入出力データ配列に基づくシステム表現と制御方式*

藤崎 泰正**・段 一然***・池田 雅夫****

A System Representation and a Control Strategy Based on an Input-Output Data Array*

Yasumasa FUJISAKI**, Yiran DUAN*** and Masao IKEDA****

This paper proposes a control strategy based on an array representation of input-output data of a plant. The control strategy requires no traditional mathematical model such as a transfer function or a state-space equation. The plant dynamics is represented as a set of basis arrays whose elements are plant input-output data. Then a set of canonical basis arrays is derived from the set of basis arrays by a sweep-out calculation. The control input for dead-beat tracking is directly computed using the set of canonical basis arrays.

1. はじめに

制御理論では、対象システムのモデリングを行って、伝達関数や状態方程式などの数式モデルを導き、その数式モデルに基づいて制御系を設計するのが、自然なアプローチであると考えられている。確かに、数式モデルは、数学的手法による合理的な制御系設計を可能にした¹⁾。

しかし、“制御対象の出力が望ましい振舞いとなる入力を求める”という制御の原点に戻って考えれば、合理的な制御系設計のために数式モデルが不可欠であるわけではない。とくに、我々が知り得る情報が入出力データである場合、それらを適当なだけ集めて直接操作入力を求めるような、入出力データ空間での閉じた取扱いによる合理的な制御方式があれば、それでよいはずである。

このような観点から、制御対象の入出力データのある形に配列し、それに基づいて操作入力を直接計算する制

御方式が、池田、林²⁾により提案されている。それらでは、任意の目標信号に出力を追従させる制御問題を取り扱っている。そのような制御が有界な入力列により可能であるためには、制御対象を既約な伝達関数で表したときの次数と相対次数が既知で、最小位相系、すなわち、その零点がすべて安定でなければならない。そのため、池田、林、藤崎³⁾は、制御対象が最小位相系でないときには、制御の時間間隔を適当に大きく選んで、相対次数が1の最小位相系とすることを提案している。そして、この方法が、制御対象が安定で、1に零点をもたないときには実行可能であることを示している。

このように、これらの研究では、任意の目標信号に出力を追従させるという制御問題の観点から、それが可能となる制御対象のクラスが論じられている。しかし、“制御対象を入出力データ空間でどのようにシステム表現するか、また、それに基づいて追従制御のための操作入力をどのように求めるか”というダイナミカルシステム論の基本問題に対する解答としては、まだ充分とはいえない。

そこで本論文では、入出力データ配列に基づくシステム表現と制御方式について再考し、一つの新たな枠組を提案する。まず、入出力データ配列より抜き出したある適当な個数の基底行列により、そのシステムの動特性を表すことができることを明らかにする。そして、その基底行列のシステム論的意味を明確にし、それらを用いて、与えられた目標値に有限整定するための操作入力が簡単

* 原稿受付 1997年10月20日

** 神戸大学 工学部 Faculty of Engineering, Kobe University; Rokkodai-cho 1-1, Nada ward, Kobe city, Hyogo 657-8501, JAPAN

*** 神戸大学 大学院 自然科学研究科 Graduate School of Science and Technology, Kobe University; Rokkodai-cho 1-1, Nada ward, Kobe city, Hyogo 657-8501, JAPAN

**** 大阪大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University; Yamadaoka 2-1, Suita city, Osaka 565-0871, JAPAN

Key Words: input-output data array, system representation, dead-beat tracking, basis arrays.

に計算できることを示す。また、数値例を通して、この制御方式のアルゴリズムを確認する。さらに、別の基底行列を用いて、任意の目標信号に出力を追従させる制御問題^{2),3)}に対する、本論文の枠組に基づく解答を与える。

なお、(入出力) 信号に着目したとされる研究にはビヘイビア・アプローチ⁴⁾があり、その出発点では、信号の振舞い自身の集合をシステムとみなすと述べられている。しかし、それ以降の理論の展開で実際に用いられている AR (kernel) representation などのシステム表現は信号空間で定義されているわけではなく、伝達関数や状態方程式と同様、信号空間を拘束する方程式の係数を用いたものである。それに対して本論文のシステム表現は、拘束されている信号空間それ自身の基底を用いることに特徴がある。また、インパルス応答などの入出力データより最適レギュレータ制御則を構成する研究⁵⁾⁻⁷⁾があるが、本論文は任意の入出力データより直接操作入力を求めるものであり、研究の観点が異なる。

