変位フィードバックによる大型宇宙構造物の ロバスト安定化*

藤崎 泰正**・池田 雅夫***・三木 和博***

Robust Stabilization of Large Space Structures via Displacement Feedback*

Yasumasa FUJISAKI**, Masao IKEDA*** and Kazuhiro MIKI***

1. はじめに

大型宇宙構造物では、センサとアクチュエータを同位置、同方向に配置（コロケーション）することが、よく考えられる。このコロケーションがなされた大型宇宙構造物は、そのパラメータの値によらず、変位と速度の静的フィードバックにより、ロバスト安定化できることが知られている^{1),2)}。この事実は、パラメータ同定誤差が大きい宇宙構造物の場合、有用な性質である。

本稿では、コロケーションがなされた大型宇宙構造物を対象に、速度を用いない変位のためのフィードバックによる安定化について考察する。この場合、十分に広い帯域の近似微分器を用いて速度の近似値を生成すれば、構造物を安定化できることが期待できる。しかし、広帯域の近似微分器は雑音やデータの誤差に敏感なため、制御に誤動作を生じる恐れがあり、その使用は望ましくない。

それに対して、本稿は、構造物の不安定モードが剛体モードだけであることに注目し、周波数が0において微分器として働く動的コントローラを用いれば、安定化には充分ではないかという発想に基づいている。その場合、剛体モード以外のモードの安定性を保存することが必要であるが、得られる変位の動的フィードバック制御則は、構造物が本質的にもつ定性的な性質のみで、閉ループ系のロバスト安定性を保証するものである。

このように、本稿で提案する変位の動的フィードバックによるロバスト安定化は、変位と速度の静的フィードバックの考えを基本としている。その利点は、ロバスト安定条件が構造物の定性的性質によって満たされること

以外に、センサとアクチュエータが配置されている各点ごと、またはその適当な組ごとに変位から入力を生成するような分散制御で、実現が可能であることである。一般のロバスト安定化法は、安定条件が定量的であるとともに、分散制御では実現できない。

2. 安定性の基本定理

力学系など2階の微分方程式で表されるシステム

$$M_0 \ddot{q}(t) + D_0 \dot{q}(t) + K_0 q(t) = 0 \quad (1)$$

は、各係数行列が

$$M_0 > 0, \quad D_0 > 0, \quad K_0 > 0 \quad (2)$$

を満足するとき、安定であることは、よく知られている³⁾。この事実は、大型宇宙構造物の変位と速度の静的フィードバックによる安定化問題を考える際に、中心的な役割を果たしてきた^{1),2)}。

それに対し本稿では、力学系とコントローラから成る閉ループ系を記述することができる2階と1階の微分方程式が連立したシステムの安定性について、以下の基本定理を与える。

【定理 1】 2階と1階の連立微分方程式で表されるシステム

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{q}(t) + D_1 \dot{q}(t) + K_{11} q(t) + K_{12} z(t) &= 0 \\ D_2 \dot{z}(t) + K_{12}^T q(t) + K_{22} z(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

は、各係数行列が

$$\begin{aligned} M_1 > 0, \quad D_1 \geq 0, \quad D_2 > 0, \quad \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} D_1 & K_{12} \end{bmatrix} : \text{行フルランク} \end{aligned} \quad (4)$$

を満足するとき、安定である。

(証明) 最初に、二つの正則な対称行列を定義する。

* 原稿受付 1997年9月24日

** 神戸大学 工学部 Faculty of Engineering, Kobe University; Rokkodai-cho 1-1, Nada ward, Kobe city, Hyogo 657-8501, JAPAN

*** 大阪大学 大学院 工学研究科 School of Engineering, Osaka University; Yamadaoka 2-1, Suita city, Osaka 565-0871, JAPAN

Key Words: large space structure, robust stabilization, dynamic displacement feedback, decentralized control.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & M_1 & 0 \\ M_1 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{11} & -K_{12} \\ 0 & -K_{12}^T & -K_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

このとき、 $\dot{q}(t)$, $q(t)$, $z(t)$ を状態変数にとれば、(3) 式のシステムは、

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}(t) \\ \dot{q}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = E^{-1}A \quad (7)$$

と状態方程式表現できる。そこで、正定行列 $\tilde{P}$ を

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}EA^{-1} \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix} A^{-1}E \quad (8)$$

