Hamilton-Jacobi 方程式に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の近似実現*

川田 昌克**・島津 尚充***・井上 和夫****

An Approximate Realization of Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Control Based on Hamilton-Jacobi Equation*

Masakatsu KAWATA**, Naomitsu SHIMAZU*** and Kazuo INOUE****

In this paper, a novel numerical approach of the Hamilton-Jacobi Equation (HJE) in the nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control problems is proposed. First of all, it is assumed that the solution of the HJE is an extended quadratic form, and a state-dependent Riccati Equation (sRE) is derived. Next, the solution of the sRE is approximated with a polynomial matrix by the least square method, and the approximated solution of the HJE is selected as the extended quadratic form approximately corresponding to this polynomial. Our proposal is applied to an inverted pendulum system, and its validity is shown through simulations as compared with the linear $\mathcal{H}_\infty$ control and the nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control based on the conventional methods.

1. はじめに

近年、線形システムに対する $\mathcal{H}_\infty$ 制御が非線形システムに拡張されつつあり¹⁾⁻⁸⁾、非構造的な不確かさ、構造的な不確かさに対するロバスト安定化やロバスト性能を有する外乱除去などを実現できることが明らかにされている⁹⁾⁻¹¹⁾。

非線形システムに対する $\mathcal{H}_\infty$ 制御（以下、非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御と呼ぶ）では、線形システムにおける Riccati 方程式（不等式）に相当する Hamilton-Jacobi 方程式（不等式）と呼ばれる偏微分方程式の正定値解を求める必要があるが、双線形システムの場合¹²⁾や厳密な線形化が可能な非線形システムの場合¹³⁾を除き、一般に、その解析

解を求めることは困難である。そこで、Taylor 級数展開に基づく方法（級数展開法）^{1),2),14),15)}、状態に依存した Riccati 方程式に基づく方法¹⁶⁾、ニューラルネットワークに基づく方法¹⁷⁾など、いくつかの近似解法が提案されており、とくに、多くの数値例、応用例では、級数展開法が用いられている^{14),11),18),5)}。しかしながら、級数展開法では、指定した次数より高次の項を全く考慮していないため、精度のよい近似解が得られないことがあり^{19),20)}、また、考慮する次数や状態の次元が増えると、得られる制御則がかなり複雑になってしまう^{11),18),19)}。一方、Laosuan らは、状態に依存した Riccati 方程式を考えることによって、精度のよい近似解が得られる場合があることを示しているが¹⁶⁾、評価関数に状態変数のすべての成分が含まれているため、一般化制御対象の係数行列が状態の一部のみに依存する場合でも、求解に多大な時間が必要である。

本論文では、以上のような問題を解決するため、まず、Hamilton-Jacobi 方程式の解を拡張 2 次形式²¹⁾に仮定することによって、状態に依存した Riccati 方程式を導出する。ついで、この状態に依存した Riccati 方程式の正定対称解を最小自乗法により k 次多項式で表し、この k 次多項式と近似的に一致するように拡張 2 次形式を決定することを提案する^{19),20)}。提案する手法では、一般化制御対象の係数行列を Taylor 級数展開せずそのまま

* 原稿受付 1997 年 8 月 26 日

** 舞鶴工業高等専門学校 電子制御工学科 Department of Control Engineering, Maizuru National College of Technology; 234 Aza Shiroya, Maizuru city, Kyoto 625-8511, JAPAN

*** 立命館大学 大学院 理工学研究科 The Graduate School of Science and Engineering, Ritsumeikan University; 1-1-1 Noji-Higashi, Kusatsu city, Shiga 525-8577, JAPAN

**** 立命館大学 理工学部 Faculty of Science and Engineering, Ritsumeikan University; 1-1-1 Noji-Higashi, Kusatsu city, Shiga 525-8577, JAPAN

Key Words: nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control, Hamilton-Jacobi equation, $\mathcal{L}_2$ gain, extended quadratic form, inverted pendulum.

用いるため、無限級数で表された Hamilton-Jacobi 方程式の指定された次数より高次の項を無視して近似解を求める級数展開法よりも精度のよい近似解が得られることが期待できる。また、提案する手法により近似解を求めると、一般化制御対象の係数行列が状態の一部のみに依存するとき、級数展開法と比べて制御則が簡単な形式となり、しかも、短時間で近似解を求めることができる。最後に、提案する手法に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御を倒立振子システムへ適用し、シミュレーションによる有効性の検証を行う。

本論文で使用する記号を以下に定義する⁵⁾。 $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^T \in \mathcal{R}^n$ が与えられたとき、 $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2}$ であり、また、 $\mathbf{x}^{[k]} \in \mathcal{R}^{n_k}$ ($n_k = n + k - 1$, C_k) の各成分を $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ と定義する。ただし、 k_i ($i = 1, \dots, n$) は、 $k = \sum_{i=1}^n k_i$ ($k_i \geq 0$) を満足する整数であり、 $\mathbf{x}^{[k]}$ の各要素は、辞書式順序で選ばれている。たとえば、 $n=3$, $k=2$ のとき、 $\mathbf{x}^{[2]} = [x_1^2 \ x_1 x_2 \ x_1 x_3 \ x_2^2 \ x_2 x_3 \ x_3^2]^T$ である。 $\mathbf{x}$ に関するべき級数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ が与えられたとき、 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ の $\mathbf{x}$ に関する i 次項を $\mathbf{f}^{[i]}(\mathbf{x})$ と記述する。 $\mathbf{x}$ の $\mathcal{L}_2$ ノルムは、 $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_2$ に対して、