2. 入出力データ配列によるシステム表現

ここでは、対象システムを既約な伝達関数で表したときの次数は既知であるとし、それ以上の先見情報はないものとする。以下では、3 次の既約な伝達関数をもつ 1 入力 1 出力線形離散時間システムを例として、次のような入出力データの配列を考える。

$$\begin{bmatrix} y_3 & y_2 & y_1 & y_0 & u_3 & u_2 & u_1 & u_0 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & u_4 & u_3 & u_2 & u_1 \\ y_5 & y_4 & y_3 & y_2 & u_5 & u_4 & u_3 & u_2 \\ y_6 & y_5 & y_4 & y_3 & u_6 & u_5 & u_4 & u_3 \\ y_7 & y_6 & y_5 & y_4 & u_7 & u_6 & u_5 & u_4 \\ y_8 & y_7 & y_6 & y_5 & u_8 & u_7 & u_6 & u_5 \\ y_9 & y_8 & y_7 & y_6 & u_9 & u_8 & u_7 & u_6 \\ y_{10} & y_9 & y_8 & y_7 & u_{10} & u_9 & u_8 & u_7 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \S \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \S\S \end{matrix} \quad (1)$$

ただし、 $u_k \in \mathcal{R}$, $y_k \in \mathcal{R}$ はそれぞれ時刻 k における入力の値、出力の値である。このとき、対象システムの出力差分方程式表現を

$$\begin{aligned} y_k + \alpha_1 y_{k-1} + \alpha_2 y_{k-2} + \alpha_3 y_{k-3} \\ = \beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1} + \beta_2 u_{k-2} + \beta_3 u_{k-3}, \quad k \geq 3 \end{aligned} \quad (2)$$

とし、パラメータベクトル θ を

$$\theta = [1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad -\beta_0 \quad -\beta_1 \quad -\beta_2 \quad -\beta_3]^T \quad (3)$$

とすれば、(1) 式の行列に右から θ を掛ければ、常に 0 になる。このように、対象システムの入出力データを (1) 式のように配列で表現すれば、システムのダイナミクス

による入出力データ空間の拘束が記述できる。

さて、“制御対象の出力が望ましい振舞いに一致するような入力を求める” という制御問題を考えると、現時点までのシステムの入出力データを初期値系列、望ましい振舞いの入出力データを目標値系列とすれば、その間をつなぐ振舞いを求めることがその解を与えることである。そこで、この観点から、(1) 式の配列のシステム論的特徴について考察しよう。

いま、時刻 3 であるとする。このとき、 $\S$ 行の入出力データはすべて既知であり、

$$[y_3 \ y_2 \ y_1 \ y_0 \ u_3 \ u_2 \ u_1 \ u_0] \theta = 0 \quad (4)$$

を満足している。そこで、これを初期値系列と考えよう。同様に、たとえば、目標値系列としては、 $\S\S$ 行の入出力データとして、

$$[y_{10} \ y_9 \ y_8 \ y_7 \ u_{10} \ u_9 \ u_8 \ u_7] \theta = 0 \quad (5)$$

を満たすものが指定されていると仮定する。このような場合、システムダイナミクスの拘束のもとで、 $\S$ 行と $\S\S$ 行入出力データをつなぐ $y_4, y_5, y_6, u_4, u_5, u_6$ は存在するのであろうか。また、存在するときには、それらは一意であろうか。実際、 $\S$ 行の入出力データが与えられ、 $\S\S$ 行の一つ上の行の入出力データが指定されたときには、それらをつなぐ振舞いは存在するとは限らないが、 $\S$ 行と $\S\S$ 行の場合には、それらをつなぐ振舞いが一意に存在することを、以下のように示すことができる。

まず、(1) 式の $\S$ 行の次の行から $\S\S$ 行の一つ上の行の間の配列と同じ構造をもつ行列を

$$D = \begin{bmatrix} x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_{14} & x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_{15} & x_{14} & x_{13} & x_{12} \\ x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_{16} & x_{15} & x_{14} & x_{13} \\ x_7 & x_6 & x_5 & x_4 & x_{17} & x_{16} & x_{15} & x_{14} \\ x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & x_{18} & x_{17} & x_{16} & x_{15} \\ x_9 & x_8 & x_7 & x_6 & x_{19} & x_{18} & x_{17} & x_{16} \end{bmatrix} \quad (6)$$

