入出力特性を補間する線形離散時間システムの パラメトリゼーション*

堀口 和己**

A Parametrization of Linear Discrete-Time Systems Interpolating Input-Output Characteristics*

Kazumi HORIGUCHI**

Problems of finding linear systems which are consistent with given input-output characteristics are important in system approximation, model reduction and system identification. A conventional problem among them is the partial realization problem. In this paper, we consider a problem of finding MIMO linear discrete-time systems interpolating given input-output characteristics. The input-output characteristics are given by coefficients of the Taylor series of the transfer function at some complex points in the unit circle. Thus our problem is a generalization of the partial realization problem. Here, we provide a parametrization of all the interpolating systems with a norm constraint and a parametrization of all the stable interpolating systems.

1. はじめに

与えられた入出力特性に適合するような線形システムを求めることは、システムの近似、低次元化、および、システム同定における重要な問題である。このような問題のうち、従来から知られてきたものの一つに部分実現問題がある^{1),2)}。

本稿では、与えられた入出力特性を補間する多入力多出力線形離散時間システム — 以降、補間システムと呼ぶ — を求める問題を考察する。入出力特性は、単位円内のいくつかの複素周波数点における伝達関数のテイラー展開係数として与えられる。したがって、ここで考察する問題は部分実現問題の一般化になっている。

部分実現問題も含めて、補間システムを求める問題については、十分な結果が報告されてきた^{3),4)}。しかし、補間システムにある制約を課したとき、その制約を満たすような補間システムを求める問題はそれほど簡単ではない。

本稿では、ノルム制約のある補間システム、および、安定な補間システムを求める問題を考察する。これらの問題について、いくつかの結果が報告されているが^{3),5)-11)},

ここでは、新しいアプローチに基づいて、次の結果を提供している。(i) ノルム制約のあるすべての補間システムのパラメトリゼーション。これは従来の結果を包含した新しい表現である。(ii) 安定なすべての補間システムのパラメトリゼーション。これは従来の結果と一致し、具体的な構成手順を与えた表現である。

以下では次の記法を用いる。

ζ : 遅延要素 ($=z^{-1}$)

C : 複素数体

$C^{m \times r}$: C 上の $m \times r$ 行列の集合

$RH_{\infty}^{m \times r} = \{F(\zeta) | F(\zeta) \text{ は } |\zeta| \leq 1 \text{ に極を
持たない } m \times r \text{ 有理関数行列} \}$

$\bar{B}RH_{\infty}^{m \times r} = \{F(\zeta) | F(\zeta) \in RH_{\infty}^{m \times r} \text{ かつ
}\|F(\zeta)\|_{\infty} \leq 1\}$

$BRH_{\infty}^{m \times r} = \{F(\zeta) | F(\zeta) \in \bar{B}RH_{\infty}^{m \times r} \text{ かつ
}\|F(\zeta)\|_{\infty} < 1\}$

$F^{\sim}(\zeta) = F^*(\zeta^{-1})$ (*: 行列の共役転置)

$\deg F(\zeta)$: $F(\zeta)$ のマクミラン次数

2. 問題の定式化

r 入力 m 出力の線形離散時間システムの伝達関数を $H(\zeta)$ と書く。入出力特性

* 原稿受付 1997年4月4日

** 近畿大学 生物理工学部 Faculty of Biology Oriented Science and Technology, Kinki University; 930 Nishimitani, Uchita, Naga-gun Wakayama 649-6493, JAPAN

Key Words: input-output characteristics, interpolation, linear discrete-time system, parametrization.

$$\zeta_i, H_{ij}^o \quad (\zeta_i \in C, |\zeta_i| < 1, H_{ij}^o \in C^{m \times r}, \\ i=1,2,\dots,p, j=0,1,\dots,q_i-1) \quad (1)$$

が与えられたとき、伝達関数が

$$H(\zeta) = \sum_{j=0}^{q_i-1} H_{ij}^o (\zeta - \zeta_i)^j + O((\zeta - \zeta_i)^{q_i}) \\ (i=1,2,\dots,p) \quad (2)$$

を満たすシステムを考える。

(2) 式は、 $H(\zeta)$ を複素周波数点 ζ_i においてテイラー展開したとき、展開係数のはじめから q_i 個が与えられた値に一致する条件を表している。同式はまた、 $H(\zeta)$ が複素周波数点 ζ_i において入出力特性 H_{ij}^o ($j=0,1,\dots,q_i-1$) を補間する条件と解釈できる。ここで、 ζ_i を補間点、 q_i を ζ_i における重複度と呼び、伝達関数が (2) 式を満たすシステムを、入出力特性 (1) 式を補間するシステム、あるいは単に、補間システムと呼ぶ。

本稿では、伝達関数の H_∞ ノルムがある値以下である補間システムを求める問題、および、安定な補間システムを求める問題を考える。伝達関数の H_∞ ノルムがある値 (γ) 以下である条件は

$$\gamma^{-1} H(\zeta) \in \bar{B} R H_\infty^{m \times r} \quad (\gamma > 0) \quad (3)$$

と表される。システムが安定である条件は

$$H(\zeta) \in R H_\infty^{m \times r} \quad (4)$$

と表される。

これより、本稿で考察する問題は次に定式化される。

【問題 1】 入出力特性 (1) 式が与えられたとき、(2)、(3) 式を満たすシステムを求めよ。

【問題 2】 入出力特性 (1) 式が与えられたとき、(2)、(4) 式を満たすシステムを求めよ。

入出力特性 (1) 式で、 $p=1, \zeta_1=0$ としたとき、 H_{1j}^o はシステムの Markov パラメータを表し、これらの補間システムを求める問題は部分実現問題へと帰着される^{1),2)}。

部分実現問題も含めて、補間システムを求める問題については、十分な結果が得られている。参考文献 3) では、すべての補間システムのパラメトリゼーションが与えられている。また、参考文献 4) では、参考文献 3) の結果にマクミラン次数の考察が加えられ、最小マクミラン次数を持つすべての補間システムのパラメトリゼーションが与えられている。

一方、(3) 式または (4) 式を満たす補間システムを求める問題はそれほど簡単ではない。

問題 1 は H_∞ 制御問題と密接な関係があり、この種の補間問題が H_∞ 制御問題に帰着されること⁵⁾、逆に、

H_∞ 制御問題がこの種の補間問題に帰着されること⁶⁾がそれぞれ指摘されている。 H_∞ 制御問題の解法とも関連して、ノルム制約のある補間問題の解法がいくつか提案されてきた。それらは拡張 Nevanlinna アルゴリズムによる逐次解法⁵⁾⁻⁷⁾と、状態空間による解法^{3),8)-10)}に大別される。後者は前者に比べて、補間点の重複への対応が容易である点、解が explicit にパラメトライズされる点で優れている。