とおけば、リアプノフ方程式

$$\tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} + \tilde{Q} = 0, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

が成り立つことがわかる。 $\tilde{Q}$ は半正定行列なので、 $(\tilde{Q}, \tilde{A})$ が可観測であることが示せれば、(3) 式のシステムの安定性がいえる。そこで、実際に確かめてみると、

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} \\ \tilde{Q} \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} sE - A \\ \tilde{Q} \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} s^2 M_1 + K_{11} \\ K_{12}^T \\ D_1 \end{bmatrix} + \text{rank} M_1 + \text{rank} D_2 \end{aligned} \quad (10)$$

より、 $(\tilde{Q}, \tilde{A})$ は可観測であることがわかる。□

なお、この定理は参考文献4)の定理6.9を簡単化したもので、与えた証明は対応する定理のより簡単な別証である。

3. ロバスト安定化

宇宙構造物は、一般に、力学系の運動方程式である2階の微分方程式でモデル化される。コロケーションがなされている場合、その表現は次のようになる。

$$\begin{aligned} M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) &= Lu(t) \\ y(t) &= L^T q(t) \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 $q(t) \in R^n$ は変位ベクトル、 $u(t) \in R^r$ は操作入力ベクトル、 $y(t) \in R^r$ は観測出力ベクトルである。 M ,

D , K はそれぞれ質量、減衰、剛性行列であり、一般に

$$M > 0, \quad D \geq 0, \quad K \geq 0 \quad (12)$$

であるという定性的な特徴をもつ。また、 L は構造物へのアクチュエータを通して力(トルク)の加わり方を表す行列、 L^T は変位がセンサを通してどのように観測されるかを表す行列である。この転置の関係は、センサとアクチュエータのコロケーションによる。ここで、

$$\begin{bmatrix} D & L \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix}: \text{行フルランク} \quad (13)$$

すなわち、剛体モードの可制御性と可観測性を仮定する。

さて、観測出力として、変位 $y(t)$ のみならず速度 $\dot{y}(t)$ も得られる場合には、それらの静的フィードバック

$$u(t) = -R_{d0}y(t) - R_{v0}\dot{y}(t) \quad (14)$$

により、(11) 式の構造物を安定化できることが知られている。ただし、

$$R_{d0} > 0, \quad R_{v0} > 0 \quad (15)$$

とする。この事実は、(14) 式を(11) 式に施して得られる閉ループ系の微分方程式

$$\begin{aligned} M\ddot{q}(t) + (D + LR_{v0}L^T)\dot{q}(t) \\ + (K + LR_{d0}L^T)q(t) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

において、(13) 式の仮定のもとで、 M , $D + LR_{v0}L^T$, $K + LR_{d0}L^T$ がすべて正定行列になることにより保証される。しかも明らかに、(11) 式の構造物のパラメータが変動しても安定性は保たれ、この意味で構造物はロバスト安定化されているといえる。

それに対し本稿では、観測出力として、変位 $y(t)$ のみしか得られない場合に、動的フィードバック

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -Vz(t) - Uy(t) \\ u(t) &= -U^T z(t) - (R_{d1} + U^T V^{-1}U)y(t) \end{aligned} \quad (17)$$

により、同様に、(11) 式の構造物をロバスト安定化できることを示す。ただし、

$$V > 0, \quad U: \text{列フルランク}, \quad R_{d1} > 0 \quad (18)$$

とする。

【定理2】 (17) 式の制御則を(11) 式の構造物に施して得られる閉ループ系は安定である。

(証明) 閉ループ系の微分方程式は

$$\begin{aligned} M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + [K + L(R_{d1} + U^T V^{-1}U)L^T]q(t) \\ + LU^T z(t) = 0 \\ I\dot{z}(t) + UL^T q(t) + Vz(t) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

と記述できる。このとき、定理 1 の条件すべてが成り立っていることより、明らか。□

いま、(17) 式のコントローラは、それ自身が安定であるから、構造物をロバスト安定化するのみならず、強安定化している。また、(17) 式のコントローラの伝達関数は

$$\begin{aligned} u(s) &= -R_{d1}y(s) - sR_{v1}(s)y(s) \\ R_{v1}(s) &= U^T V^{-1} (sI + V)^{-1} U \end{aligned} \quad (20)$$