で表す。この D に対するシステムダイナミクスの拘束は

$$D\theta = 0 \quad (7)$$

で表される。このとき次の定理を得る。

【定理 1】 (6) 式の構造をもつ行列 D において、12 個の要素 $x_1, x_2, x_3, x_7, x_8, x_9, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{17}, x_{18}, x_{19}$ を与えると、 D が (7) 式を満足するような、残りの 6 個の要素 $x_4, x_5, x_6, x_{14}, x_{15}, x_{16}$ は一意に定まる。

(証明) 6 個の要素 $x_4, x_5, x_6, x_{14}, x_{15}, x_{16}$ をベクトル ψ にまとめれば、(7) 式を次のように書き直すこ

とができる。

$$M\psi = -N\theta \quad (8)$$

ここで、各行列、ベクトルは、以下のように定義した。

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta_0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & -\beta_1 & -\beta_0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & -\beta_2 & -\beta_1 & -\beta_0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & 0 & -\beta_3 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & -\beta_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 & x_1 & 0 & x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ 0 & 0 & x_3 & x_2 & 0 & 0 & x_{13} & x_{12} \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 & 0 & x_{13} \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & x_{17} & 0 & 0 & 0 \\ x_8 & x_7 & 0 & 0 & x_{18} & x_{17} & 0 & 0 \\ x_9 & x_8 & x_7 & 0 & x_{19} & x_{18} & x_{17} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\psi = [x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_{14} \ x_{15} \ x_{16}]^T \quad (11)$$

このとき、対象システムを既約な伝達関数で表せるという仮定から、 M が正則である⁸⁾ので、(10) 式の N に含まれる 12 個の要素をどのように与えても、 ψ が一意に定まることがわかる。□

この定理より、(1) 式の § 行と §§ 行のデータが (4) 式、(5) 式を満足するものとして与えられたとき、それらをつなぐ振舞いが一意に定まることがわかる。そこで、つぎに、対象システムの入出力データが十分に得られたときに、(8) 式の行列 M の要素、すなわち、 θ を知ることなく、それらのデータから初期値系列と目標値系列をつなぐ振舞いを、直接計算する方法について考えよう。

まず、(6) 式の構造をもち (7) 式を満足する行列 D の集合がベクトル空間をなすことに注意しよう。定理 1 は、その空間の次元が 12 であることと、その一組の独立な要素の位置を示している。そこで、このことに着目して、以下の定義を導入する。

【定義 1】 (6) 式の構造をもち (7) 式を満たす行列のうち、互いに独立な 12 個の行列を基底行列と呼ぶ。また、(6) 式において、 $x_1, x_2, x_3, x_7, x_8, x_9, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{17}, x_{18}, x_{19}$ の位置にあたる要素のうち、一つが 1、残りすべてが 0 であるような 12 個の基底行列

$$D_1 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} * & 0 & 1 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$D_{19} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 1 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \quad (12)$$

を正規化基底行列と呼ぶ。ここで、* は (7) 式の拘束により決まる値を意味し、各行列内で斜め右下方向は同じ値のものである。また、 D_i の各添字 i は、1 とした要素 x_i の添字 i と対応している。

入出力データから (6) 式の構造をもつ行列を 12 個構成したとき、それらが基底行列であれば、 $x_1, x_2, x_3, x_7, x_8, x_9, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{17}, x_{18}, x_{19}$ の位置にあたる要素に着目して掃き出し法を適用することにより、直接、正規化基底行列を得ることができる。このとき、次の結果を得ることは明らかであろう。

【定理 2】 (6) 式の構造をもち (7) 式を満たす任意の行列 D は、12 個の正規化基底行列の線形結合

$$\begin{aligned} D = & x_1 D_1 + x_2 D_2 + x_3 D_3 \\ & + x_7 D_7 + x_8 D_8 + x_9 D_9 \\ & + x_{11} D_{11} + x_{12} D_{12} + x_{13} D_{13} \\ & + x_{17} D_{17} + x_{18} D_{18} + x_{19} D_{19} \end{aligned} \quad (13)$$