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\int_{t_0}^{\infty} \|\mathbf{x}\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

と定義され、 $\|\mathbf{x}\|_2 \neq 0$ である $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_2$ の全体を $\mathcal{L}_2 / \{\mathbf{0}\}$ と表す。また、 $\sup_t \|\mathbf{x}\| \leq c$ (c は正定数) であるとき、 $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\infty^c$ と表す。

2. 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題とその可解条件

ここでは、非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を定義し、その可解条件について述べる。

非線形な一般化制御対象

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\mathbf{w} + \mathbf{G}_2(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{H}_1(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{J}_{11}(\mathbf{x})\mathbf{w} + \mathbf{J}_{12}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{x} \end{cases} \quad (2)$$

が与えられたとき、状態フィードバックによる非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を以下に定義する^{1),2),4)-6)}。ただし、 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$: 状態変数、 $\mathbf{w} \in \mathcal{R}^{m_1}$: 外生信号、 $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^{m_2}$: 操作量、 $\mathbf{z} \in \mathcal{R}^{p_1}$: 評価出力、 $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^{p_2}$: 観測量、 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{G}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{G}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{H}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{J}_{11}(\mathbf{x})$, $\mathbf{J}_{12}(\mathbf{x})$ は十分滑らかな既知行列である。

【定義 1】 正定数 γ が与えられたとき、(2) 式で表される非線形システム S を内部指数安定化し、かつ

$$\|\mathbf{z}\|_2 \leq \gamma \|\mathbf{w}\|_2 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty^c \quad (3)$$

となるような非線形状態フィードバック

$$\mathbf{C}: \mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

が存在するならば、それを求める問題を状態フィードバックによる非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題という。

簡単のため、本論文では、以下の仮定が成立しているものとする。

仮定 1 $\mathbf{J}_{11}(\mathbf{x}) = \mathbf{O}$ である。

仮定 2 正規化条件 $\mathbf{J}_{12}^T(\mathbf{x})\mathbf{J}_{12}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$ および直交条件 $\mathbf{H}_1^T(\mathbf{x})\mathbf{J}_{12}(\mathbf{x}) = \mathbf{O}$ が成立している。

このとき、非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の可解条件に関する以下の結果が知られている^{4),1),2)}。

【定理 1】 仮定 1, 2 が成立しているとき、Hamilton-Jacobi 方程式

$$\mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) = 0 \quad (5)$$

を満足する正定値関数 $\phi(\mathbf{x})$ および $\rho(\mathbf{x}) \geq \varepsilon \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ (ε : 正数) が $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の近傍で存在すれば、(2) 式の非線形システム S に対する非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題は可解である。ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) := & \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \\ & + \frac{1}{4} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{R}(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{x}) := & \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) := \mathbf{H}_1^T(\mathbf{x})\mathbf{H}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}) := & \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\mathbf{G}_1^T(\mathbf{x}) - \mathbf{G}_2(\mathbf{x})\mathbf{G}_2^T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

である。この条件を満足するとき、非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の解の一つは次式で与えられる。

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \mathbf{G}_2^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (7)$$

なお、仮定 1, 2 が成立していないときには、参考文献 5), 6) で示されているように、参考文献 23) などでの線形システムの結果を非線形システムへ拡張する必要がある。

3. 拡張 2 次形式を用いた非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の近似実現

定理 1 で示したように、非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御を実現するためには、(5) 式で表される Hamilton-Jacobi 方程式の正定値解を求める必要がある。しかしながら、一般に、Hamilton-Jacobi 方程式の解析解を得ることは困難であるため、ここでは、近似的にその数値解を求める手法を提案する。

3.1 状態に依存した Riccati 方程式の導出

(5) 式で表される Hamilton-Jacobi 方程式の解 $\phi(\mathbf{x})$ を拡張 2 次形式

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \Phi(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad \Phi(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) \quad (8) \quad \text{程式}$$

に仮定すると、その $\mathbf{x}$ で偏微分は、

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = 2\mathbf{x}^T \Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \quad (9)$$

となる²¹⁾。ただし、

$$\Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) := \Phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial x_1} \mathbf{x} \cdots \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial x_n} \mathbf{x} \right] \quad (10)$$

である。このとき、 $\mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ は、以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = & \mathbf{x}^T (\Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x})P(\mathbf{x}) + P^T(\mathbf{x})\Psi^T(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \\ & + \Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x})R(\mathbf{x})\Psi^T(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}))\mathbf{x} \end{aligned} \quad (11)$$

したがって、状態に依存した Riccati 方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{x})P(\mathbf{x}) + P^T(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}) \\ + \mathbf{X}(\mathbf{x})R(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{I} = \mathbf{O} \end{aligned} \quad (12)$$