問題 1 で、(3) 式の条件に代えて

$$\gamma^{-1} H(\zeta) \in B R H_\infty^{m \times r} \quad (\gamma > 0) \quad (5)$$

の条件を考えた場合、問題は扱いやすく、状態空間法に基づいて (5) 式を満たすすべての補間システムのパラメトリゼーションが提供されている^{3),10)}。(3) 式を満たすすべての補間システムのパラメトリゼーションは、連続時間システムに対して与えられているが⁹⁾、これは (5) 式の条件を考えた場合と同様の簡潔な表現ではない。

問題 2 については、SISO システムに対する安定な補間システムの一構成法が提案されている¹¹⁾。また、参考文献 3) では、安定なすべての補間システムのパラメトリゼーションが提供されているが、その具体的な構成手順には言及されていない。

本稿では、まず 3. で、状態空間による新しいアプローチに基づき、(3) 式を満たすすべての補間システムのパラメトリゼーションを提供する。これは、(5) 式の条件を考えた場合の結果^{3),10)}を包含した新しい表現となっている。次に 4. で、3. の展開に基づき、(4) 式を満たすすべての補間システムのパラメトリゼーションを提供する。これは従来の結果³⁾と一致し、具体的な構成手順を与えた表現となっている。

3. ノルム制約のある補間システム

ここでは、問題 1 の解法を展開する。

はじめに、(2)、(3) 式を状態空間表現することを考える。 $H(\zeta)$ が (2) 式を満たすことは、 $H(\zeta)$ の適当な実現 (A, B, C, D) ($A \in C^{n \times n}$) に対し、 $Q \in C^{n \times q_r}$ が存在して

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ F \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\det(I - \zeta_i A) \neq 0 \quad (i=1,2,\dots,p) \quad (7)$$

が成立することと等価である¹²⁾。ここで、 A, E, F はそれぞれ入出力特性 (1) 式から作られる次の行列である。

$$A = \text{diag} [A_1, \dots, A_p] \in C^{q_r \times q_r}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \zeta_i I_r & I_r & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & I_r \\ & & \zeta_i I_r \end{bmatrix} \in C^{q_i r \times q_i r}$$

$$E = [E_1 \ \dots \ E_p] \in C^{r \times q^r}$$

$$E_i = [I_r \ 0 \ \dots \ 0] \in C^{r \times q_i r}$$

$$F = [F_1 \ \dots \ F_p] \in C^{m \times q^r}$$

$$F_i = [H_{i0}^o \ \dots \ H_{iq_i-1}^o] \in C^{m \times q_i r}$$

$$I_r: r\text{次単位行列}, \quad q = q_1 + \dots + q_p$$

つぎに, (3) 式を考える. $H(\zeta)$ が (3) 式を満たすならば, その可到達・可観測な実現 (A, B, C, D) ($A \in C^{n \times n}$) に対し, $X > 0$, $C_2 \in C^{r \times n}$, $D_2 \in C^{r \times r}$ が存在して

$$\begin{aligned} A^* X A + \gamma^{-2} C^* C + C_2^* C_2 &= X \\ A^* X B + \gamma^{-2} C^* D + C_2^* D_2 &= 0 \\ B^* X B + \gamma^{-2} D^* D + D_2^* D_2 &= I \end{aligned}$$

が成立する¹³⁾. ここで, (A, B, C, C_2) に適当な相似変換を施せば, 上式は

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A & B \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = I \quad (8)$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} C \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} D \\ D_2 \end{bmatrix}$$

と書き換えられる (相似変換後も同じ記法を用いた). すなわち, $H(\zeta)$ が (3) 式を満たすならば, その適当な実現 (A, B, C, D) に対し, C_2, D_2 が存在して (8) 式が成立する. また, (A, C) は可観測だから, $(A, \bar{C})$ も可観測である.

逆に, $H(\zeta)$ の適当な実現 (A, B, C, D) に対し, C_2, D_2 が存在して (8) 式が成り立ち, $(A, \bar{C})$ は可観測とする. このとき, $A^* A + \bar{C}^* \bar{C} = I$ だから, A は安定行列 (固有値がすべて単位円内に存在する行列) である. そこで, $H_2(\zeta) = D_2 + \zeta C_2 (I - \zeta A)^{-1} B$ としたとき, (8) 式より, $\gamma^{-2} H^*(\zeta) H(\zeta) + H_2^*(\zeta) H_2(\zeta) = I$ となるから¹³⁾, $H(\zeta)$ は (3) 式を満たす.

以上より, $H(\zeta)$ が (3) 式を満たすことは, $H(\zeta)$ の適当な実現 (A, B, C, D) に対し, C_2, D_2 が存在して (8) 式が成り立ち, $(A, \bar{C})$ が可観測となることと等価である.

ところで, $|\zeta_i| < 1$ だから, (8) 式は (7) 式を含んでい

る. したがって, (2), (3) 式を状態空間表現すれば, (6), (8) 式となることがわかり, 次の補題が得られた.

【補題 1】 次の二つの命題は等価である.

(i) $H(\zeta)$ は (2), (3) 式を満たす.

(ii) $H(\zeta)$ の適当な実現 (A, B, C, D) ($A \in C^{n \times n}$) に対し, $C_2 \in C^{r \times n}$, $D_2 \in C^{r \times r}$, $Q \in C^{n \times q^r}$ が存在して (6), (8) 式が成り立ち, $(A, \bar{C})$ は可観測となる.

ここで, (ii) において, (A, B) の可到達性, (A, C) の可観測性はいずれも必要とされていないことに注意されたい.

補題 1 より, 問題 1 は, “ある C_2, D_2, Q に対して, (6), (8) 式を満たし, $(A, \bar{C})$ が可観測となるような $H(\zeta)$ の実現 (A, B, C, D) ($A \in C^{n \times n}$) を求めよ.” という問題へと帰着された. 以下では, このような (A, B, C, D) を求めることを考える. A の次元は n とする. 上述のとおり, (A, B, C, D) は必ずしも $H(\zeta)$ の最小実現ではないので, $\deg H(\zeta) \leq n$ である.

まず, (2), (3) 式を満たすシステムの存在条件を導く. $H(\zeta)$ が (2), (3) 式を満たすとする. このとき, C_2, D_2, Q が存在して (6), (8) 式が成立するが, ここで

$$\begin{bmatrix} C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q A \\ E \end{bmatrix} = F_2 \quad (9)$$

において, (6) 式を

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \bar{F} \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} F \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

と書くことにする. (8) 式の左から $[A^* Q^* \ E^*]$ を, 右から $\begin{bmatrix} Q A \\ E \end{bmatrix}$ をそれぞれ乗じて, (10) 式を用いると

$$\begin{aligned} A^* P A - P + E^* E - \bar{F}^* \bar{F} &= 0 \\ P &= Q^* Q \end{aligned} \quad (11)$$

を得る.

