{B}\Theta\hat{C}, \quad B_{cl} = B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21}$$

$$C_{cl} = C_0 + \hat{D}_{12}\Theta\hat{C}, \quad D_{cl} = D_{11} + \hat{D}_{12}\Theta\hat{D}_{21}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = [C_1 \quad 0]$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I_k & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}_{12} = [0 \quad D_{12}], \quad \hat{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}$$

である。

制御器の低次元化も含めた BMI 表現に基づく H_∞ 制御系設計の確立のためには、(3) 式を満足する X_{cl} 、 Θ を求める必要がある。すなわち、次の BMI 問題を解かなければならない。

$$M(X_{cl}, \Theta) = \begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -X_{cl} \end{matrix} < 0 \quad (4)$$

とするとき、

$$M(X_{cl}, \Theta) < 0 \quad (5)$$

を満足する X_{cl} 、 Θ を求める問題である。このことが可能ならば、制御器のパラメータ Θ を直接求めることができ、簡便である。さらに次数指定の H_∞ 制御器も設計可能となる。

ところで、次の点に注意することは BMI 解法において重要である。(5) 式は

$$\lambda_{\max}(M(X_{cl}, \Theta)) < 0 \quad (6)$$

と等価である。したがって、

$$\min \lambda_{\max}(M(X_{cl}, \Theta)) \quad (7)$$

が負になる解 X_{cl} 、 Θ が存在すれば (5) 式を満足することは明らかである。すなわち、上述の BMI 問題は (7) 式

で与えられる最大固有値最小化問題を解くことにより解決可能である。

3. 最大固有値最小化問題

最大固有値最小化問題を定式化する。その際、(5)式は二つの行列不等式

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (8a)$$

$$-X_{cl} < 0 \quad (8b)$$

と等価であること、また、設計仕様の多くが行列不等式で表現できることを考慮し、設計の対象となる行列不等式が

$$M_1(x) < 0, M_2(x) < 0, \dots, M_h(x) < 0 \quad (9)$$

で与えられたとして、以下のような最大固有値最小化問題を扱う。

【最大固有値最小化問題】

$$\min_x \max\{\lambda_{\max}(M_1(x)), \lambda_{\max}(M_2(x)), \dots, \lambda_{\max}(M_h(x))\} \quad (10)$$

ここに、 $x \in \mathbb{R}^{n_0}$ は変数ベクトルであり、 $M_i(x) \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ ($i=1, \dots, h$) は x を変数とする実対称行列である。たとえば、(8)式を例に取れば、

$$M_1(X_{cl}, \Theta) = \begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix}$$

$$M_2(X_{cl}) = -X_{cl}$$

であり、 x はそれぞれ X_{cl}, Θ をベクトル化して一つにまとめたものとなる。

ところで、最小化問題(10)は非可微分な問題であり、非線形計画法の適用には不向きである。そこで、 $\lambda \in \mathbb{R}^1$ を新たに未知変数として導入することにより、最小化問題(10)を可微分な問題へと変換する。その際、次の2点に注意することは有益である。ただし、最適解は存在するものとし、 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ とおく。

1) 最適解 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ に関しては、

$$\bar{\lambda} = \max\{\lambda_{\max}(M_1(\bar{x})), \lambda_{\max}(M_2(\bar{x})), \dots, \lambda_{\max}(M_h(\bar{x}))\}$$

の関係がある。したがって、

$$\lambda > \max\{\lambda_{\max}(M_1(x)), \lambda_{\max}(M_2(x)), \dots, \lambda_{\max}(M_h(x))\}$$

を満足する (λ, x) を用いて任意の精度 (ユークリッドノルムの意味) で最適解 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ を近似することができる。このことは、最適解探索のための (λ, x) の実行可能領域を

$$\lambda > \max\{\lambda_{\max}(M_1(x)), \lambda_{\max}(M_2(x)), \dots, \lambda_{\max}(M_h(x))\}$$

すなわち $\lambda I - M_j(x) > 0$ ($j=1, \dots, h$) とするとき、十分に最適解 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ の探索が実行可能であることを示している。なお、 $\lambda I - M_j(x) > 0$ ならば $\det(\lambda I - M_j(x)) > 0$ がいえることに注意することは重要である。

2) 任意の $x \in \mathbb{R}^{n_0}$ に対し、

$$\max\{\lambda_{\max}(M_1(x)), \lambda_{\max}(M_2(x)), \dots, \lambda_{\max}(M_h(x))\} \geq \bar{\lambda}$$

である。このことは、

$$\lambda > \max\{\lambda_{\max}(M_1(x)), \lambda_{\max}(M_2(x)), \dots, \lambda_{\max}(M_h(x))\}$$

なる (λ, x) において、最適解 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ を求めるためには λ を最小にすることが重要であることを示している。

以上の注意点2点に留意するならば、次のような可微分最小化問題が自然な形で得られる。

【可微分最小化問題 I】

$$\min_{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} \left\{ \lambda + \sum_{j=1}^h r_j J_j(\lambda, x) \right\} \quad (11)$$

ここに、 r_j はペナルティ関数のための重み付けパラメータであり、

$$J_j(\lambda, x) = \begin{cases} [\det(\lambda I - M_j(x))]^{-1} & ; \lambda I - M_j(x) > 0 \\ \infty & ; \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

である。なお、 $J_j(\lambda, x)$, $j=1, \dots, h$ は注意点1) を評価関数表現に適した形に表現し直したものである。その際、逆関数表現による内点法を採用した。