の解 $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T(\mathbf{x}) > 0$ が $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ を含む領域 $\mathcal{U}$ で与えられたとき、 $\Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ となるように $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) > 0$ を定めることができれば、拡張 2 次形式で表された (8) 式は、 $\mathcal{U}$ において、Hamilton-Jacobi 方程式 (5) 式を満足する正定値解となる。しかしながら、一般に、 $\Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ となるような $\Phi(\mathbf{x})$ は存在しないため、 $\Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ と $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ が近似的に一致するように $\Phi(\mathbf{x})$ を決定する必要がある。たとえば、参考文献 16) では、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{(l)} (\neq \mathbf{o})$ に対する (12) 式の正定対称解 $\mathbf{X}_{(l)} := \mathbf{X}(\mathbf{x}_{(l)}) (l=1, \dots, m)$ を求め、評価関数

$$E := \sum_{l=1}^m \frac{1}{\|\mathbf{x}_{(l)}\|^2} \left\| \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_{(l)})}{\partial \mathbf{x}} - 2\mathbf{X}_{(l)}\mathbf{x}_{(l)} \right\|^2 \quad (13)$$

が最小となるように $\phi(\mathbf{x})$ を決定することを提案している。

3.2 状態に依存した Riccati 方程式の最小自乗近似解

ここでは、(12) 式で表される状態に依存した Riccati 方程式の正定対称解 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ を近似的に求めることを考える。

まず、(12) 式の正定対称解を以下の k 次多項式に仮定する。

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{X}}_0 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \bar{\mathbf{X}}_{i,j} x_j^{[i]} \quad (14)$$

ただし、 $\bar{\mathbf{X}}_0$ は (12) 式において $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ とした Riccati 方

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}_0 P(\mathbf{o}) + P^T(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{X}}_0 \\ + \bar{\mathbf{X}}_0 R(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{X}}_0 + Q(\mathbf{o}) + \varepsilon \mathbf{I} = \mathbf{O} \end{aligned} \quad (15)$$

の正定対称解、 $\bar{\mathbf{X}}_{i,j}$ は $n \times n$ の対称行列、 $x_j^{[i]}$ は $\mathbf{x}^{[i]}$ の j 番目の成分を表している。(14) 式のように $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ を表すと、 $\mathbf{X}(\mathbf{o})$ は $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ 近傍における線形化システムに対する解 $\bar{\mathbf{X}}_0$ に一致する。また、 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ の p 行 q 列成分 $X_{pq}(\mathbf{x})$ ($p=1, \dots, n, q=p, \dots, n$) は、

$$\begin{aligned} X_{pq}(\mathbf{x}) &= \bar{X}_{0,pq} + \beta_{pq}^T \xi(\mathbf{x}) \quad (16) \\ \beta_{pq} &:= [\beta_{1,pq} \cdots \beta_{N_1,pq}]^T \\ &= [\bar{X}_{1,1,pq} \cdots \bar{X}_{1,n_1,pq} \bar{X}_{2,1,pq} \\ &\quad \cdots \bar{X}_{2,n_2,pq} \cdots \bar{X}_{k,n_k,pq}]^T \\ \xi(\mathbf{x}) &:= [\xi_1(\mathbf{x}) \cdots \xi_{N_1}(\mathbf{x})]^T \\ &= [\mathbf{x}^T \mathbf{x}^{[2]T} \cdots \mathbf{x}^{[k]T}]^T \end{aligned}$$

のように書き表すことができる。ただし、 $N_1 = \sum_{i=1}^k n_i$ であり、 $\bar{X}_{0,pq}$ 、 $\bar{X}_{i,j,pq}$ はそれぞれ $\bar{\mathbf{X}}_0$ 、 $\bar{\mathbf{X}}_{i,j}$ の p 行 q 列成分を表す。

いま、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{(l)} (\neq \mathbf{o})$ ($l=1, \dots, m$) が与えられたとき、Riccati 方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(l)} P(\mathbf{x}_{(l)}) + P^T(\mathbf{x}_{(l)}) \mathbf{X}_{(l)} \\ + \mathbf{X}_{(l)} R(\mathbf{x}_{(l)}) \mathbf{X}_{(l)} + Q(\mathbf{x}_{(l)}) + \varepsilon \mathbf{I} = \mathbf{O} \end{aligned} \quad (17)$$

の正定対称解 $\mathbf{X}_{(l)}$ が求まったとし、 $\mathbf{X}(\mathbf{x}_{(l)})$ と $\mathbf{X}_{(l)}$ との誤差を次式で定義する。

$$e_{(l),pq} := X_{(l),pq} - X_{pq}(\mathbf{x}_{(l)}) \quad (18)$$

ただし、 $X_{(l),pq}$ は $\mathbf{X}_{(l)}$ の p 行 q 列成分である。 $w_{l,pq}$ を重みとしたとき、重み付き自乗誤差の総和

$$\mathcal{E}_{pq} := \sum_{l=1}^m w_{l,pq} e_{(l),pq}^2 \quad (19)$$

を最小にする β_{pq} は、

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{pq}}{\partial \beta_{i,pq}} = 0 \quad (i=1, \dots, N_1) \quad (20)$$