(11) 式は P に関する Lyapunov 方程式であり, A の定義からその解は一意である¹⁴⁾. よって, (2), (3) 式を満たすシステムが存在するならば, (11) 式は半正定解 $P = Q^* Q$ を持つ. ただし, F_2 は入出力特性 (1) 式から直接計算できないので, P の半正定性は (2), (3) 式を満たすシステムが存在するための必要条件として実用的でない.

実際には, (2), (3) 式を満たすシステムの存在性について次の定理が成立する.

【定理 1】 (2), (3) 式を満たすシステムが存在するための必要十分条件は, Lyapunov 方程式

$$A^* P_0 A - P_0 + E^* E - \gamma^{-2} F^* F = 0 \quad (12)$$

の解 P_0 が半正定となることである。

(証明) 必要性: 上述より, (11) 式の解は $P \geq 0$ である. Lyapunov 方程式 (11) と (12) を比較すると, $-\gamma^{-2}F^*F + \bar{F}^*\bar{F} = F_2^*F_2 \geq 0$ だから, それらの解について $P_0 \geq P$ となる¹⁴⁾. よって, (2), (3) 式を満たすシステムが存在するならば, $P_0 \geq P \geq 0$ となり, 必要性が言えた. 十分性: $P_0 \geq 0$ のとき, (2), (3) 式を満たすシステムを具体的に構成することにより示す. その構成は定理 2 の中で行う. $\square$

以降, Lyapunov 方程式 (12) の解 P_0 は半正定と仮定する. 以下では, (10) 式において $F_2 = 0$ とした次の式

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q\Lambda \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \bar{F}_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_0 = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

を考え, (8), (13) 式を満たす任意の $(A, B, \bar{C}, \bar{D})$ の表現を求める (補題 2). ついで, この結果に基づいて, (2), (3) 式を満たすすべてのシステムのパラメトリゼーションを与える (定理 2).

Lyapunov 方程式 (12) の半正定解が $\text{rank} P_0 = n_0$ であるとする. n_0 は, (8), (13) 式を満たす A の次元の最小値となる (補題 2). このとき, P_0 のフルランク分解を

$$P_0 = Q_0^* Q_0 \quad (Q_0 \in C^{n_0 \times q_r}) \quad (14)$$

と書く. (12), (14) 式から

$$\begin{bmatrix} A^* Q_0^* & E^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \Lambda \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0^* & \gamma^{-1} F^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ \gamma^{-1} F \end{bmatrix}$$

となるから, 次の特異値分解 (SVD) が定義できる.

$$\begin{bmatrix} Q_0 \Lambda \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ \gamma^{-1} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Q_0 \Lambda \\ E \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} Q_0 \\ \gamma^{-1} F \end{bmatrix} = \nu$$

$$\Sigma = \text{diag} [\sigma_1 \ \dots \ \sigma_\nu], \quad \sigma_i > 0$$

また, (16) 式より, 次の SVD が定義される.

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ \bar{F}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & \bar{W}_{12} \\ \bar{W}_{21} & \bar{W}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\bar{W}_{12} = \begin{bmatrix} W_{12} & 0_{n_0 \times r} \end{bmatrix}, \quad \bar{W}_{21} = \begin{bmatrix} W_{21} \\ 0_{r \times \nu} \end{bmatrix}$$

$$\bar{W}_{22} = \begin{bmatrix} W_{22} & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \quad (0_{p \times q} : p \times q \text{ 零行列})$$

ここで, $\nu \leq \min\{n_0 + r, n_0 + m\}$ であるが, 上式では $\nu < \min\{n_0 + r, n_0 + m\}$ を前提として SVD を記述した. 以下では, この前提のもとで (2), (3) 式を満たす $H(\zeta)$ のパラメトリゼーションを与える. 一方, $\nu = n_0 + r$ または $\nu = n_0 + m$ の場合, (2), (3) 式を満たす $H(\zeta)$ は一意に与えられるが, これについては注意 2 で言及する.

これらの定義のもとで, 次の補題が成り立つ.

【補題 2】 $P_0 \geq 0$, $\text{rank} P_0 = n_0$ とする. このとき, (8), (13) 式を満たす $(A, B, \bar{C}, \bar{D})$ ($A \in C^{n \times n}$) は $n \geq n_0$ でなければならず, そのような任意の $(A, B, \bar{C}, \bar{D})$ は

$$\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ \bar{C}_0 & \bar{D}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} \\ 0 \\ \bar{W}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}^* & 0 & V_{21}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \bar{W}_{12} \\ I & 0 \\ 0 & \bar{W}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\theta & B_\theta \\ \bar{C}_\theta & \bar{D}_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ V_{12}^* & 0 & V_{22}^* \end{bmatrix} \quad (18)$$

の相似なシステムとして与えられる. ここで, $(A_\theta, B_\theta, \bar{C}_\theta, \bar{D}_\theta)$ は $(n_0 + r - \nu)$ 入力 $(n_0 + m - \nu + r)$ 出力 $n_\theta (= n - n_0)$ 次のシステムで

$$\begin{bmatrix} A_\theta & B_\theta \\ \bar{C}_\theta & \bar{D}_\theta \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A_\theta & B_\theta \\ \bar{C}_\theta & \bar{D}_\theta \end{bmatrix} = I \quad (19)$$

を満たす限り任意である.

また, (18) 式の (A_0, B_0) は, (A_θ, B_θ) が可到達ならば, 可到達であり, $(A_0, \bar{C}_0)$ は, $(A_\theta, \bar{C}_\theta)$ が可観測ならば, 可観測である.

(証明) 参考文献 12) の定理 1, 2 と同様に証明できるので, ここでは概略のみを記す. (13) 式の $Q \in C^{n \times q_r}$ より作られる $Q^* Q$ は Lyapunov 方程式 (12) の解であるから, $P_0 = Q^* Q = Q_0^* Q_0$ となる. Q_0 は行フルランクだから, ユニタリ行列 T が存在して $Q = T \begin{bmatrix} Q_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と書ける. $(A, B, \bar{C}, \bar{D})$ に T を用いて相似変換を施せば, (13) 式は

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \Lambda \\ 0 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ 0 \\ \bar{F}_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_0 = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

と書き換えられる (相似変換後も同じ記法を用いた). そこで, (13) 式に代えて (20) 式を考えればよい. (18) 式のシステムが (8), (20) 式を満たすこと, 逆に, (8), (20) 式を満たすシステムが (18) 式で表されることは, (15), (17), (19) 式などから確認できる. つぎに, (18)