ここで、以上の議論を踏まえるとき、シフトパラメータの導入によって、より一般的な可微分最小化問題を考えることができる。

【可微分最小化問題 II】

$$\min_{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} \left\{ \lambda + \sum_{j=1}^h r_j J_j(\lambda, x, \sigma_j) \right\} \quad (11)'$$

ただし、 σ_j は変数 λ のシフトパラメータであり、

$$J_j(\lambda, x, \sigma_j) = \begin{cases} [\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))]^{-1} & ; (\lambda - \sigma_j)I - M_j(x) > 0 \\ \infty & ; \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)'$$

である。

最小化問題 II は、 $\sigma_j = 0$ とするとき最小化問題 I と等価になることから、最小化問題 I を特別な場合として含んだ形となっている。また、このことと内点法に関する性質¹⁶⁾を参考にすると、 r_j, σ_j がともに零に近づくならば、最小化問題 II の解は最大固有値最小化問題 (10) の解に近づくことが期待される。したがって、本論文では最大固有値最小化問題 (10) の可微分表現として、より一般化された最小化問題 II を取り扱うこととする。

なお、このシフトパラメータ σ_j は数値計算上効果的な役割を果たすが、5. の設計例において明らかにされる。ただし、その理論的な側面に関しては今後の課題としたい。

4. BMI 解法アルゴリズム

本論文では、最小化問題 II を基礎として最大固有値最小化問題 (10) のための数値解法アルゴリズムを提案する。最小化問題 II を解くための計算法として計算効率の点で評価の高い準ニュートン法を採用する。ヘシアン行列の更新には BFGS 公式を用いる。以下に、準ニュートン法の適用に際し必要となる性質を補題としてまとめる。

【補題 1】

いま、 $f(\lambda, x, r_j, \sigma_j) = \lambda + \sum_{j=1}^h r_j J_j(\lambda, x, \sigma_j)$ とおくと、

$$\frac{\partial f(\lambda, x, r_j, \sigma_j)}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{j=1}^h r_j \left[\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x)) \right]^{-1} \cdot \text{tr} \left[((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))^{-1} \cdot I \right] \quad (13)$$

$$\frac{\partial f(\lambda, x, r_j, \sigma_j)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^h r_j \left[\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x)) \right]^{-1} \cdot \text{tr} \left[((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))^{-1} \cdot \frac{\partial M_j(x)}{\partial x_i} \right] \quad (14)$$

(証明) 付録に示す。

ところで、 $M_j(x)$ が非線形な構造を持つ場合、 $\partial M_j(x)/\partial x$ の計算は一般に困難となる。しかし、BMI 構造の場合には非線形であるにもかかわらず比較的容易に導出できる。それを補題の形で示す。ここでは双線形構造をもつ行列として (4) 式を取りあげる。説明の簡単化のため、行列不等式が一つの場合を扱うが、(8) 式のような複数の行列不等式が与えられる場合も同様な考え方に対応が可能である。なお、双線形性の性質を利用するため、変数として X_{cl}, Θ を考える。

【補題 2】

双線形行列不等式が (4) 式で与えられるとき、 $X_{cl} = [x_{ij}]$ 、 $\Theta = [\theta_{ij}]$ とするならば次式が成立する。すなわち、任意の i, j に対し、

$$\frac{\partial M(X_{cl}, \Theta)}{\partial x_{ij}} = M(Q, \Theta) - M(0, \Theta) \quad (15)$$

$$\frac{\partial M(X_{cl}, \Theta)}{\partial \theta_{ij}} = M(X_{cl}, R) - M(X_{cl}, 0) \quad (16)$$

ここに、与えられた i, j に対し、 $Q \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ は i 行 j 列と j 行 i 列の要素が 1、その他の要素は零の行列であり、 $R \in \mathbb{R}^{(k+m_2) \times (k+p_2)}$ は i 行 j 列の要素が 1、その他の要素は零の行列である。

(証明) 付録に示す。

以上の準備のもと、BMI 解法アルゴリズムについて述べる。ただし、記述の簡素化のため、 $\tilde{x} = (\lambda, x^T)^T$ 、 $f(\tilde{x}, r_j, \sigma_j) = \lambda + \sum_{j=1}^h r_j J_j(\lambda, x, \sigma_j)$ とする。ところで、BMI は凸性を持たないため得られる解が局所的になる可能性がある。そこで、初期値はランダムに発生させることにする。また、局所解に陥ったと判断した場合は、再度初期値のランダム化を行うとする。

【アルゴリズム 1】

step 1 $\alpha_0 > 0$ 、重み付けパラメータおよびシフトパラメータに関する無限数列 $\{r_j^i\}_{i=0}^\infty$ 、 $\{\sigma_j^i\}_{i=0}^\infty$ を選ぶ。ただし

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_j^i = 0 \quad (r_j^0 \geq r_j^1 \geq \dots > 0)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_j^i = 0 \quad (\sigma_j^0 \geq \sigma_j^1 \geq \dots \geq 0)$$

step 2 x_0 をランダムに発生させる。

step 3

$$\lambda^* = \max \{ \lambda_{\max}(M_1(x_0)), \lambda_{\max}(M_2(x_0)), \dots, \lambda_{\max}(M_h(x_0)) \}$$