を満足する。したがって、 β_{pq} を

$$\begin{aligned} \beta_{pq} &= \left(\sum_{l=1}^m w_{l,pq} \mathbf{A}_l \right)^{-1} \sum_{l=1}^m \gamma_{l,pq} \quad (21) \\ \mathbf{A}_l &:= \xi(\mathbf{x}_{(l)}) \xi^T(\mathbf{x}_{(l)}) \in \mathcal{R}^{N_1 \times N_1} \\ \gamma_{l,pq} &:= \xi(\mathbf{x}_{(l)}) X_{(l),pq} \in \mathcal{R}^{N_1} \end{aligned}$$

のように定めることによって、重み付き自乗誤差の総和

を最小にすることができる。

3.3 Hamilton-Jacobi 方程式の近似解法

$\mathbf{X}(\mathbf{x})$ が対称行列であるのに対し、 $\Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ は、対称行列であるとは限らないため、一般に、 $\Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ となるような $\Phi(\mathbf{x})$ は存在しない。そこで、ここでは、 $\Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ と $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ が近似的に一致するように $\Phi(\mathbf{x})$ を決定することを考える。

拡張 2 次形式における $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x})$ を k 次多項式

$$\Phi(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{X}}_0 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \bar{\Phi}_{i,j} x_j^{[i]} \quad (22)$$

に仮定すると、 $\Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ は、次式のように表現できる。

$$\Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{X}}_0 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \bar{\Psi}_{i,j}(\bar{\beta}) x_j^{[i]} \quad (23)$$

ただし、 $\bar{\Psi}_{i,j}(\bar{\beta})$ は $n \times n$ の行列、 $\bar{\beta} \in \mathcal{R}^{N_2}$ ($N_2 = N_1 n(n+1)/2$) は $n \times n$ の対称行列 $\bar{\Phi}_{i,j}$ の p 行 q 列成分 $\bar{\Phi}_{i,j,pq}$ ($i=1, \dots, k, j=1, \dots, n_i, p=1, \dots, n, q=p, \dots, n$) を要素とするベクトルであり、たとえば、 $n=2, k=2$ のとき、以下ようになる。

$$\bar{\beta} = [\bar{\Phi}_{1,1,11} \ \bar{\Phi}_{1,2,11} \ \bar{\Phi}_{2,1,11} \ \bar{\Phi}_{2,2,11} \ \bar{\Phi}_{2,3,11} \ \bar{\Phi}_{1,1,12} \ \bar{\Phi}_{1,2,12} \ \bar{\Phi}_{2,1,12} \ \bar{\Phi}_{2,2,12} \ \bar{\Phi}_{2,3,12} \ \bar{\Phi}_{1,1,22} \ \bar{\Phi}_{1,2,22} \ \bar{\Phi}_{2,1,22} \ \bar{\Phi}_{2,2,22} \ \bar{\Phi}_{2,3,22}]^T$$

また、 $\bar{\mathbf{X}}_{i,j,pq}$ および $\bar{\Psi}_{i,j,pq}(\bar{\beta})$ ($i=1, \dots, k, j=1, \dots, n_i, p=1, \dots, n, q=1, \dots, n$) を要素として持つベクトル $\bar{\gamma} \in \mathcal{R}^{N_3}$ および $\bar{\alpha}(\bar{\beta}) \in \mathcal{R}^{N_3}$ をそれぞれ

$$\bar{\gamma} := [\bar{\gamma}_1 \ \dots \ \bar{\gamma}_{N_3}]^T \quad (24)$$

$$\bar{\alpha}(\bar{\beta}) := [\bar{\alpha}_1(\bar{\beta}) \ \dots \ \bar{\alpha}_{N_3}(\bar{\beta})]^T \quad (25)$$

のように定義する。ただし、 $\bar{\Psi}_{i,j,pq}(\bar{\beta})$ は $\bar{\Psi}_{i,j}(\bar{\beta})$ の p 行 q 列成分を表し、 $N_3 = N_1 n^2$ である。たとえば、 $n=2, k=2$ のとき、 $\bar{\gamma}$ は、

$$\bar{\gamma} = [\bar{\mathbf{X}}_{1,1,11} \ \bar{\mathbf{X}}_{1,2,11} \ \bar{\mathbf{X}}_{2,1,11} \ \bar{\mathbf{X}}_{2,2,11} \ \bar{\mathbf{X}}_{2,3,11} \ \bar{\mathbf{X}}_{1,1,12} \ \bar{\mathbf{X}}_{1,2,12} \ \bar{\mathbf{X}}_{2,1,12} \ \bar{\mathbf{X}}_{2,2,12} \ \bar{\mathbf{X}}_{2,3,12} \ \bar{\mathbf{X}}_{1,1,21} \ \bar{\mathbf{X}}_{1,2,21} \ \bar{\mathbf{X}}_{2,1,21} \ \bar{\mathbf{X}}_{2,2,21} \ \bar{\mathbf{X}}_{2,3,21} \ \bar{\mathbf{X}}_{1,1,22} \ \bar{\mathbf{X}}_{1,2,22} \ \bar{\mathbf{X}}_{2,1,22} \ \bar{\mathbf{X}}_{2,2,22} \ \bar{\mathbf{X}}_{2,3,22}]^T$$