式の (A_0, B_0) の可到達性と $(A_0, \bar{C}_0)$ の可観測性についてであるが、これらの議論は同様に行えるので、ここでは $(A_0, \bar{C}_0)$ の可観測性のみを考える。 $\lambda \in C$ が存在して $(\lambda I - A_0)x = -\bar{C}_0 x = 0$ が成り立ち、 $(A_\theta, \bar{C}_\theta)$ は可観測と仮定する。このとき、 $A_0^* A_0 + \bar{C}_0^* \bar{C}_0 = I$ だから、 $|\lambda| = 1$ である。また、仮定の式に (18) 式の $A_0, \bar{C}_0$ を代入し、 $x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}^T$ と書いて整理すると

$$(\lambda W_{11}^* - V_{11}^*)x_1 = 0 \quad (21)$$

$$-B_\theta V_{12}^* x_1 + (\lambda I - A_\theta)x_2 = 0 \quad (22)$$

$$(\lambda \bar{W}_{12}^* - \bar{D}_\theta V_{12}^*)x_1 - \bar{C}_\theta x_2 = 0 \quad (23)$$

を得る。(15), (17), (21) 式より $(\lambda I - A^*)Q_0^* x_1 = 0$ となり、 $|\lambda| = 1$, Q_0 : 行フルランク だから $x_1 = 0$ である。ゆえに、(22), (23) 式と仮定より $x_2 = 0$ となり、結局、 $x = 0$ がいえる。よって、 $(A_\theta, \bar{C}_\theta)$ が可観測ならば $(A_0, \bar{C}_0)$ は可観測であることが示された。 $\square$

3. の目標は、補題 1 を考慮すれば、(6), (8) 式を満たし、 $(A, \bar{C})$ が可観測なすべてのシステムをパラメトライズすることである。補題 2 は (8), (13) 式を満たす任意のシステムの表現を示している。ところで、(13) 式は (6) 式を含んでいるから、(18) 式は (6), (8) 式を満たすシステムの部分集合を与えている。実際には、(18) 式は (6), (8) 式を満たすすべてのシステムの表現を与える。次の定理はこのことを示し、問題 1 の解を提供している。

【定理 2】 $P_0 \geq 0$, $\text{rank } P_0 = n_0$ とする。このとき、(2), (3) 式を満たすすべてのシステムは

$$H(\zeta) = \Sigma_{11}(\zeta) + \Sigma_{12}(\zeta)\Theta(\zeta) \cdot \{I - \Sigma_{22}(\zeta)\Theta(\zeta)\}^{-1}\Sigma_{21}(\zeta) \quad (24)$$

でパラメトライズされる。ここで、 $\Sigma_{ij}(\zeta)$ は

$$\Sigma(\zeta) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}(\zeta) & \Sigma_{12}(\zeta) \\ \Sigma_{21}(\zeta) & \Sigma_{22}(\zeta) \end{bmatrix} \stackrel{\text{S}}{=} \begin{bmatrix} W_{11}V_{11}^* & W_{11}V_{21}^* & \gamma^{-1}W_{12} \\ \gamma W_{21}V_{11}^* & \gamma W_{21}V_{21}^* & W_{22} \\ V_{12}^* & V_{22}^* & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

である。また、 $\Theta(\zeta)$ は

$$\gamma^{-1}\Theta(\zeta) \in \bar{B}RH_\infty^{(n_0+m-\nu) \times (n_0+r-\nu)} \quad (26)$$

なる任意の関数である。

(証明) (24) 式の $H(\zeta)$ が (2), (3) 式を満たすこと：補題 1 と (26) 式より、 $\Theta(\zeta)$ の適当な実現 $(A_\theta, B_\theta, C_\theta, D_\theta)$ ($A_\theta \in C^{n_\theta \times n_\theta}$) に対し、 $C_{\theta 2}, D_{\theta 2}$ が存在して、 $\bar{C}_\theta = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}C_\theta \\ C_{\theta 2} \end{bmatrix}$, $\bar{D}_\theta = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}D_\theta \\ D_{\theta 2} \end{bmatrix}$ とおくと、(19) 式が成り

立ち、 $(A_\theta, \bar{C}_\theta)$ は可観測となる。この $(A_\theta, B_\theta, C_\theta, D_\theta)$ を用いて、(24) 式の $H(\zeta)$ の実現の一つは

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} \\ 0 \\ \gamma W_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}^* & 0 \\ V_{21}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma^{-1}W_{12} \\ I & 0 \\ 0 & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\theta & B_\theta \\ C_\theta & D_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ V_{12}^* & 0 & V_{22}^* \end{bmatrix} \quad (27)$$

$(A \in C^{n \times n}, n = n_0 + n_\theta)$

と書ける¹³⁾。補題 2 から、(27) 式の (A, B, C, D) に対し、 $\begin{bmatrix} C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\theta 2} & D_{\theta 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ V_{12}^* & 0 & V_{22}^* \end{bmatrix}$, Q が存在して (8), (13) 式が成り立ち、 $(A, \bar{C})$ は可観測となる。(13) 式 $\Rightarrow$ (6) 式だから、補題 1 より、(24) 式の $H(\zeta)$ が (2), (3) 式を満たすことがいえた。

(2), (3) 式を満たす $H(\zeta)$ が (24) 式で表されること：補題 1 より、(2), (3) 式を満たす $H(\zeta)$ の適当な実現 (A, B, C, D) ($A \in C^{n \times n}$) に対し、 C_2, D_2, Q が存在して (6), (8) 式が成り立ち、 $(A, \bar{C})$ は可観測となる。いま、これらに加えて $F_2 = 0$ となる場合を考える ($F_2 \neq 0$ の場合は後に考える)。このとき、補題 2 より、 $(A, B, \bar{C}, \bar{D})$ は (18) 式の $(A_0, B_0, \bar{C}_0 = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}C_0 \\ C_{02} \end{bmatrix}, \bar{D}_0 = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}D_0 \\ D_{02} \end{bmatrix})$ の相似なシステムとして与えられる。この (A_0, B_0, C_0, D_0) は (27) 式の (A, B, C, D) に等しく、これは (24) 式の右辺の実現の一つだったから、(2), (3) 式を満たす $H(\zeta)$ が (24) 式で表されることがいえた。つぎに、 $F_2 \neq 0$ の場合を考える。このとき、 (A, B, C, D) に不可観測な部分システムを付加して $H(\zeta)$ の新しい実現を作れば、 $F_2 = 0$ の場合に帰着できる。以下にこれを示す。不可観測な部分システムを含む $H(\zeta)$ の新しい実現

$$A' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} B \\ B_3 \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, D' = D$$