を計算したのち $\lambda_0 > \lambda^*$ なる λ_0 を選び、初期値 $\tilde{x}_0 = (\lambda_0, x_0^T)^T$ を決定する。また、 $H_0 = I$ 、 $k = 0$ とする。

step 4 $d_k = -H_k^{-1} \frac{\partial f(\tilde{x}_k, r_j^k, \sigma_j^k)}{\partial \tilde{x}_k}$

step 5 $\alpha = \alpha_0$

step 6 $\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \alpha d_k$

step 7 $f(\tilde{x}_k, r_j^k, \sigma_j^k) < f(\tilde{x}_{k+1}, r_j^k, \sigma_j^k)$ であれば α を 0.25α として step 6 へ。その他は step 8 へ。

step 8

$$s_k = \tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k,$$

$$y_k = \frac{\partial f(\tilde{x}_{k+1}, r_j^k, \sigma_j^k)}{\partial \tilde{x}_{k+1}} - \frac{\partial f(\tilde{x}_k, r_j^k, \sigma_j^k)}{\partial \tilde{x}_k}$$

とおく。

step 9 BFGS 公式

$$H_{k+1} = H_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{H_k s_k s_k^T H_k}{s_k^T H_k s_k}$$

より H_{k+1} を計算する.

step 10 $\lambda_{k+1} < 0$ ならば, 計算終了.

step 11 $f(\tilde{x}_k, r_j^k, \sigma_j^k)$ の値がある値に収束したならば, step 2へ. それ以外は, $k=k+1$ において step 4へ.

5. 設計例

制御系の具体的な設計例を通して, 本アルゴリズムが制御器の低次元化も含めた H_∞ 制御系設計に対し実用的であることを確認する. なお, LMI手法を用いても取扱いが容易な設計問題を一部に含んでいるが, LMI手法とは異なり本アルゴリズムでは制御器のパラメータが直接もとまる点に注意されたい.

5.1 設計例1 (安定化問題)

制御系設計の基本的課題である安定化について考える¹⁷⁾. 線形システム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (17)$$

を状態フィードバック制御 $u = Kx$, $K = \Theta = [k_1 \ k_2]$ により安定化することを考える. このとき, 閉ループ固有値の実部は $-\beta$ より小さくなければならないとする. この問題は, リアプノフの定理より

$$A_{cl}^T X + X A_{cl} + 2\beta X < 0 \quad (18)$$

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2] \quad (19)$$

なる正定対称行列 X

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} \quad (20)$$

が存在することと等価となる.

$$M_1(x) = \begin{bmatrix} -\frac{A_{cl}^T X + X A_{cl} + 2\beta X}{0} & \frac{0}{-X} \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

とおき, X , Θ をベクトル化し

$$x = [k_1 \ k_2 \ X_{11} \ X_{12} \ X_{22}]^T \quad (22)$$

とすると, $h=1$ のもとでの最小化問題 (10) を満足する x を求める問題となる.

ランダムに与えられた初期値のもと, $\alpha_0 = 100$, $\beta = 0.5$, $r_1^i = 0.1 (i=0, 1, \dots)$, $\sigma_1^i = 0 (i=0, 1, \dots)$ として計算を行った. その結果, 評価関数 $f(\tilde{x}, r_1, \sigma_1)$ は

$$f(\tilde{x}, r_1, \sigma_1): 17.7277 \rightarrow -0.0377$$

と変化した. そして,

$$\lambda = -0.0381$$

$$[k_1 \ k_2] = [-3.0757 \ -3.5414]$$

が得られた. 閉ループの固有値は $-2.0378 \pm 1.5698i$ であり, 設計仕様を十分に満たしている. λ の変化に関しては Fig. 2(a) に, 評価関数の変化に関しては Fig. 2(b) にそれぞれ示す. 繰返し計算の1回目において, 評価関数が減少しているにもかかわらず, λ が大きく増加している. これは λ, x の初期点が (21) 式の境界に近すぎたため適当な距離まで移動したことによる. このように, 評価関数は必ず減少するのに対し, λ は必ずしも減少しない点に注意されたい. 繰返し回数が2回目以降はどちらの値も同様な減少傾向を示している.

(a) The behavior of λ versus iterations

(b) The behavior of the performance index versus iterations

Fig. 2 Simulation results for Design Example 1

5.2 設計例2 (H_∞ 制御問題)

Gahinet ら⁷⁾による例題をとりあげる. 一般化制御対象 P が次のように与えられるとする.

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (23a)$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (23b)$$

$$y = [0 \ 1] x_p + w \quad (23c)$$

この問題を通して、今回提案したBMIに基づく設計手法は、制御器の次元指定が前もって可能であることを示す。ここに、 $\gamma=2.2$ とする。なお、Doyleら⁶⁾の手法は前提条件が満たされず、この例題には適用できない。たとえ適用できてもプラントと同次元の制御器しか設計することができない。また、LMI手法を用いても、制御器の次元を指定して解くことは今のところ困難とされている。

$M_1(x)$ として (4) 式を与え、 $h=1$ として最小化問題 (10) を解いた。 (X_{cl}, Θ) を一様乱数に発生させて、 $\lambda_0 = \lambda_{\max}(M_1(X_{cl}, \Theta)) + 0.1$ により初期値 $\tilde{x}_0$ を決定した。さらに、 $\alpha_0 = 100$, $r_1^i = 0.1 (i=0, \dots)$, $\sigma_1^i = 0 (i=0, \dots)$ とした。