であり、 $\bar{\alpha}(\bar{\beta})$ についても同様である。このとき、 $\bar{\beta}$ に関する N_3 個の 1 次方程式

$$\bar{\alpha}_i(\bar{\beta}) = \bar{\gamma}_i \quad (i=1, \dots, N_3) \quad (26)$$

を満足する $\bar{\beta}$ が存在すれば、すなわち、 $\bar{\Psi}_{i,j}(\bar{\beta}) = \bar{\mathbf{X}}_{i,j}$ ($i=1, \dots, k, j=1, \dots, n_i$) を満足する $\bar{\beta}$ が存在すれば、 $\Psi(\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ となるが、 $N_3 \geq N_2$ である

ため、一般に、このような $\bar{\beta}$ は存在しない。そこで、本論文では、 $\mathcal{J} := \|\bar{\alpha}(\bar{\beta}) - \bar{\gamma}\|$ を最小にする $\bar{\beta}$ が

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \bar{\beta}} = 0 \quad (27)$$

によって定まることに注目し、次式のように $\bar{\beta}$ を決定する。

$$\bar{\beta} = \bar{\mathbf{A}}^+ \bar{\gamma} \quad (28)$$

ただし、 $\bar{\mathbf{A}}^+$ は $\bar{\mathbf{A}}$ の疑似逆行列、 $\bar{\mathbf{A}}$ は $\bar{\mathbf{A}}\bar{\beta} = \bar{\alpha}(\bar{\beta})$ を満足する $N_3 \times N_2$ の行列であり、一意に定まる。たとえば、 $n=2, k=2$ のとき、 $n_1=2, n_2=3, N_1=5, N_2=15, N_3=20$ であり、 $\bar{\mathbf{A}}$ の p 行 q 列成分 $\bar{a}_{p,q}$ ($p=1, \dots, N_3, q=1, \dots, N_2$) は、Table 1 のようになる。なお、Table 1 に示していない $\bar{\mathbf{A}}$ の成分は、すべて零である。

Table 1 Components of $\bar{\mathbf{A}}$ ($n=2, k=2$)

$\bar{a}_{1,1}=1.5$	$\bar{a}_{8,4}=0.5$	$\bar{a}_{15,10}=1$
$\bar{a}_{2,2}=1$	$\bar{a}_{8,8}=1$	$\bar{a}_{15,14}=0.5$
$\bar{a}_{2,6}=0.5$	$\bar{a}_{9,5}=1$	$\bar{a}_{16,7}=0.5$
$\bar{a}_{3,3}=2$	$\bar{a}_{9,9}=1.5$	$\bar{a}_{16,11}=1$
$\bar{a}_{4,4}=1.5$	$\bar{a}_{10,10}=2$	$\bar{a}_{17,12}=1.5$
$\bar{a}_{4,8}=1$	$\bar{a}_{11,6}=1.5$	$\bar{a}_{18,9}=0.5$
$\bar{a}_{5,5}=1$	$\bar{a}_{12,7}=1$	$\bar{a}_{18,13}=1$
$\bar{a}_{5,9}=0.5$	$\bar{a}_{12,11}=0.5$	$\bar{a}_{19,10}=1$
$\bar{a}_{6,2}=0.5$	$\bar{a}_{13,8}=2$	$\bar{a}_{19,14}=1.5$
$\bar{a}_{6,6}=1$	$\bar{a}_{14,9}=1.5$	$\bar{a}_{20,15}=2$
$\bar{a}_{7,7}=1.5$	$\bar{a}_{14,13}=0.5$	

(注意 1) 一般化制御対象の係数行列が状態の一部のみに依存するとき、 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ を係数行列が依存する状態のみに依存した形式とすると、(12) 式もその状態のみに依存する。したがって、このようなとき、考慮すべき $\mathbf{x}_{(l)}$ の数が少なくて済むため、求解に要する時間を短縮できる。それに対し、参考文献 16) の手法では、評価関数 (13) 式の分母に $\mathbf{x}_{(l)}$ 、分子に $\mathbf{X}_{(l)} \mathbf{x}_{(l)}$ が含まれているため、係数行列が状態の一部のみに依存するときでも考慮すべき $\mathbf{x}_{(l)}$ の数は変わらない。

(注意 2) 一般化制御対象の係数行列が状態の一部のみに依存するとき、 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ をその状態のみに依存した形式とすると、制御則 $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ が級数展開法と比べて簡単な形式となる場合がある。

(注意 3) 参考文献 8) では、 $\partial \phi(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}^T = 2\mathbf{x}^T \mathbf{X}(\mathbf{x})$ を満足する $\phi(\mathbf{x})$ が存在すると仮定しているが、このような $\phi(\mathbf{x})$ が存在するための条件はかなり厳しく、現実

的でない。

(注意 4) 一般化制御対象の係数行列が $\mathbf{x}$ に関する多項式で表されているとき, $\mathbf{x}_j^{[i]}$ をスケジューリングパラメータとした有限個の線形行列不等式を用いることによって, 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御を実現することも考えられる^{22), 24)}.