を考える。さらに、この実現に対して

$$C'_2 = \begin{bmatrix} C_3 & C_4 \end{bmatrix}, D'_2 = D_3$$

とおく。ここで、 $A_3, A_4, B_3, C_3, C_4, D_3$ は

$$\begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_5 \\ C_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & D_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} A_4 & A_5 \\ C_4 & C_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 A \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} A_4 & A_5 \\ C_4 & C_5 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A_4 & A_5 \\ C_4 & C_5 \end{bmatrix} = I \quad (30)$$

により定義される．この定義の妥当性を確認する．(29), (30) 式は (8), (13) 式と同様の関係であり, Lyapunov 方程式 $A^*P'A - P' + F_2^*F_2 = 0$ の解は $P' \geq 0$ である．よって, 補題 2 より, (29), (30) 式を満たす A_4, A_5, C_4, C_5 が存在する． A_3, B_3, C_3, D_3 は (28) 式から求められるから, (28)~(30) 式は正しい定義式である．なお, 補題 2 より, (A_4, C_4) が可観測であると仮定できる．そこで, $\bar{C}' = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}C' \\ C'_2 \end{bmatrix}$, $\bar{D}' = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}D' \\ D'_2 \end{bmatrix}$ とおけば, (6), (8), (9), (28)~(30) 式などから

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ \bar{C}' & \bar{D}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q'A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q' \\ \bar{F}_0 \end{bmatrix}, \quad Q' = \begin{bmatrix} Q \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ \bar{C}' & \bar{D}' \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A' & B' \\ \bar{C}' & \bar{D}' \end{bmatrix} = I$$

が成立する．また, $(A, \bar{C})$, (A_4, C_4) は可観測だから $(A', \bar{C}')$ も可観測となる．以上より, (A', B', C', D') をあらためて (A, B, C, D) ($A \in \mathbb{C}^{n \times n}$) と書いて, $H(\zeta)$ の新しい実現を考えると, $F_2 = 0$ の場合へと帰着されることが示された．よって, $F_2 = 0$ のときの結果を適用して, (2), (3) 式を満たす $H(\zeta)$ が (24) 式で表されることがいえた．□

(24) 式のパラメトリゼーションは $H(\zeta)$ の LFT (Linear Fractional Transformation) 表現となっている．この関係は Fig. 1 に示される．ここで

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \Sigma(\zeta) \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}, \quad w = \Theta(\zeta)v$$

である．

Fig. 1 Interpolating systems

最後に, いくつかの注意を記しておく．

(注意 1) 入出力特性 (1) 式が実軸対象に与えられたとする．すなわち, 複素数点 ζ_i が補間点ならば, ζ_i の共役複素数点 $\zeta_k = \zeta_i^*$ も補間点であり, $q_i = q_k$ かつ $H_{ij}^o = H_{kj}^{o*}$ ($j = 0, 1, \dots, q_i - 1$) とする．このとき, (2), (3) 式を満たすすべてのシステムのパラメトリゼーションは, 実数値演算だけにより, (24) 式で表現される実係数システムとして与えられる¹²⁾．

(注意 2) $\nu = n_0 + r$ または $\nu = n_0 + m$ の場合を考える． $\nu = n_0 + r$ のとき, (15) 式の SVD は

$$\begin{bmatrix} Q_0 A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix}$$

と書け, また, $\nu = n_0 + m$ のとき, (16) 式の SVD は

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ \gamma^{-1}F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix}$$

と書ける．これらの場合, (2), (3) 式を満たすシステムは一意であり, その伝達関数はそれぞれ

$$H(\zeta) = \Sigma_1(\zeta)$$

$$\stackrel{\text{S}}{=} \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{W_{11}V_1^*}{\gamma W_{21}V_1^*} & \frac{W_{11}V_2^*}{\gamma W_{21}V_2^*} \end{bmatrix} & (\nu = n_0 + r) \\ \begin{bmatrix} \frac{W_1V_{11}^*}{\gamma W_2V_{11}^*} & \frac{W_1V_{21}^*}{\gamma W_2V_{21}^*} \end{bmatrix} & (\nu = n_0 + m) \end{cases}$$

で与えられる．上式から, $\nu = n_0 + r$ のとき,

$$\gamma^{-2}H^\sim(\zeta)H(\zeta) = I_r$$

となり, また, $\nu = n_0 + m$ のとき,

$$\gamma^{-2}H(\zeta)H^\sim(\zeta) = I_m$$

となることがわかる．

(注意 3) 補題 2 より, (27) 式の (A, B) は, (A_θ, B_θ) が可到達ならば, 可到達である．ところで, 定理 2 の証明から, (8), (13) 式を満たす (A, B, C, D) は一般に, 不可観測な部分システムを含んでいることがわかる．したがって, (27) 式の (A, C) は, (A_θ, C_θ) が可観測であっても, 必ずしも可観測でない．また, $\deg \Sigma(\zeta) = n_0$ である．これは (25) 式の最右辺が $\Sigma(\zeta)$ の可到達・可観測な実現を与えていることより確認できる．これらのことから, (24) 式において

$$\begin{aligned} \deg H(\zeta) &\leq \deg \Sigma(\zeta) + \deg \Theta(\zeta) \\ &= n_0 + \deg \Theta(\zeta) \leq n \end{aligned}$$

となる．上式より, (2), (3) 式を満たすシステムはただか n_0 次で実現できる．実際には, n_0 次より低次元の (2), (3) 式を満たすシステムが存在する．これは, (24) 式において, $\Theta(\zeta)$ をうまく選んで不可観測な部分システムを除去することにより, $H(\zeta)$ の次元を低減することができるからである．

(注意 4) (2), (5) 式を満たすシステムが存在するための必要十分条件は, Lyapunov 方程式 (12) の解 P_0 が正定となることである． $P_0 > 0$ のとき, (2), (5) 式を満

たすすべてのシステムは (24) 式でパラメトライズされる。ただし、 $\Theta(\zeta)$ は $\gamma^{-1}\Theta(\zeta) \in BRH_{\infty}^{m \times r}$ なる任意の関数である。このとき、 $\Sigma_{21}(\zeta)$ は r 次正方行列であり、 $\det \Sigma_{21}(\zeta) \neq 0$ となることが確認できる。よって、(24) 式の LFT 表現は次の HMT (Homogeneous Transformation) 表現

$$H(\zeta) = \{\Pi_{11}(\zeta)\Theta(\zeta) + \Pi_{12}(\zeta)\} \\ \cdot \{\Pi_{21}(\zeta)\Theta(\zeta) + \Pi_{22}(\zeta)\}^{-1}$$

へと変換できる¹³⁾。上式は参考文献3),10)で与えられた (2), (5) 式を満たすすべてのシステムのパラメトリゼーションと同じ表現である。すなわち、(24) 式のパラメトリゼーションは (3) 式に代えて (5) 式の条件を考えた場合の結果を包含した表現となっている。