で一意に表すことができる。

したがって、入出力データよりあらかじめ正規化基底行列を計算しておけば、初期値系列 § 行と目標値系列 §§ 行が与えられたときに、それらをつなぐ振舞いを (13) 式のように計算することができる。すなわち、任意の初期値系列から任意の目標値系列への振舞いを知ることができる。この意味で、(12) 式の正規化基底行列は、数式モデルに代わる新たなシステム表現であるといえる。

ここで、(12) 式の正規化基底行列のもつ意味について述べておこう。まず、 $D_1, D_2, D_3, D_{11}, D_{12}, D_{13}$ の線形結合により、

$$\begin{aligned} & y_1 D_1 + y_2 D_2 + y_3 D_3 \\ & + u_1 D_{11} + u_2 D_{12} + u_3 D_{13} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} * & y_3 & y_2 & y_1 & * & u_3 & u_2 & u_1 \\ * & * & y_3 & y_2 & * & * & u_3 & u_2 \\ * & * & * & y_3 & * & * & * & u_3 \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \quad (14)$$

のように任意の初期値系列から目標値系列 0 への振舞いを表すことができる。そこで、この 6 個の正規化基底行列を可制御基底と呼ぶことにする。また、 $D_7, D_8, D_9, D_{17}, D_{18}, D_{19}$ の線形結合により、

$$\begin{aligned} & y_7 D_7 + y_8 D_8 + y_9 D_9 \\ & + u_7 D_{17} + u_8 D_{18} + u_9 D_{19} \\ = & \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & * & * & * & 0 \\ y_7 & * & * & * & u_7 & * & * & * \\ y_8 & y_7 & * & * & u_8 & u_7 & * & * \\ y_9 & y_8 & y_7 & * & u_9 & u_8 & u_7 & * \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

のように初期値系列 0 から任意の目標値系列への振舞いを表すことができる。そこで、この 6 個の正規化基底行列を可到達基底と呼ぶことにする。したがって、定理 2 より、任意の初期値系列から任意の目標値系列への振舞いが、可制御基底により張られる振舞いと、可到達基底により張られる振舞いに分けられることがわかる。

3. 入出力データ配列による定値制御方式

ここでは、(12) 式の 12 個の正規化基底行列が得られたときに、出力が目標となる定常値に有限整定し、入力もまた対応する定常値となるようなシステムの振舞いが生成できることを示す。すなわち、時刻 $k-1$ において、入出力データ $y_{k-1}, y_{k-2}, y_{k-3}, \dots, u_{k-1}, u_{k-2}, u_{k-3}, \dots$ と出力の目標となる定常値 $y_r \in \mathcal{R}$ が与えられているとき、

$$\begin{bmatrix} y_{k-1} & y_{k-2} & y_{k-3} & y_{k-4} & u_{k-1} & u_{k-2} & u_{k-3} & u_{k-4} \\ y_k & y_{k-1} & y_{k-2} & y_{k-3} & u_k & u_{k-1} & u_{k-2} & u_{k-3} \\ y_{k+1} & y_k & y_{k-1} & y_{k-2} & u_{k+1} & u_k & u_{k-1} & u_{k-2} \\ y_{k+2} & y_{k+1} & y_k & y_{k-1} & u_{k+2} & u_{k+1} & u_k & u_{k-1} \\ y_r & y_{k+2} & y_{k+1} & y_k & u_r & u_{k+2} & u_{k+1} & u_k \\ y_r & y_r & y_{k+2} & y_{k+1} & u_r & u_r & u_{k+2} & u_{k+1} \\ y_r & y_r & y_r & y_{k+2} & u_r & u_r & u_r & u_{k+2} \\ y_r & y_r & y_r & y_r & u_r & u_r & u_r & u_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \S \\ \\ \\ \\ \\ \\ \S\S \\ \end{matrix} \quad (16)$$

となるような、 θ を右から掛けて 0 となる配列が構成できることを示す。ここで、 $u_r \in \mathcal{R}$ は y_r を達成する入力

の定常値とする。

いま、 u_r を求めることができれば、定理 2 より、(16) 式の $\S$ 行の次の行から $\S\S$ 行の一つ上の行の間の配列を構成できる。そこで、以下では、正規化基底行列と y_r が与えられたときに、 u_r を求める方法を示す。