4. 倒立振り子システムへの応用

ここでは, 提案する手法に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の有効性を検証するため, 倒立振り子システムへの応用を検討し, シミュレーションによって, 線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御, 級数展開法および Laosuwan らの手法に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御との比較を行う。

4.1 数学モデル

Fig. 1 に示す倒立振り子システムの数学モデルは, 状態変数を $\mathbf{x}_p := [x_{p1} \ x_{p2} \ x_{p3} \ x_{p4}]^T = [r \ \dot{r} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$, 入力を $u_p = v$ とした次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}_p(\mathbf{x}_p)\mathbf{x}_p + \mathbf{B}_p(\mathbf{x}_p)u_p \\ \mathbf{A}_p(\mathbf{x}_p) &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}(\mathbf{x}_p) & a_{23}(\mathbf{x}_p) & a_{24}(\mathbf{x}_p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42}(\mathbf{x}_p) & a_{43}(\mathbf{x}_p) & a_{44}(\mathbf{x}_p) \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_p(\mathbf{x}_p) &:= [0 \ b_2(\mathbf{x}_p) \ 0 \ b_4(\mathbf{x}_p)]^T \end{aligned} \quad (29)$$

ただし, $\mathbf{A}_p(\mathbf{x}_p)$, $\mathbf{B}_p(\mathbf{x}_p)$ の各要素は

$$\begin{aligned} a_{22}(\mathbf{x}_p) &= -\frac{\mu_1 \bar{J}}{\alpha_1(x_{p3})} \\ a_{23}(\mathbf{x}_p) &= -\frac{(m\ell)^2 g \cos x_{p3} \alpha_2(x_{p3})}{\alpha_1(x_{p3})} \\ a_{24}(\mathbf{x}_p) &= \frac{\mu_2 m \ell \cos x_{p3} + \bar{J} m \ell x_{p3} x_{p4} \alpha_2(x_{p3})}{\alpha_1(x_{p3})} \\ a_{42}(\mathbf{x}_p) &= \frac{\mu_1 m \ell \cos x_{p3}}{\alpha_1(x_{p3})} \\ a_{43}(\mathbf{x}_p) &= \frac{\bar{M} m \ell g \alpha_2(x_{p3})}{\alpha_1(x_{p3})} \\ a_{44}(\mathbf{x}_p) &= -\frac{\mu_2 \bar{M} + (m\ell)^2 x_{p3} x_{p4} \cos x_{p3} \alpha_2(x_{p3})}{\alpha_1(x_{p3})} \end{aligned}$$

Fig. 1 Inverted pendulum system

$$\begin{aligned} b_2(\mathbf{x}_p) &= \frac{k_f \bar{J}}{\alpha_1(x_{p3})}, \quad b_4(\mathbf{x}_p) = -\frac{k_f m \ell \cos x_{p3}}{\alpha_1(x_{p3})} \\ \alpha_1(x_{p3}) &= \bar{M} \bar{J} - (m \ell \cos x_{p3})^2, \quad \alpha_2(x_{p3}) = \frac{\sin x_{p3}}{x_{p3}} \\ \bar{M} &= M + m, \quad \bar{J} = J + m \ell^2 \end{aligned}$$

であり, また, r [m]: 台車の変位, θ [rad]: 振子の角度, v [V]: アンプに加える電圧, M [kg]: 台車の等価質量, m [kg]: 振子の質量, ℓ [m]: 軸から振子の重心までの距離, J [kg·m²]: 振子の重心まわりの慣性モーメント, μ_1 [kg/s]: 台車駆動系の等価粘性摩擦係数, μ_2 [kg·m²/s]: 軸の粘性摩擦係数, k_f [N/V]: 力/電圧変換係数, g [m/s²]: 重力加速度である. 本論文で用いた倒立振り子システムの物理定数 (ノミナル値) を Table 2 に示す¹¹⁾.

Table 2 Parameters of an inverted pendulum (nominal values)

$M = 4.40$	$\mu_1 = 19.2$	$k_f = 20.1$
$m = 0.100$	$\mu_2 = 4.90 \times 10^{-4}$	$g = 9.81$
$\ell = 0.115$	$J = 2.14 \times 10^{-3}$	

4.2 問題設定

Fig. 2 に示す LQ 型の非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を考えると, 一般化制御対象は, 以下のようになる¹⁸⁾.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}) & \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{G}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p(\mathbf{x}_p) & \mathbf{B}_p(\mathbf{x}_p) & \mathbf{B}_p(\mathbf{x}_p) \\ \mathbf{Q}_p^{\frac{1}{2}} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & 0 & R_p^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

ただし, $\mathbf{x} := [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = \mathbf{x}_p^T$, $u := u_p$, $\mathbf{z} := [z_1 \ z_2]^T$ であり, また, $\mathbf{Q}_p \geq 0$, $R_p > 0$ はそれぞれ $\mathbf{x}$, u に対する重みである. 特に, $R_p = 1$ とした場合, 2. で述べた仮定 1, 2 が満足されることに注意されたい。