【制御器の次元が 2 の場合】

ランダムに与えられた初期値 (X_{cl}, Θ) のもと、繰返し回数は 21 回で、評価関数は

$$f(\tilde{x}, r_1, \sigma_1) : 1.6204 \rightarrow 0.0319$$

となり、

$$\lambda = -0.0043$$

が得られた。 λ の変化に関しては Fig. 3(a) に、評価関数の変化に関しては Fig. 3(b) にそれぞれ示す。得られた制御器は

$$\dot{x}_K = \begin{bmatrix} -1.9486 & -0.9228 \\ -0.7579 & -1.9525 \end{bmatrix} x_K + \begin{bmatrix} -0.3454 \\ 0.4498 \end{bmatrix} y$$

$$u = [-0.0253 \ -0.4105] x_K - 0.0787 y$$

となった。

【制御器の次元が 1 の場合】

繰返し回数は 24 回で、評価関数は

$$f(\tilde{x}, r_1, \sigma_1) : 1.9054 \rightarrow 0.1339$$

となり、

$$\lambda = -0.0012$$

が得られた。 λ および評価関数の変化を Fig. 4 に示す。制御器としては

(a) The behavior of λ iterations

(b) The behavior of the performance index versus iterations

Fig. 3 Simulation results for Design Example 2 (controller dimension: 2)

$$\dot{x}_K = -6.8958 x_K - 0.7028 y$$

$$u = 2.1553 x_K - 0.1067 y$$

が得られた。

【定数フィードバックの場合】

繰返し回数は 13 回で、評価関数は

$$f(\tilde{x}, r_1, \sigma_1) : 1.3043 \rightarrow 0.1660$$

となり、

$$\lambda = -0.0012$$

が得られた。そのときの λ と評価関数の変化を Fig. 5 に示す。計算の結果、フィードバックゲインは -0.1826 となった。

5.3 設計例 3 (two-mass/spring system)

American Control Conference (ACC) のベンチマーク問題¹⁸⁾で取りあげられた Fig. 6 のような two-mass/spring system を考える。一般化制御対象 P は以下のとおりである。

(a) The behavior of λ versus iterations

(b) The behavior of the performance index versus iterations

Fig. 4 Simulation results for Design Example 2 (controller dimension: 1)

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_2} & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (24a)$$

$$z = [0 \ 1 \ 0 \ 0] x_p + [0 \ 0] w + [0] u \quad (24b)$$

$$y = [0 \ 1 \ 0 \ 0] x_p + [0 \ 1] w \quad (24c)$$

ここで,

$$x_p = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T, \quad w = [w_1 \ w_2]^T$$

x_1 : body1 の位置, x_2 : body2 の位置

x_3 : body1 の速度, x_4 : body2 の速度

w_1 : body2 に働く外乱, w_2 : ノイズ

m_1 : body1 の質量 ($m_1 = 1$)

m_2 : body2 の質量 ($m_2 = 1$)

k : バネ定数 ($k = 1$)

(a) The behavior of λ versus iterations

(b) The behavior of the performance index versus iterations

Fig. 5 Simulation results for Design Example 2 (controller dimension: 0)

Fig. 6 Two-mass/spring problem

y : 出力, u : 制御入力, z : 制御量

である。

この問題に対し、今回提案した BMI 設計手法により低次元 H_∞ 制御器を含めて 4, 3, 2 次元の制御器を $\gamma = 15$ のもとでそれぞれ求めることにする。なお、対象システムが 4 次元であり、扱う行列のサイズが大きくなるため、最小化問題 (10) において、

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

$$-X_{cl} < 0 \quad (26)$$

なる2種類の行列不等式を与えた。また、シフトパラメータを $\sigma_j = 0, j=1, 2$ とした場合、すなわち準ニュートン法だけを適用した場合、計算が収束しなかったため、試行錯誤の結果、シフトパラメータは、 $\sigma_1^i = 0, \sigma_2^i = 0.05, i=0, 1, \dots$ とし、その他のパラメータは、 $\alpha_0 = 100, r_1^i = r_2^i = 0.001, i=0, 1, \dots$ とした。

【制御器の次数が4の場合】

初期値をランダムに2回発生させた後、評価関数は

$$f(\tilde{x}, r_1, r_2, \sigma_1, \sigma_2) : 3.3048 \rightarrow -0.0492$$

となり、

$$\lambda = -0.0503$$

が得られた。繰返し回数は2回目のランダム発生から数えて169回であった。そのときの λ と評価関数の変化を Fig. 7 に示す。得られた制御器は

$$\dot{x}_K = \begin{bmatrix} -3.9659 & 0.4043 & 1.7755 & 0.2880 \\ 1.8940 & -6.6284 & -1.9753 & -3.7589 \\ 0.9969 & 0.7419 & -2.6757 & 1.1773 \\ -0.0467 & 0.4984 & 1.3505 & -1.0705 \end{bmatrix} x_K$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.4275 \\ 2.8228 \\ 2.2694 \\ -0.2467 \end{bmatrix} y \quad (27a)$$

$$u = [0.2961 \quad -1.6742 \quad -1.1469 \quad -0.2606] x_K + 0.6866 y \quad (27b)$$