まず、正規化基底行列 $D_1, D_2, \dots, D_{19}$ の総和は、その特別な構造より、

$$\begin{aligned} D_\Sigma &= D_1 + D_2 + D_3 + D_{11} + D_{12} + D_{13} \\ &+ D_7 + D_8 + D_9 + D_{17} + D_{18} + D_{19} \\ &= \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 1 & * & 1 & 1 & 1 \\ * & * & 1 & 1 & * & * & 1 & 1 \\ * & * & * & 1 & * & * & * & 1 \\ 1 & * & * & * & 1 & * & * & * \\ 1 & 1 & * & * & 1 & 1 & * & * \\ 1 & 1 & 1 & * & 1 & 1 & 1 & * \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

になる。ここで、 $*$ は斜め右下方向に同じ値の要素である。したがって、 D_Σ の行をすべて加えれば、

$$d_\Sigma = \begin{bmatrix} a & a & a & a & b & b & b & b \end{bmatrix} \quad (18)$$

の形になることがわかる。いま、明らかに

$$d_\Sigma \theta = 0 \quad (19)$$

が成り立つから、こうして得られた a と b の組は、対象システムの定常出力と定常入力の一つの組である。したがって、出力の目標値 y_r を実現する定常入力 u_r は、

$$u_r = \frac{b}{a} y_r \quad (20)$$

と計算できる。なお、対象システムが 1 に零点をもつ場合、

$$\sum_{i=0}^3 \beta_i = 0 \quad (21)$$

となることと (19) 式より明らかのように、 $a=0$ になる。この場合、 y_r には 0 しか選べないため、 $y_r \neq 0$ への有限整定制御は不可能である。この事実は、本論文の制御方式に限らず、一般的制約である。

以上のように u_r を求めることができるので、時刻 $k-1$ において与えられているデータと基底行列から

$$\begin{aligned} D_r &= y_{k-3} D_1 + y_{k-2} D_2 + y_{k-1} D_3 \\ &+ y_r D_7 + y_r D_8 + y_r D_9 \\ &+ u_{k-3} D_{11} + u_{k-2} D_{12} + u_{k-1} D_{13} \\ &+ u_r D_{17} + u_r D_{18} + u_r D_{19} \end{aligned} \quad (22)$$

が計算でき、 D_r が (16) 式の $\S$ 行の次の行からと $\S\S$ 行の

一つ上の行の間の配列となる。こうして、出力が目標となる定常値 y_r に有限整定し、入力もまた対応する定常値 u_r となるようなシステムの振舞いが計算できた。 D_r の $u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, u_r, u_r, u_r$ の位置の値が時刻 $k, k+1, k+2, k+3, k+4, k+5$ で加えるべき入力である。ここで、この制御方式で扱える対象システムは既約な伝達関数で表せるものであり、対象システムの相対次数や最小位相などの先見情報が必要でなかったことに注意されたい。

4. 数値例

それでは、具体的な数値例を通じて、入出力データ配列によるシステム表現と、それに基づく定値制御のアルゴリズムを確認しよう。ここで、対象とするのは、

$$y_k + 2y_{k-1} + 2y_{k-2} + y_{k-3} = u_{k-2} + 2u_{k-3} \quad (23)$$

で表されるシステムである。このシステムは、相対次数が 2 で、不安定かつ非最小位相である。以下では、この対象システムのパラメータが未知であるとし、その動作データから、直接、出力を一定値に保つ操作入力を計算する手順を示す。

まず、対象システムに加えられた入力の時系列（シフトレジスタの個数 4 の M 系列）

$$\begin{array}{cccc} u_0 = -1 & u_1 = 1 & u_2 = -1 & u_3 = 1 \\ u_4 = 1 & u_5 = -1 & u_6 = -1 & u_7 = 1 \\ u_8 = -1 & u_9 = -1 & u_{10} = -1 & u_{11} = 1 \\ u_{12} = 1 & u_{13} = 1 & u_{14} = 1 & u_{15} = -1 \\ u_{16} = 1 & u_{17} = -1 & u_{18} = 1 & u_{19} = 1 \end{array}$$

と発生した出力の時系列

$$\begin{array}{cccc} y_0 = 0 & y_1 = 0 & y_2 = -1 & y_3 = 1 \\ y_4 = 1 & y_5 = -4 & y_6 = 8 & y_7 = -8 \\ y_8 = 1 & y_9 = 5 & y_{10} = -3 & y_{11} = -8 \\ y_{12} = 14 & y_{13} = -10 & y_{14} = 3 & y_{15} = 3 \\ y_{16} = 1 & y_{17} = -10 & y_{18} = 14 & y_{19} = -8 \end{array}$$