であるから、このコントローラは速度 $\dot{y}(t)$ が直接観測できるときの (14) 式の制御則の自然な拡張となっている。つまり、 V を十分大きな値に選ぶ場合、 $sR_{v1}(s)$ は近似微分器となり、(20) 式の制御則は (14) 式の制御則を近似的に実現する。本稿では、 V の大きさについて何ら制約を与えていないから、 $sR_{v1}(s)$ が近似微分器となることまでは要求していない。しかし、少なくとも $s=0$ のまわりでは、 $sR_{v1}(s)$ は微分動作をしていると考えることができる。この事実は、本稿の制御則が構造物の剛体モードに減衰を付加する効果をもっていることと対応している。

なお、参考文献 5) の Example では、(20) 式のコントローラと類似のものについて議論しているが、その論旨は複雑で、本稿のものほど直接的でない。

4. 分散制御

大型宇宙構造物は、その大きさゆえ、一般にいくつかのサブシステムから構成される。そして、それらサブシステムが新たな結合や分離、再結合をする場合がある。そのような状況に対処するためにはサブシステムごとの分散制御が有効であるが、(17) 式のロバスト安定化則は、容易に分散制御として実現することができる。

いま、(11) 式的大型宇宙構造物が N 個のサブシステムが結合したものであるとしよう。このとき、操作入力ベクトル u と観測出力ベクトル y を、各サブシステムに対応させて、 N 個の組に分割する。

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1^T(t) & u_2^T(t) & \cdots & u_N^T(t) \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1^T(t) & y_2^T(t) & \cdots & y_N^T(t) \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

そして、行列 L も

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_N \end{bmatrix} \quad (23)$$

のように分割し、(11) 式を次のように書き直す。

$$\begin{aligned} M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) &= \sum_{i=1}^N L_i u_i(t) \\ y_i(t) &= L_i^T q(t) \end{aligned} \quad (24)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

ここで、(17) 式の変位の動的フィードバックをサブシステムごとに施すことを考える。

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= -V_i z_i(t) - U_i y_i(t) \\ u_i(t) &= -U_i^T z_i(t) - (R_{d1i} + U_i^T V_i^{-1} U_i) y_i(t) \end{aligned} \quad (25)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

ただし、

$$\begin{aligned} V_i &> 0, \quad U_i: \text{列フルランク}, \quad R_{d1i} > 0 \\ i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (26)$$

である。

このとき、次の系を得る。

【系 1】 (25) 式の分散制御則を (24) 式の構造物に施して得られる閉ループ系は安定である。

(証明) コントローラの各行列を

$$R_{d1} = \text{block diag} \begin{bmatrix} R_{d11}, R_{d12}, \dots, R_{d1N} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$U = \text{block diag} \begin{bmatrix} U_1, U_2, \dots, U_N \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$V = \text{block diag} \begin{bmatrix} V_1, V_2, \dots, V_N \end{bmatrix} \quad (29)$$

と定義すれば、定理 2 より、明らか。□

5. おわりに

本稿では、センサとアクチュエータのコロケーションのもとでの大型宇宙構造物の安定化について考えた。提案した変位の動的フィードバックを用いれば、大型宇宙構造物を、そのパラメータの値によらず、ロバスト安定化、強安定化、分散安定化できる。

なお、本稿では大型宇宙構造物を対象としているが、以上の議論より明らかなように、一般の機械システムであっても、それが (11) 式、(12) 式、(13) 式を満足していれば、提案した制御則によりロバスト安定化できる。

参考文献

- 1) 池田，木田：大型宇宙構造物におけるこれからの制御技術；計測と制御，Vol. 31, No. 1, pp. 170-173 (1992)
- 2) 梶谷，池田，木田：Collocated Feedback による宇宙構造物の最適制御；計測自動制御学会論文集，Vol. 25, No. 8, pp. 882-888 (1989)
- 3) E. E. Zajac: The Kelvin-Tait-Chetaev theorem and extensions; *J. Astronautical Sciences*, Vol. 11, No. 2, pp. 46-49 (1964)
- 4) P. C. Müller (森沢)：安定性と行列，シュプリンガー・フェアラーク東京 (1989)
- 5) S. M. Joshi and S. Gupta: On a class of marginally stable positive-real systems; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 41, No. 1, pp. 152-155 (1996)