であった。

【制御器の次数が3の場合】

初期値をランダムに1回発生させた後、繰返し回数は278回で、評価関数は

$$f(\tilde{x}, r_1, r_2, \sigma_1, \sigma_2) : 3.1911 \rightarrow -0.0508$$

となり、

$$\lambda = -0.0516$$

が得られた。そのときの制御器は

(a) The behavior of λ versus iterations

(b) The behavior of the performance index versus iterations

Fig. 7 Simulation results for Design Example 3 (controller dimension: 4)

$$\dot{x}_K = \begin{bmatrix} -1.2140 & 0.1915 & 2.0151 \\ 2.1188 & -6.7807 & -2.5654 \\ 0.2351 & -2.7376 & -3.0809 \end{bmatrix} x_K + \begin{bmatrix} -0.5729 \\ -0.6612 \\ 2.0372 \end{bmatrix} y \quad (28a)$$

$$u = [0.3028 \quad 1.6579 \quad -1.4935] x_K + 1.0256 y \quad (28b)$$

となった。 λ と評価関数の変化を Fig. 8 に示す。

【制御器の次数が2の場合】

初期値をランダムに2回発生させた後、評価関数は

$$f(\tilde{x}, r_1, r_2, \sigma_1, \sigma_2) : 2.3725 \rightarrow -0.0474$$

となり、

$$\lambda = -0.0512$$

が得られた。繰返し回数は2回目のランダム発生から数えて657回であった。Fig. 9 に、 λ と評価関数の変化を

(a) The behavior of λ versus iterations

(b) The behavior of the performance index versus iterations

Fig. 8 Simulation results for Design Example 3 (controller dimension: 3)

(a) The behavior of λ versus iterations

(b) The behavior of the performance index versus iterations

Fig. 9 Simulation results for Design Example 3 (controller dimension: 2)

示す。そのとき、制御器は

$$\dot{x}_K = \begin{bmatrix} -7.9469 & 6.5063 \\ -1.5405 & 0.1240 \end{bmatrix} x_K + \begin{bmatrix} 7.7514 \\ 0.5081 \end{bmatrix} y \quad (29a)$$

$$u = [-7.4699 \ 5.2376] x_K + 6.3332 y \quad (29b)$$

であった。

5.4 設計例4 (γ の最小化)

これまでの設計例では γ を与えられたものとして固定した。ここでは、できる限り γ を小さくすることを考える。次のような手順で γ の最小化を図った。

【アルゴリズム II】

step 1 $\gamma = \gamma_S$ を与え、BMI 解法アルゴリズムを適用してフィードバック H_∞ 制御系を求める。

step 2 そのフィードバック系の H_∞ ノルムを計算し $\gamma = \gamma_T$ とおく。

step 3 $\gamma_T < \gamma < \gamma_S$ なる γ を選び、 γ_S とおく。

この手順を γ が収束するまで続けることにより γ の最小化が期待できる。設計例3の2次元制御器をとりあげる。この場合、すでに $\gamma = 15$ に対して H_∞ 制御器が得られている ($\gamma_T = 6.7897$)。この $\gamma = 15$ で得られた解 (X_{cl}, Θ) をもとに、 γ 最小化を図った。なお、パラメータに関しては $\alpha_0 = 100$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0.05$,

$$\begin{cases} r_1^i = r_2^i = 10^{-3} & (N=1, \dots, 4) \\ r_1^i = r_2^i = 10^{-4} & (N=5) \\ r_1^i = r_2^i = 10^{-5} & (N=6) \\ r_1^i = r_2^i = 10^{-6} & (N=7) \\ r_1^i = r_2^i = 10^{-7} & (N=8) \\ r_1^i = r_2^i = 10^{-9} & (N=9) \end{cases}$$

とした。ここに、 N はアルゴリズム II の繰返しに対して付けた番号である。そのときの結果を表にまとめて示す (Table 1)。

計算の結果、2次元制御器は

Table 1 Simulation results for Design Example 4

N	γ	$f(\tilde{x}, r_1, r_2, \sigma_1, \sigma_2)$	λ	γ_T
0	15			6.7897
1	10	$2.1845 \rightarrow -0.0401$	-0.0510	5.8549
2	7	$2.2848 \rightarrow -0.0394$	-0.0509	4.7505
3	5.5	$0.7557 \rightarrow -0.0336$	-0.0385	4.3853
4	5	$0.0685 \rightarrow -0.0114$	-0.0162	4.3519
5	4.7	$0.0051 \rightarrow -0.0067$	-0.0101	4.2787
6	4.5	$0.0064 \rightarrow -0.0035$	-0.0061	4.2296
7	4.4	$0.0048 \rightarrow -0.0033$	-0.0052	4.1939
8	4.3	$0.0082 \rightarrow -0.0017$	-0.0030	4.1704
9	4.2	$0.0169 \rightarrow -0.0007$	-0.0014	4.1368

$$\dot{x}_K = \begin{bmatrix} -0.9787 & 0.5181 \\ -1.4213 & -0.4558 \end{bmatrix} x_K + \begin{bmatrix} 0.0835 \\ -0.0029 \end{bmatrix} y \quad (30a)$$

$$u = [-11.7486 \quad -1.9128] x_K - 0.0911 y \quad (30b)$$

となった。

$\gamma = 4.2$ で得られた制御器で閉ループを組んだときの実際の H_∞ ノルム γ_T は

$$\gamma_T = 4.1368$$

となった。ところで、この問題に対する低次元制御器の設計は一般に困難とされている。Grigoriadisら⁹⁾はLMI表現に基づく交互射影法を用いて2次元制御器の設計に成功しているが、行列不等式を基礎とした研究では彼ら以外に報告は見あたらない。その際の γ_T は

$$\gamma_T = 4.96$$

と報告されている。 w_1 から z へのステップ応答に関しアルゴリズムIIと参考文献9)の場合をそれぞれFig. 10, 11に示す。アルゴリズムIIの場合が比較的速やかに安定しているのがわかる。