の組が与えられたとする。これらのデータを (1) 式に代入して得られる入出力データ配列について、その 1 行目から 6 行、2 行目から 6 行、というように、順次、6 行 8 列の行列を 12 個作る。

このとき、得られた 12 個の行列は独立になっており、基底行列の組となる。つまり、これらの 12 個の行列に対して掃き出し法を実行すれば、(12) 式のような 12 個の正規化基底行列が、それぞれ以下のように求まる。

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3} & 2 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & 2 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 2 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \\ D_2 &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ D_3 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 2 & -2 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 2 & -2 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 2 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ D_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \\ D_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D_9 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ D_{11} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 2 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & -4 & 2 & 0 & \frac{8}{3} & 2 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & -4 & 2 & 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & -4 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
D_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
D_{17} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
D_{18} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
D_{19} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(17) 式に従い、これら基底行列の総和をとると、

$$D_{\Sigma} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

となる。このとき、 D_{Σ} のすべての行を合計した d_{Σ} は

$$d_{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (25)$$

である。したがって、出力の目標信号を

$$y_r = 1 \quad (26)$$

とすれば、(20) 式より入力 of 定常値は

$$u_r = \frac{6}{3} \times 1 = 2 \quad (27)$$

と求められる。

いま、時刻 19 までの入出力データが与えられているので、 $k=20$ とおき、3. の制御方式を適用しよう。このとき、出力が目標となる定常値 $y_r=1$ に有限整定し、入力もまた対応する定常値 $u_r=2$ となるような入出力データ配列 D_r は、(22) 式に従って次のように求まる。

$$D_r = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 14 & -10 & \frac{25}{3} & 1 & 1 & -1 \\ 11 & -3 & -8 & 14 & 8 & \frac{25}{3} & 1 & 1 \\ \frac{7}{3} & 11 & -3 & -8 & \frac{8}{3} & 8 & \frac{25}{3} & 1 \\ 1 & \frac{7}{3} & 11 & -3 & 2 & \frac{8}{3} & 8 & \frac{25}{3} \\ 1 & 1 & \frac{7}{3} & 11 & 2 & 2 & \frac{8}{3} & 8 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{7}{3} & 2 & 2 & 2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \quad (28)$$

つまり、入力を $u_{20}=25/3$, $u_{21}=8$, $u_{22}=8/3$, $u_{23}=2$, $u_{24}=2$, ... のように加えると、出力が $y_{20}=-3$, $y_{21}=11$, $y_{22}=7/3$, $y_{23}=1$, $y_{24}=1$, ... となるのである。

5. 入出力データ配列による追従制御方式

4. までは、任意の初期値系列から任意の目標値系列へ制御する問題を扱った。そこでは、対象システムの次数 3 のみが既知であるとし、(6) 式の $x_1, x_2, x_3, x_7, x_8, x_9, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{17}, x_{18}, x_{19}$ の位置にあたる要素に注目して、(12) 式の正規化基底行列を考えた。このとき、基底行列のサイズは 6×7 となり、その個数は 12 となった。ところで、対象システムに関する事前情報や、考える制御問題が異なれば、基底行列のサイズや個数が異なることが考えられる。

そこで、ここでは、従来研究^{2),3)}の制御問題を、4. まです議論したように基底行列の表現を用いて再考察してみよう。ここでは、対象システムの次数と相対次数が既知であるとする。そして、その入出力差分方程式表現を(2) 式とし、従来研究^{2),3)}と同様、相対次数が 2 である場合を例にとる。すなわち、

$$\beta_0 = \beta_1 = 0, \quad \beta_2 \neq 0 \quad (29)$$

とする。

以下ここでは、入出力データ配列に基づき、このシステムの出力を任意の目標信号に追従させるようなシステムの振舞いが生成できることを示す。すなわち、パラメータベクトルを

$$\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{bmatrix}^T \quad (30)$$

とおき直して、時刻 $k-1$ において、入出力データ y_{k-1} , y_{k-2} , y_{k-3} , $\dots$, u_{k-1} , u_{k-2} , u_{k-3} , $\dots$ と、追従すべき出力の目標信号として r_{k+2} , r_{k+3} , $\dots$ が与えられているとき、

$$\begin{bmatrix} y_{k-1} & y_{k-2} & y_{k-3} & y_{k-4} & u_{k-3} & u_{k-4} \\ y_k & y_{k-1} & y_{k-2} & y_{k-3} & u_{k-2} & u_{k-3} \\ y_{k+1} & y_k & y_{k-1} & y_{k-2} & u_{k-1} & u_{k-2} \\ r_{k+2} & y_{k+1} & y_k & y_{k-1} & u_k & u_{k-1} \\ r_{k+3} & r_{k+2} & y_{k+1} & y_k & u_{k+1} & u_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \S \quad (31)$$