(注意5) 参考文献9)では、連続時間システムに対し、(2), (5) 式を満たすすべてのシステムが (24) 式と同様の LFT 表現でパラメトライズされている。しかし、(2), (3) 式を満たすすべてのシステムのパラメトリゼーションはこれと同様の簡潔な表現では与えられていない。

4. 安定な補間システム

ここでは、3.の展開に基づいて、問題2の解を示す。

システムの伝達関数が $H(\zeta) \in RH_{\infty}^{m \times r}$ ならば、ある $\gamma > 0$ が存在して $\gamma^{-1}H(\zeta) \in BRH_{\infty}^{m \times r}$ が成り立ち、この逆もまた成立する。よって、定理1より、(2), (4) 式を満たすシステムが存在するための必要十分条件は、ある $\gamma > 0$ が存在して Lyapunov 方程式 (12) の解 P_0 が半正定となることである。

ところで、 A は安定行列、 (A, E) は可観測だから、(12) 式で $\gamma \rightarrow \infty$ とした Lyapunov 方程式

$$A^* \tilde{P}_0 A - \tilde{P}_0 + E^* E = 0 \quad (31)$$

の解は $\tilde{P}_0 > 0$ である。(12) 式の解 P_0 の各成分は γ に関する連続関数だから、 γ を十分大きくとれば、(12) 式の解を必ず $P_0 \geq 0$ とすることができる¹⁴⁾。すなわち、(2), (4) 式を満たすシステムは必ず存在する。

上の考察から、(2), (4) 式を満たすすべてのシステムのパラメトリゼーションは、3.の展開を $\gamma \rightarrow \infty$ の場合へと書き換えることにより導かれると理解できる。以下にこの過程を展開する。

(31) 式の解 $\tilde{P}_0$ に対して、 $\tilde{Q}_0 = \tilde{P}_0^{\frac{1}{2}}$ とする。このとき、(15), (16) 式同様、次の SVD が定義できる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_0 A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{11} & \tilde{V}_{12} \\ \tilde{V}_{21} & \tilde{V}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{U}^* \quad (32)$$

$$\tilde{Q}_0 = \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{U}^* \quad (33)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \tilde{Q}_0 A \\ E \end{bmatrix} = \text{rank} \tilde{Q}_0 = qr$$

$$\tilde{\Sigma} = \text{diag} [\tilde{\sigma}_1 \cdots \tilde{\sigma}_{qr}], \quad \tilde{\sigma}_i > 0$$

また、この SVD から、次の行列を定義する。

$$\tilde{W} = \tilde{F} \tilde{U} \tilde{\Sigma}^{-1} \quad (34)$$

以上のもとで次のことがいえる。

【定理3】 (2), (4) 式を満たすすべてのシステムは

$$H(\zeta) = \tilde{\Sigma}_1(\zeta) + \Xi(\zeta) \tilde{\Sigma}_2(\zeta) \quad (35)$$

でパラメトライズされる。ここで、 $\tilde{\Sigma}_i(\zeta)$ は

$$\tilde{\Sigma}(\zeta) = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_1(\zeta) \\ \tilde{\Sigma}_2(\zeta) \end{bmatrix} \\ \stackrel{\text{S}}{=} \begin{bmatrix} \tilde{U} \tilde{V}_{11}^* & \tilde{U} \tilde{V}_{21}^* \\ \tilde{W} \tilde{V}_{11}^* & \tilde{W} \tilde{V}_{21}^* \\ \tilde{V}_{12}^* & \tilde{V}_{22}^* \end{bmatrix} \quad (36)$$

である。また、 $\Xi(\zeta)$ は任意の $RH_{\infty}^{m \times r}$ の要素である。

証明に先だって、補題1に対応する次の補題を示す。

【補題3】 次の二つの命題は等価である。

- (i) $H(\zeta)$ は (2), (4) 式を満たす。
- (ii) $H(\zeta)$ の適当な実現 (A, B, C, D) ($A \in C^{n \times n}$) に対し、 $\tilde{C} \in C^{r \times n}$, $\tilde{D} \in C^{r \times r}$, $\tilde{Q} \in C^{m \times qr}$ が存在して

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A & B \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix}^* = I \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q} A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Q} \\ F \end{bmatrix} \quad (38)$$

が成り立ち、 $(A, \tilde{C})$ は可観測となる。

(証明) (i) $\Rightarrow$ (ii): 仮定より、 $H(\zeta)$ の実現 (A, B, C, D) (A : 安定行列, (A, B) : 可到達) に対し、 $\exists X > 0$; $AXA^* + BB^* = X$ となる。ここで、適当な相似変換を施せば、上式は $AA^* + BB^* = I$ と書き換えられる (相似変換後も同じ記法を用いた)。そこで、この (A, B) に対し、 $\tilde{C}, \tilde{D}$ が存在して (37) 式が成立する。このとき、 $(A, \tilde{C})$ は可観測となる。なぜなら、 $(A, \tilde{C})$ が不可観測ならば、 $\exists x \neq 0$; $Ax = \lambda x$ ($|\lambda| < 1$), $\tilde{C}x = 0$ となるが、これは (37) 式の $A^*A + \tilde{C}^*\tilde{C} = I$ に矛盾するからである。(2) 式が (38) 式を含んでいることは、3.で述べたとおりである。

(ii) $\Rightarrow$ (i): 仮定より、可観測な $(A, \tilde{C})$ に対して、 $A^*A + \tilde{C}^*\tilde{C} = I$ となるから、 A は安定行列である。ゆえに、 $H(\zeta)$ は (4) 式を満たす。(37), (38) 式が (2) 式を含んでいることは、3.で述べたとおりである。□

(証明) (35) 式の $H(\zeta)$ が (2), (4) 式を満たすこと：
 $\Xi(\zeta) \in RH_\infty^{m \times r}$ だから、補題 3 より $\Xi(\zeta)$ の適当な実現
 $(A_\xi, B_\xi, C_\xi, D_\xi)$ ($A_\xi \in C^{n_\xi \times n_\xi}$) に対し、 $\tilde{C}_\xi, \tilde{D}_\xi$ が存在
 して

$$\begin{bmatrix} A_\xi & B_\xi \\ \tilde{C}_\xi & \tilde{D}_\xi \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A_\xi & B_\xi \\ \tilde{C}_\xi & \tilde{D}_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\xi & B_\xi \\ \tilde{C}_\xi & \tilde{D}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\xi & B_\xi \\ \tilde{C}_\xi & \tilde{D}_\xi \end{bmatrix}^* = I \quad (39)$$

が成り立ち、 $(A_\xi, \tilde{C}_\xi)$ は可観測となる。この $(A_\xi, B_\xi, C_\xi, D_\xi)$ を用いて、(35) 式の $H(\zeta)$ の実現の一つは