6. おわりに

本論文では H_∞ 制御の低次元化問題を取り扱い、BMI問題の可微分最小化問題への変換においてシフトパラメータを導入した独自の変換法を採用し、その変換法と準ニュートン法を融合させた新たなBMI解法アルゴリズムを提案した。そして、この提案アルゴリズムの適用に際し、重み付けパラメータやシフトパラメータなどの選定に注意を払うならばBMI表現による低次元 H_∞ 制御器設計は十分に実現可能であることを、いくつかの具体

(a) Case of $\gamma = 15$

(b) Case of $\gamma = 4.2$

Fig. 10 Step response of z with w_1 as the input (proposed method)

的設計例を通して明らかにした。なお、アルゴリズムIIにおける γ の最小化のための選定方法に関して、試行錯誤的側面が強いため系統的な手順の開発が望まれる。この点に関しては今後の課題としたい。

Fig. 11 Step response of z with w_1 as the input (Grigoriadis et al.)

参考文献

- 1) S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: *Inequalities in System and Control Theory*, SIAM (1994)
- 2) C. Beck: Computational issues in solving LMIs; *Proc. of the 30th Conference on Decision and Control*, pp. 1259–1260, Brighton, England (1991)
- 3) S. Boyd and L. E. Ghaoui: Method of centers for minimizing generalized eigenvalues; *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 188–189, pp. 63–111 (1993)
- 4) A. Nemirovskii and P. Gahinet: The projective method for solving Linear Matrix Inequalities; *Proc. of the American Control Conference*, pp. 840–844 (1994)
- 5) L. Vandenberghe and S. Boyd: Primal-dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities; *Math. Programming*, Ser. B, Vol. 69, pp. 205–236 (1995)
- 6) J. K. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. Francis: State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-34, pp. 831–847 (1989)
- 7) P. Gahinet and P. Apkarian: A Linear Matrix Inequality approach to H_∞ control; *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, pp. 421–448 (1994)
- 8) T. Iwasaki and R. E. Skelton: All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas; *Automatica*, Vol. 30, No. 8, pp. 1307–1317 (1994)
- 9) K. M. Grigoriadis and R. E. Skelton: Fixed-order control design for LMI control problems using alternating projection methods; *Proc. of the 33rd Conference on Decision and Control*, pp. 2003–2008 (1994)
- 10) P. Gahinet and A. Igot: Low-order H_∞ synthesis via LMIs; *Proc. of the American Control Conference*, pp. 1499–1500 (1994)
- 11) J. David and B. D. Moor: Designing reduced order output feedback controllers using a potential reduction method; *Proc. of the American Control Conference*, pp. 845–849 (1994)
- 12) T. Iwasaki and R. E. Skelton: The XY-centring algorithm for the dual LMI problems: A new approach to fixed-order control design; *Int. J. Control*, Vol. 62,

No. 6, pp. 1257–1272 (1995)

- 13) K. C. Goh, L. Turan and M. G. Safonov: Baffine Matrix Inequality properties and computational methods; *Proc. of the American Control Conference*, pp. 850–855 (1994)
- 14) K. C. Goh, M. G. Safonov and G. P. Papavassilopoulos: A global optimization approach for the BMI problem; *Proc. of the 33rd Conference on Decision and Control*, pp. 2009–2014 (1994)
- 15) S. M. Liu and G. P. Papavassilopoulos: Numerical experience with parallel algorithms for solving the BMI problems; *Proc. of the World Congress of IFAC*, Vol. D, pp. 387–391 (1996)
- 16) 今野, 山下: 非線形計画法 (OR ライブラリー 6), 日科技連, 10章 (1978)
- 17) 井前, 古館, 菅原: 非線形微分方程式の数値解法を利用した最大固有値最小化問題の簡単な解法; 日本機械学会論文集 (c 編), Vol. 61, No. 608, pp. 1125–1130 (1997)
- 18) B. Wie and D. S. Bernstein: A benchmark problem for robust control design; *Proc. of the American Control Conference*, pp. 23–25 (1990)

付 録

付録 1. 補題 1 の証明

$(\lambda - \sigma_j)I - M_j(x) > 0$ とするとき, $f(\lambda, x, r_j, \sigma_j)$ は

$$f(\lambda, x, r_j, \sigma_j) = \lambda + \sum_{j=1}^h r_j [\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))]^{-1}$$

で与えられる. したがって, λ に関しては,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\lambda, x, r_j, \sigma_j)}{\partial \lambda} &= 1 + \sum_{j=1}^h r_j \frac{\partial [\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))]^{-1}}{\partial \lambda} \\ &= 1 - \sum_{j=1}^h r_j [\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))]^{-2} \\ &\quad \cdot \frac{\partial [\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))]}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} &\frac{\partial [\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))]}{\partial \lambda} \\ &= \sum_{lm} \left\{ [\Delta_{lm}((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))] \cdot \left[\frac{\partial ((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))}{\partial \lambda} \right]_{lm} \right\} \\ &= \text{tr} \left[\text{adj}((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x)) \cdot \frac{\partial ((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))}{\partial \lambda} \right] \\ &= \det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x)) \text{tr}[(\lambda - \sigma_j)I - M_j(x)]^{-1} \cdot I \end{aligned}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\lambda, x, r_j, \sigma_j)}{\partial \lambda} &= 1 - \sum_{j=1}^h r_j [\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))]^{-1} \\ &\quad \cdot \text{tr}[(\lambda - \sigma_j)I - M_j(x)]^{-1} \cdot I \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 $[\cdot]_{lm}$ は $[\cdot]$ の lm 要素、 $\Delta_{lm}(\cdot)$ は行列 $(\cdot)$ の lm 要素の余因子、 $\text{adj}(\cdot)$ は $(\cdot)$ の余因子行列を表す。 $\partial f(\lambda, x, r_j, \sigma_j) / \partial x_i$ に関して