となるような、 $\tilde{\theta}$ を右から掛けて 0 となる配列が構成できることを示す。なお、相対次数が既知であることに対応して、(31) 式の配列は、(1) 式や (16) 式の配列より 2 列少なくなっている。

さて、従来研究^{2),3)}では、この (31) 式の配列における独立な 5 本の行ベクトルに着目し、ある追従制御アルゴリズムを提案している。ここでは、4. ままで同様、基底行列に基づくアルゴリズムを考えるため、(31) 式の $\S$ 行の次の行から 3 行と同じ構造をもつ行列を

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_{12} & x_{11} \\ x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_{13} & x_{12} \\ x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_{14} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (32)$$

で表し、この配列に着目して議論をする。つまり、この $\tilde{D}$ に対するシステムダイナミクスの拘束が

$$\tilde{D}\tilde{\theta} = 0 \quad (33)$$

で表されることを利用する。まず、次の定理を得る。

【定理 3】 (32) 式の構造をもつ行列 $\tilde{D}$ において、7 個の要素 x_1 , x_2 , x_3 , x_6 , x_{11} , x_{12} , x_{13} を与えると、(29) 式のもとで、 $\tilde{D}$ が (33) 式を満足するような残りの 3 個の要素 x_4 , x_5 , x_{14} は一意に定まる。

(証明) 3 個の要素 x_4 , x_5 , x_{14} をベクトル $\tilde{\psi}$ にまとめれば、(33) 式を次のように書き直すことができる。

$$\tilde{M}\tilde{\psi} = -\tilde{N}\tilde{\theta} \quad (34)$$

ここで、各行列、ベクトルは、以下のように定義した。

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\beta_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 & x_1 & x_{12} & x_{11} \\ 0 & 0 & x_3 & x_2 & x_{13} & x_{12} \\ x_6 & 0 & 0 & x_3 & 0 & x_{13} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\tilde{\psi} = [x_4 \ x_5 \ x_{14}]^T \quad (37)$$

このとき、 $\beta_2 \neq 0$ であり、 $\tilde{M}$ が正則であるので、(36) 式の $\tilde{N}$ に含まれる 7 個の要素をどのように与えても、 $\tilde{\psi}$ が一意に定まることがわかる。□

この定理 3 で明らかになった一組の独立な要素の位置に着目して、以下の基底行列を定義する。

【定義 2】 (32) 式において、 x_1 , x_2 , x_3 , x_6 , x_{11} , x_{12} , x_{13} の位置にあたる要素のうち一つが 1、残りが 0 であるような 7 個の基底行列

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1 &= \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{D}_2 &= \begin{bmatrix} * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \tilde{D}_{13} &= \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

を追従制御のための正規化基底行列と呼ぶ。ここで、* は (7) 式の拘束により決まる値を意味し、各行列内で斜め右下方は同じ値のものである。また、 $\tilde{D}_i$ の各添字は、1 とした要素 x_i の添字 i に対応している。

前述のように、入出力データから (32) 式の構造をもつ行列を 7 個構成したとき、それらが基底行列であれば、定理 3 で明らかになった独立な要素の位置に着目して掃き出し法を適用することにより、追従制御のための正規化基底行列を得ることができる。したがって、定理 2 と同様に次の結果を得る。

【定理 4】 (32) 式の構造をもち (33) 式を満たす任意の行列 $\tilde{D}$ を、7 個の正規化基底行列の線形結合

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= x_1\tilde{D}_1 + x_2\tilde{D}_2 + x_3\tilde{D}_3 + x_6\tilde{D}_6 \\ &\quad + x_{11}\tilde{D}_{11} + x_{12}\tilde{D}_{12} + x_{13}\tilde{D}_{13} \end{aligned} \quad (39)$$