Fig. 2 LQ type $\mathcal{H}_\infty$ control problem

4.3 設計例

級数展開法^{1),2),14),15)}, Laosuwan らの手法¹⁶⁾および

3. で提案した手法を用いることによって, $\rho(\mathbf{x}) = \varepsilon \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ とした Hamilton-Jacobi 方程式 (5) 式の近似解を求め, 非線形状態フィードバックを設計した. ただし, 重みを $\mathbf{Q}_p = \text{diag}\{25, 0, 1, 0\}$, $R_p = 1$ ように選び, また, $\gamma = 2$, $\varepsilon = 10^{-4}$ とした.

4.3.1 級数展開法

(30) 式のように一般化制御対象を選んだとき, 非線形関数 $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ 近傍で Taylor 級数展開すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{x}) &= \mathbf{P}(\mathbf{o}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}^{[2i]}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}) &= \mathbf{R}(\mathbf{o}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{R}^{[2i]}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

となる. いま, Hamilton-Jacobi 方程式の解を

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{X}}_0 \mathbf{x} + \phi^{[4]}(\mathbf{x}) \quad (31)$$

と仮定すると, $\rho(\mathbf{x}) = \varepsilon \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ とした Hamilton-Jacobi 方程式 (5) 式の左辺 $\mathcal{H}_L(\mathbf{x}) := \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}), \mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x})$ は,

$$\mathcal{H}_L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_L^{[2i]}(\mathbf{x}) \quad (32)$$

のように無限級数となる¹¹⁾. たとえば,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_L^{[2]}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T (\bar{\mathbf{X}}_0 \mathbf{P}(\mathbf{o}) + \mathbf{P}^T(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{X}}_0 \\ &\quad + \bar{\mathbf{X}}_0 \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{X}}_0 + \mathbf{Q} + \varepsilon \mathbf{I}) \mathbf{x} \\ \mathcal{H}_L^{[4]}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \phi^{[4]}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} (\mathbf{P}(\mathbf{o}) + \mathbf{R}(\mathbf{o}) \bar{\mathbf{X}}_0) \mathbf{x} \\ &\quad + \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{X}}_0 (2\mathbf{P}^{[2]}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}^{[2]}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{X}}_0) \mathbf{x} \end{aligned}$$

である. そこで, $\mathcal{H}_L^{[2]}(\mathbf{x}) = 0$ となるように $\bar{\mathbf{X}}_0$ を代数 Riccati 方程式 (15) 式の正定対称解に選び, また, $\mathcal{H}_L^{[4]}(\mathbf{x}) = 0$ となるように $\phi^{[4]}(\mathbf{x})$ を定め, 非線形状態フィードバック (7) 式を導出した. つぎに, (7) 式を $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ 近傍で Taylor 級数展開すると, 3 次非線形状態フィードバック

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cong \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{k}^{[3]}(\mathbf{x}) \quad (33)$$

における係数パラメータは, Table 3, 4 に示すような値となった. ただし, k_i は x_i の係数, k_{ijk} は $x_i x_j x_k$ の

Table 3 Feedback gain $\mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$

$k_1 = 5.77 \times 10^0$	$k_3 = 1.73 \times 10^1$
$k_2 = 5.58 \times 10^0$	$k_4 = 2.99 \times 10^0$

Table 4 Parameters of $\mathbf{k}^{[3]}(\mathbf{x})$ (series expansion method)

$k_{111} = -5.92 \times 10^{-16}$	$k_{222} = -1.11 \times 10^{-1}$
$k_{112} = -1.50 \times 10^{-1}$	$k_{223} = -1.11 \times 10^0$
$k_{113} = -1.04 \times 10^0$	$k_{224} = -1.82 \times 10^{-1}$
$k_{114} = -1.46 \times 10^{-1}$	$k_{233} = -1.05 \times 10^0$
$k_{122} = -2.23 \times 10^{-1}$	$k_{234} = -1.75 \times 10^{-1}$
$k_{123} = -1.94 \times 10^0$	$k_{244} = -7.74 \times 10^{-2}$
$k_{124} = -2.94 \times 10^{-1}$	$k_{333} = 1.18 \times 10^1$
$k_{133} = -1.39 \times 10^0$	$k_{334} = 4.76 \times 10^0$
$k_{134} = 3.93 \times 10^{-1}$	$k_{344} = 4.37 \times 10^{-1}$
$k_{144} = -5.90 \times 10^{-2}$	$k_{444} = -7.64 \times 10^{-4}$

係数を表す.