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\lambda, x, r_j, \sigma_j)}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^h r_j \frac{\partial [\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))]^{-1}}{\partial x_i} \\ &= - \sum_{j=1}^h r_j [\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))]^{-2} \\ &\quad \cdot \frac{\partial [\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))]}{\partial x_i} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial [\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))]}{\partial x_i} \\ &= \sum_{lm} \left\{ [\Delta_{lm}((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))] \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[\frac{\partial ((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))}{\partial x_i} \right]_{lm} \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \text{adj}((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x)) \cdot \left[\frac{\partial ((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))}{\partial x_i} \right] \right\} \\ &= -\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x)) \\ &\quad \cdot \text{tr} \left[((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))^{-1} \frac{\partial M_j(x)}{\partial x_i} \right] \end{aligned}$$

に注意するならば

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(\lambda, x, r_j, \sigma_j)}{\partial x_i} \\ &= \sum_{j=1}^h r_j [\det((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))]^{-1} \\ &\quad \cdot \text{tr} \left[((\lambda - \sigma_j)I - M_j(x))^{-1} \cdot \frac{\partial M_j(x)}{\partial x_i} \right] \end{aligned}$$

が導かれる。証明終わり。

付録 2. 補題 2 の証明

$M(X_{cl}, \Theta)$ は (4) 式より

$$\begin{aligned} &M(X_{cl}, \Theta) \\ &= \begin{bmatrix} (A_0 + \hat{B}\Theta\hat{D})^T X_{cl} + X_{cl}(A_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}) & & \\ (B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21})^T X_{cl} & & \\ \hline C_0\hat{D}_{12}\Theta\hat{C} & & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} X_{cl}(B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21}) & (C_0 + \hat{D}_{12}\Theta\hat{C})^T & \vdots \\ -\gamma I & (D_{11} + \hat{D}_{12}\Theta\hat{D}_{21})^T & 0 \\ \hline C_0 + \hat{D}_{12}\Theta\hat{D}_{21} & -\gamma I & \vdots \\ 0 & 0 & -X_{cl} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial M(X_{cl}, \Theta)}{\partial x_{ij}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left\{ (A_0 + \hat{B}\Theta\hat{D})^T X_{cl} + X_{cl}(A_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}) \right\} & & \\ \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left\{ (B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21})^T X_{cl} \right\} & & \\ \frac{\partial}{\partial x_{ij}} (C_0 + \hat{D}_{12}\Theta\hat{C}) & & \\ \hline & 0 & \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \{ X_{cl}(B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21}) \} & & \\ \frac{\partial}{\partial x_{ij}} (-\gamma I) & & \\ \frac{\partial}{\partial x_{ij}} (D_{11} + \hat{D}_{12}\Theta\hat{D}_{21}) & & \\ \hline & 0 & \\ \frac{\partial}{\partial x_{ij}} (C_0 + \hat{D}_{12}\Theta\hat{C})^T & \vdots & \\ \frac{\partial}{\partial x_{ij}} (D_{11} + \hat{D}_{12}\Theta\hat{D}_{21})^T & \vdots & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_{ij}} (-\gamma I) & \vdots & \\ \hline & 0 & \frac{\partial}{\partial x_{ij}} (-X_{cl}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A_0 + \hat{B}\Theta\hat{C})^T \frac{\partial X_{cl}}{\partial x_{ij}} + \frac{\partial X_{cl}}{\partial x_{ij}} (A_0 + \hat{B}\Theta\hat{C}) & & \\ (B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21})^T \frac{\partial X_{cl}}{\partial x_{ij}} & & \\ \hline & 0 & \\ & 0 & \\ \frac{\partial X_{cl}}{\partial x_{ij}} (B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21}) & 0 \vdots & \\ & 0 & 0 \vdots & \\ & 0 & 0 \vdots & \\ \hline & 0 & 0 \vdots & \frac{\partial X_{cl}}{\partial x_{ij}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで、与えられた i, j に対し、 $Q \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ を i 行 j 列と j 行 i 列の要素が 1、その他の要素は零の行列であると定義すると、

$$\frac{\partial X_{cl}}{\partial x_{ij}} = Q$$

となる。したがって、

$$\frac{\partial M(X_{cl}, \Theta)}{\partial x_{ij}}$$

$$= \begin{bmatrix} (A_0 + \hat{B}\Theta\hat{C})^T Q + Q(A_0 + \hat{B}\Theta\hat{C}) & (B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21})^T Q \\ 0 & 0 \\ \hline Q(B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21}) & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & -Q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A_0 + \hat{B}\Theta\hat{C})^T Q + Q(A_0 + \hat{B}\Theta\hat{C}) & Q(B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21}) & 0 \\ B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21})^T Q & -\gamma I & 0 \\ \hline C_0 + \hat{D}_{12}\Theta\hat{C} & D_{11} + \hat{D}_{12}\Theta\hat{D}_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (C_0 + \hat{D}_{12}\Theta\hat{C})^T & 0 \\ (D_{11} + \hat{D}_{12}\Theta\hat{D}_{21})^T & 0 \\ \hline -\gamma I & 0 \\ 0 & -Q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I \\ \hline C_0 + \hat{D}_{12}\Theta\hat{C} & D_{11} + \hat{D}_{12}\Theta\hat{D}_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (C_0 + \hat{D}_{12}\Theta\hat{C})^T & 0 \\ (D_{11} + \hat{D}_{12}\Theta\hat{D}_{21})^T & 0 \\ \hline -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= M(Q, \Theta) - M(0, \Theta)$$