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ 0 \\ \tilde{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{11}^* & 0 & \tilde{V}_{21}^* \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_\xi & B_\xi \\ C_\xi & D_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \tilde{V}_{12}^* & 0 & \tilde{V}_{22}^* \end{bmatrix} \\ &(A \in C^{n \times n}, n = qr + n_\xi) \end{aligned} \quad (40)$$

と書ける。(40) 式の (A, B, C, D) において、 $\begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_\xi & \tilde{D}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \tilde{V}_{12}^* & 0 & \tilde{V}_{22}^* \end{bmatrix}$ ととれば、(37) 式が成立する。

また、 $\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ととれば、(32)~(34) 式より、(38) 式が成立する。さらに、 $(A, \tilde{C})$ が可観測であることは、補題 2 の証明と同様に確認できる。よって、補題 3 より、(35) 式の $H(\zeta)$ が (2), (4) 式を満たすことがいえた。

(2), (4) 式を満たす $H(\zeta)$ が (35) 式で表されること：補題 3 より、(2), (4) 式を満たす $H(\zeta)$ の適当な実現 (A, B, C, D) ($A \in C^{n \times n}$) に対し、 $\tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{Q}$ が存在して (37), (38) 式が成り立ち、 $(A, \tilde{C})$ は可観測となる。いま、これらに加えて

$$\begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q}\Lambda \\ E \end{bmatrix} = \tilde{F} = 0 \quad (41)$$

となる場合だけを考えればよい。なぜなら、 $\tilde{F} \neq 0$ の場合、定理 2 の証明の後半と同様に、 (A, B, C, D) に不可観測な部分システムを付加して $H(\zeta)$ の新しい実現を作れば、 $\tilde{F} = 0$ の場合へと帰着されるからである。(37), (38), (41) 式を満たし $(A, \tilde{C})$ が可観測な $(A, B, \begin{bmatrix} C \\ \tilde{C} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ \tilde{D} \end{bmatrix})$ ($A \in C^{n \times n}$) は $n \geq qr$ でなければならず、そのような任意の $(A, B, \begin{bmatrix} C \\ \tilde{C} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ \tilde{D} \end{bmatrix})$ は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \\ \tilde{C}_0 & \tilde{D}_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ 0 \\ \tilde{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{11}^* & 0 & \tilde{V}_{21}^* \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_\xi & B_\xi \\ C_\xi & D_\xi \\ \tilde{C}_\xi & \tilde{D}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \tilde{V}_{12}^* & 0 & \tilde{V}_{22}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

の相似なシステムとして与えられる。ここで、 $(A_\xi, B_\xi, \begin{bmatrix} C_\xi \\ \tilde{C}_\xi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_\xi \\ \tilde{D}_\xi \end{bmatrix})$ ($A_\xi \in C^{n_\xi \times n_\xi}, n_\xi = n - qr$) は (39) 式を満たし $(A_\xi, \tilde{C}_\xi)$ が可観測な任意のシステムである。このことは、(15) 式と (32) 式を、(16) 式と (33), (34) 式をそれぞれ比較すれば、 $\gamma \rightarrow \infty$ のとき、 $V_{ij} \rightarrow \tilde{V}_{ij}$, $W_{11} \rightarrow \tilde{U}$, $\gamma W_{21} \rightarrow \tilde{W}$, $W_{12} \rightarrow 0$, $W_{22} \rightarrow I$ となり、(18) 式右辺 $\rightarrow$ (42) 式右辺 となることから理解できる (厳密な証明は省略する)。(42) 式の (A_0, B_0, C_0, D_0) は (40) 式の (A, B, C, D) に等しく、これは (35) 式の右辺の実現の一つだったから、(2), (4) 式を満たす $H(\zeta)$ が (35) 式で表されることがいえた。□

(注意 6) (40) 式の (A, B) は、 (A_ξ, B_ξ) が可到達ならば、可到達である。このことは補題 2 と同様に証明できる。ところで、定理 3 の証明から、(37), (38), (41) 式を満たす (A, B, C, D) は一般に、不可観測な部分システムを含んでいることがわかる。よって、(40) 式の (A, C) は、 (A_ξ, C_ξ) が可観測であっても、必ずしも可観測でない。また、(36) 式の最右辺は必ずしも $\tilde{\Sigma}(\zeta)$ の可観測な実現を与えていない。これらのことから、(35) 式において

$$\begin{aligned} \deg H(\zeta) &\leq \deg \tilde{\Sigma}(\zeta) + \deg \Xi(\zeta) \\ &\leq qr + \deg \Xi(\zeta) \leq n \end{aligned}$$

となる。上式より、(2), (4) 式を満たすシステムはたかだか qr 次で実現できる。実際には、 qr 次より低次元の安定な補間システムが存在する。これは、(35) 式において、 $\Xi(\zeta)$ をうまく選んで不可観測な部分システムを除去することにより、 $H(\zeta)$ の次元を低減することができるからである。

(注意 7) $\tilde{\Sigma}_1(\zeta)$ は (2), (4) 式を満たす関数の一つであり、 $\tilde{\Sigma}_2(\zeta)$ は (4) 式および

$$\tilde{\Sigma}_2(\zeta) = O((\zeta - \zeta_i)^{q_i}) \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

を満たす関数である。(35) 式はこれらの関数を用いて、(2), (4) 式を満たすすべてのシステムをパラメトラライズした式である。これは参考文献 3) で与えられた表現に一致する。同参考文献では、 $\tilde{\Sigma}_1(\zeta), \tilde{\Sigma}_2(\zeta)$ の具体的な構成

手順には言及されていないが、本稿では、これらの関数を(36)式によって与えている。

5. 数値例

これまでの理論を、簡単な数値例を通して確認する。

【例題 1】 入出力特性

$$\begin{aligned} p=2, \quad q_1=2, \quad q_2=1 \\ \zeta_1=0, \quad H_{10}^o=0, \quad H_{11}^o=\frac{1}{2} \\ \zeta_2=\frac{2}{3}, \quad H_{20}^o=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

が与えられたとき、(3)式を満たす補間システムを求める。

(12)式の解 P_0 は

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} - \gamma^{-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{20} \end{bmatrix}$$

となる。したがって、定理 1 より、(3)式を満たす補間システムが存在するための必要十分条件は $P_0 \geq 0$ 、すなわち、 $\gamma \geq \gamma_m = (3 + \sqrt{105})/16 \approx 0.8279$ で与えられる。

$\gamma=1$ のときを考える。このとき、(3)式を満たすすべての補間システムは(24)式より

$$H(\zeta) = \frac{\zeta(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\zeta) - \zeta^2(\frac{13}{42} - \zeta)\Theta(\zeta)}{(1 - \frac{13}{42}\zeta) + \zeta(\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\zeta)\Theta(\zeta)} \quad (43)$$