で一意に表すことができる。

定理 4 によって、入出力データより (38) 式の正規化基底行列を計算しておけば、 x_1 , x_2 , x_3 , x_6 , x_{11} , x_{12} , x_{13} の位置に当たる要素が与えられたとき、それらをつなぐシステムの振舞いが (39) で計算できることがわかる。この意味で、(12) 式の正規化基底行列と同様に、(38) 式の正規化基底行列はシステムの表現となる。

以上のことを利用すれば、基底行列表現の枠組で追従制御問題が解けることは明らかである。つまり、時刻 $k-1$ において、得られているデータと基底行列から

$$\begin{aligned}\tilde{D}_r = & y_{k-3}\tilde{D}_1 + y_{k-2}\tilde{D}_2 + y_{k-1}\tilde{D}_3 + r_{k+2}\tilde{D}_4 \\ & + u_{k-3}\tilde{D}_8 + u_{k-2}\tilde{D}_9 + u_{k-1}\tilde{D}_{10}\end{aligned}\quad (40)$$

が計算でき、 $\tilde{D}_r$ が (31) 式の § 行の次の行から 3 行の配列となる。こうして、時刻 $k+2$ における出力が目標信号 r_{k+2} となるようなシステムの振舞いが計算できた。 $\tilde{D}_r$ の要素のうち、 y_k, y_{k+1} は出力の予測値であり、 u_k が時刻 k において加えるべき入力である。以降、各時刻において同様に逐次計算すれば、追従制御のための入力を求めることができる。

6. おわりに

本論文では、対象システムの入出力データから、状態方程式や伝達関数のような数式モデルを経由することなく、直接、操作入力が発生することができるアルゴリズムを与えた。ある適当な形をもつ入出力データ配列を構成すれば、対象システムが生成しうるすべての入出力データ配列は、その基底行列の線形結合で必ず表せる。この事実、システムの動特性によって、システムから得られる入出力データが拘束されていることによる。さらに、この基底行列の意味を、可制御性と可到達性の観点から明確にした。また、入出力データに基づく従来の制御方式^{2),3)}を、本論文の枠組で再考察した。

なお、本論文では対象システムを 3 次としたが、以上の議論が、一般の n 次元システムの場合にも成り立つことは明らかであろう。この場合、2. における (6) 式の行列 D のサイズは $2n \times 2(n+1)$ となり、基底行列は $4n$ 個になる。さらに、対象システムの相対次数を r とすれば、5. における (32) 式の行列 $\tilde{D}$ のサイズは $(r+1) \times \{2(n+1)-r\}$ となり、基底行列は $2n+1$ 個になる。また、対象システムの次数は既知であるとしたが、未知であっても、入出力データに基づく次数の推定方法⁹⁾を用いれば、それを推定することは可能である。

おわりに、本研究に対して有益なコメントをいただいた査読者に心より感謝します。また、本研究の一部は、財団法人川西記念新明和教育財団（平成 8 年度研究助成）より援助を受けました。ここに謝意を表します。

参考文献

- 1) R. E. Kalman: On the general theory of control systems; *Proc. of the first World Congress of IFAC*, pp. 481-492 (1960)
- 2) 池田, 林: 入出力データ蓄積によるディジタル制御; 第 16 回制御理論シンポジウム, pp. 47-50 (1987)
- 3) 池田, 林, 藤崎: 入出力データ蓄積によるモデルレス追従制御アルゴリズム; 計測自動制御学会論文集, Vol. 34, No. 6,

pp 639-641 (1998)

- 4) J. C. Willems: Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 36, No. 3, pp. 259-294 (1991)
- 5) 河村: 入出力データから最適レギュレータを構成する基本的アルゴリズム; 計測自動制御学会論文集, Vol. 24, No. 11, pp. 1216-1218 (1988)
- 6) K. Furuta and M. Wongsaisuan: Discrete-time LQG dynamic controller design using plant Markov parameters; *Automatica*, Vol. 31, No. 9, pp. 1317-1324 (1995)
- 7) R. E. Skelton and G. Shi: The data-based LQG control problem; *Proc. of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1447-1452 (1994)
- 8) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会, p. 71 (1978)
- 9) 片山: システム同定入門, システム制御情報ライブラリー 9, 朝倉書店, pp. 143-144 (1994)