が導かれる。また同様に

$$\frac{\partial M(X_{cl}, \Theta)}{\partial \theta_{ij}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_{ij}} \{ (A_0 + \hat{B}\Theta\hat{C})^T X_{cl} + X_{cl} (A_0 + \hat{B}\Theta\hat{C}) \} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_{ij}} \{ (B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21})^T X_{cl} \} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_{ij}} (C_0 + \hat{D}_{12}\Theta\hat{C}) \\ \hline 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_{ij}} \{ X_{cl} (B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21}) \} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_{ij}} (-\gamma I) \\ \frac{\partial}{\partial \theta_{ij}} (D_{11} + \hat{D}_{12}\Theta\hat{D}_{21}) \\ \hline 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_{ij}} (C_0 + \hat{D}_{12}\Theta\hat{C})^T \\ \frac{\partial}{\partial \theta_{ij}} (D_{11} + \hat{D}_{12}\Theta\hat{D}_{21})^T \\ \frac{\partial}{\partial \theta_{ij}} (-\gamma I) \\ \hline 0 & \frac{\partial}{\partial \theta_{ij}} (-X_{cl}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\hat{B} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta_{ij}} \hat{C} \right)^T X_{cl} + X_{cl} \left(\hat{B} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta_{ij}} \hat{C} \right) & X_{cl} \left(\hat{B} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta_{ij}} \hat{D}_{21} \right) \\ \left(\hat{B} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta_{ij}} \hat{D}_{21} \right)^T X_{cl} & 0 \\ \hat{D}_{12} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta_{ij}} \hat{C} & \hat{D}_{12} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta_{ij}} \hat{D}_{21} \\ \hline 0 & 0 \\ \left(\hat{D}_{12} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta_{ij}} \hat{C} \right)^T & \left(\hat{D}_{12} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta_{ij}} \hat{D}_{21} \right)^T \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで、与えられた i, j に対し、 $R \in \mathbb{R}^{(k+m_2) \times (k+p_2)}$ を i 行 j 列の要素が 1、その他の要素は零の行列であると定義すると、

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \theta_{ij}} = R$$

となる。したがって、

$$\frac{\partial M(X_{cl}, \theta)}{\partial \theta_{ij}}$$

が導かれる。

以上により補題が証明された。

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} (\hat{B}R\hat{C})^T X_{cl} + X_{cl}(\hat{B}R\hat{C}) & X_{cl}(\hat{B}R\hat{D}_{21}) \\ (\hat{B}R\hat{D}_{21})^T X_{cl} & 0 \\ \hline \hat{D}_{12}R\hat{C} & \hat{D}_{12}R\hat{D}_{21} \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} (\hat{D}_{12}R\hat{C})^T & 0 \\ (\hat{D}_{12}R\hat{D}_{21})^T & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A_0^T X_{cl} + (\hat{B}R\hat{C})^T X_{cl} + X_{cl}A_0 + X_{cl}(\hat{B}R\hat{C}) \\ B_0^T X_{cl} + (\hat{B}R\hat{D}_{21})^T X_{cl} \\ \hline C_0 + \hat{D}_{12}R\hat{C} \\ \hline 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} X_{cl}B_0 + X_{cl}(\hat{B}R\hat{D}_{21}) & C_0^T + (\hat{D}_{12}R\hat{C})^T & 0 \\ \hline -\gamma I & D_T^{11} + (\hat{D}_{12}R\hat{D}_{21})^T & 0 \\ \hline D_{11} + \hat{D}_{12}R\hat{D}_{21} & -\gamma I & 0 \\ \hline 0 & 0 & -X_{cl} \end{bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} A_0^T X_{cl} + X_{cl}A_0 & X_{cl}B_0 & C_0^T & 0 \\ \hline B_0^T X_{cl} & -\gamma I & D_{11}^T & 0 \\ \hline C_0 & D_{11} & -\gamma I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -X_{cl} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (A_0 + \hat{B}R\hat{C})^T X_{cl} + X_{cl}(A_0 + \hat{B}R\hat{C}) \\ (B_0 + \hat{B}R\hat{D}_{21})^T X_{cl} \\ \hline C_0 + \hat{D}_{12}R\hat{C} \\ \hline 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} X_{cl}(B_0 + \hat{B}R\hat{D}_{21}) & (C_0 + \hat{D}_{12}R\hat{C})^T & 0 \\ \hline -\gamma I & (D_{11} + \hat{D}_{12}R\hat{D}_{21})^T & 0 \\ \hline D_{11} + \hat{D}_{12}R\hat{D}_{21} & -\gamma I & 0 \\ \hline 0 & 0 & -X_{cl} \end{bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} A_0^T X_{cl} + X_{cl}A_0 & X_{cl}B_0 & C_0^T & 0 \\ \hline B_0^T X_{cl} & -\gamma I & D_{11}^T & 0 \\ \hline C_0 & D_{11} & -\gamma I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -X_{cl} \end{bmatrix} \\
 &= M(X_{cl}, R) - M(X_{cl}, 0)
 \end{aligned}$$