$\Theta(\zeta)$: 任意の $\bar{B}RH_\infty$ の要素

と表される。 $\text{rank } P_0|_{\gamma=1} = 3$ だから、上式の補間システムはたかだか 3 次で実現できる (注意 3)。(43)式より、 $\Theta(\zeta) = \text{定数} \neq 0$ ならば $\deg H(\zeta) = 3$ 、 $\Theta(\zeta) = 0$ ならば $\deg H(\zeta) = 2$ である。また、 $\Theta(\zeta) = (1/8)/(1 - 7\zeta/8)$ ($\|\Theta(\zeta)\|_\infty = 1$) ととれば

$$H(\zeta) = \frac{\frac{1}{2}\zeta(1 - \frac{2}{3}\zeta)}{(1 - \frac{1}{2}\zeta)(1 - \frac{2}{3}\zeta)} = \frac{\frac{1}{2}\zeta}{1 - \frac{1}{2}\zeta}$$

となるから、 $\deg H(\zeta) = 1$ ($\|H(\zeta)\|_\infty = 1$) である。これは(3)式を満たす最小次数の補間システムとなる。

一方、 $1 > \gamma \geq \gamma_m$ のとき、(3)式を満たす補間システムの最小次数は 2 次である。とくに、 $\gamma = \gamma_m$ のとき、注意 2 の条件が成り立つので、(3)式を満たす補間システムは一意に定まる。そのシステムは

$$H(\zeta) = \gamma_m \frac{\zeta(\frac{1}{2\gamma_m} + \zeta)}{1 + \frac{1}{2\gamma_m}\zeta}$$

で与えられ、 $\gamma_m^{-2}H^*(\zeta)H(\zeta) = 1$ が成立する。

【例題 2】 入出力特性

$$\begin{aligned} p=3, \quad q_1=q_2=q_3=1 \\ \zeta_1=0, \quad H_{10}^o=1 \\ \zeta_2=\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}, \quad H_{20}^o=\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \\ \zeta_3=\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}, \quad H_{30}^o=\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \end{aligned}$$

が与えられたとき、(4)式を満たす補間システムを求める。入出力特性は虚数を含んでいるが実軸対象に与えられているので、実数値演算によって実係数の補間システムを求めることができる (注意 1)。

(35)式より、(4)式を満たすすべての補間システムは

$$H(\zeta) = \frac{(1 - \frac{5}{4}\zeta + \frac{3}{2}\zeta^2) - \zeta(\frac{1}{2} - \zeta + \zeta^2)\Xi(\zeta)}{1 - \zeta + \frac{1}{2}\zeta^2} \quad (44)$$

$\Xi(\zeta)$: 任意の RH_∞ の要素

と表される。

(4)式を満たす補間システムの最小次数は 2 次である。

(4)式を満たすすべての 2 次の補間システムは

$$\begin{aligned} \Xi(\zeta) &= \frac{(\frac{3}{2} + 2\alpha_1 + \alpha_2) - (1 + \frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2)\zeta}{1 + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2} \\ (|\alpha_1| < 1 + \alpha_2, \quad |\alpha_2| < 1) \end{aligned}$$

ととることにより

$$H(\zeta) = \frac{1 - (1 + \frac{1}{2}\alpha_2)\zeta + (2 + \alpha_1 + \alpha_2)\zeta^2}{1 + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2}$$

で与えられる。このとき、(44)式において、 $\zeta = 1 \pm j$ で極零相殺が生じ、次数の低減がなされている (注意 6)。

一方、(4)式の制約がなければ、補間システムは 1 次で実現できる。そのシステムは

$$H(\zeta) = \frac{1 - \zeta}{1 - 2\zeta} \notin RH_\infty$$

で与えられる。

6. おわりに

本稿では、新しいアプローチに基づいて、 H_∞ ノルムが γ 以下であるすべての補間システムのパラメトリゼーション、および、安定なすべての補間システムのパラメトリゼーションをそれぞれ与えた。

パラメトライズされた補間システムのうち、最小次数のシステムを求めることは未解決の問題である。本稿のアプローチに基づけば、この問題はある制約のもとで Lya-

punov 方程式の半正定解の階数を最小にする問題として定式化できる¹⁵⁾。その解法は今後の課題としたい。

参考文献

- 1) R. E. Kalman: On minimal partial realizations of a linear input/output map; *Aspects of Network and System Theory* (R. E. Kalman and N. de Claris, Eds.), Holt, Reinhart and Winston, pp. 385–408 (1971)
- 2) A. J. Tether: Construction of minimal linear state-variable models from finite input-output data; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 15, No. 4, pp. 427–436 (1970)
- 3) J. Ball, I. Gohberg and L. Rodman: *Interpolation of Rational Matrix Functions*; Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 45, Birkhäuser Verlag, Part IV, V (1990)
- 4) A. C. Antoulas, J. A. Ball, J. Kang and J. C. Willems: On the solution of the minimal rational interpolation problem; *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 137/138, pp. 511–573 (1990)
- 5) 章, 細江, 伊藤: 行列補間問題のBlock-Reductionによる解法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 25, No. 2, pp. 159–166 (1989)
- 6) H. Kimura: Directional interpolation approach to H^∞ -optimization and robust stabilization; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 32, No. 12, pp. 1085–1093 (1987)
- 7) D. J. N. Limebeer and B. D. O. Anderson: An interpolation theory approach to H^∞ controller degree bounds; *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 98, pp. 347–386 (1988)
- 8) H. Kimura: Directional interpolation in the state space; *Systems & Control Letters*, Vol. 10, pp. 317–324 (1988)
- 9) H. Kimura: Conjugation, interpolation and model-matching in H^∞ ; *International Journal of Control*, Vol. 49, No. 1, pp. 269–307 (1989)
- 10) K.-Z. Liu and T. Mita: Conjugation and H^∞ control of discrete-time systems; *International Journal of Control*, Vol. 50, No. 4, pp. 1435–1460 (1989)
- 11) A. C. Antoulas and B. D. O. Anderson: On the problem of stable rational interpolation; *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 122/123/124, pp. 301–329 (1989)
- 12) 堀口, 西村, 長田: 1次・2次情報を補間するシステムのパラメトリゼーション; システム制御情報学会論文誌, Vol. 7, No. 3, pp. 94–102 (1994)
- 13) M. Green and D. J. N. Limebeer: *Linear Robust Control*, Prentice-Hall, Chap. 3, 4 (1995)
- 14) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論; 計測自動制御学会, Chap. 13 (1978)
- 15) R. Amano, K. Horiguchi, T. Nishimura and A. Nagata: A parametrization of linear discrete-time systems interpolating input-output data; *Proceedings of the 2nd Asian Control Conference*, Vol. 1, pp. 493–496 (1997)