4.3.2 Laosuwan らの手法

Hamilton-Jacobi 方程式の解を (31) 式の形式に仮定したとき, 評価関数 (13) 式は, 次式のようになる.

$$\begin{aligned} E &:= \sum_{l=1}^m \frac{1}{\|\mathbf{x}_{(l)}\|^2} \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{c}}^T \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}_{(l)})}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{v}_{(l)} \right\|^2 \\ \mathbf{v}_{(l)} &:= 2(\mathbf{X}_{(l)} - \bar{\mathbf{X}}_0) \mathbf{x}_{(l)}, \quad \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^{[4]} \end{aligned} \quad (34)$$

したがって, (34) 式を最小化するような $\phi^{[4]}(\mathbf{x}) := \tilde{\mathbf{c}}^T \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$ の係数ベクトル $\tilde{\mathbf{c}}$ が次式のように定まる¹⁶⁾.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}} &= \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{b}} \\ \tilde{\mathbf{A}} &:= \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{p1} & \cdots & \tilde{a}_{pq} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} := \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_p \end{bmatrix} \\ \tilde{a}_{ij} &= \sum_{l=1}^m \frac{1}{\|\mathbf{x}_{(l)}\|^2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_i(\mathbf{x}_{(l)})}{\partial x_k} \frac{\partial \eta_j(\mathbf{x}_{(l)})}{\partial x_k} \\ \tilde{b}_i &= \sum_{l=1}^m \frac{1}{\|\mathbf{x}_{(l)}\|^2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_i(\mathbf{x}_{(l)})}{\partial x_k} v_{(l)i} \\ &\quad (i=1, \dots, p, j=1, \dots, q) \end{aligned} \quad (35)$$

ただし, $n=4$, $p=q=35$ であり, $\eta_i(\mathbf{x})$, $v_{(l)i}$ は, それぞれ $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}_{(l)}$ の i 番目の成分を表す. そこで, $\mathbf{x}_{(l)}$ ($l=1, \dots, 11^4-1$) の集合 $\mathcal{X}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{[i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4]^T \mid i_1 = -4, -3.2, \dots, 4, \\ &\quad i_2 = -15, -12, \dots, 15, \\ &\quad i_3 = -1, -0.8, \dots, 1, \\ &\quad i_4 = -15, -12, \dots, 15, \mathbf{x}_{(l)} \neq \mathbf{o}\} \end{aligned}$$

のように選び, (35) 式にしたがって $\tilde{\mathbf{c}}$ を定め, 非線形状態フィードバック (7) 式を導出した. また, (7) 式を $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ 近傍で Taylor 級数展開すると, 3 次非線形状態フィード

Table 5 Parameters of $k^{[3]}(x)$ (Laosuwan's method)

$k_{111} = 1.60 \times 10^{-1}$	$k_{222} = 1.11 \times 10^{-2}$
$k_{112} = 1.60 \times 10^{-2}$	$k_{223} = -6.66 \times 10^{-4}$
$k_{113} = -1.70 \times 10^{-1}$	$k_{224} = -3.01 \times 10^{-3}$
$k_{114} = 1.52 \times 10^{-2}$	$k_{233} = -9.71 \times 10^0$
$k_{122} = 1.00 \times 10^{-2}$	$k_{234} = -1.87 \times 10^{-2}$
$k_{123} = 1.26 \times 10^{-2}$	$k_{244} = 3.87 \times 10^{-2}$
$k_{124} = -4.09 \times 10^{-3}$	$k_{333} = 2.59 \times 10^0$
$k_{133} = -1.67 \times 10^1$	$k_{334} = -4.54 \times 10^0$
$k_{134} = -5.23 \times 10^{-2}$	$k_{344} = -8.99 \times 10^{-2}$
$k_{144} = 1.02 \times 10^{-1}$	$k_{444} = 3.39 \times 10^{-2}$

バック (33) 式における係数パラメータは, Table 3, 5 に示すような値となった.

4.3.3 提案する手法

3.2 の手順にしたがって近似解を求めるため, まず, 一般化制御対象の係数行列 (30) 式が x_3, x_4 のみに依存していることを考慮し, 状態に依存した Riccati 方程式 (12) 式の解 $X(x)$ を x_3, x_4 のみに依存した 2 次多項式

$$X(x) = \bar{X}_0 + \bar{X}_{1,3}x_3 + \bar{X}_{1,4}x_4 + \bar{X}_{2,8}x_3^2 + \bar{X}_{2,9}x_3x_4 + \bar{X}_{2,10}x_4^2 \quad (36)$$

に仮定した. このとき, 状態に依存した Riccati 方程式 (12) 式は x_1, x_2 に依存しないため, (36) 式を求める際に x_1, x_2 を考慮する必要はない. そこで, ここでは, $x_{(l)} (l=1, \dots, 11^2-1)$ の集合 $\mathcal{X}$ を以下のように選んだ.

$$\mathcal{X} = \{[\star \star i_3 j_4]^T \mid i_3 = -1, -0.8, \dots, 1, \\ i_4 = -15, -12, \dots, 15, x_{(l)} \neq \mathbf{o}\}$$

ただし, $\star$ は任意であることを示している. このとき, (19) 式における重みを $w_{l,pq} = 1$ ($p=1, \dots, 4, q=p, \dots, 4$) とし, (21) 式により β_{pq} ($p=1, \dots, 4, q=p, \dots, 4$) を求めると, (36) 式の係数行列が定まった. また, $\bar{X}_{1,3}, \bar{X}_{1,4}, \bar{X}_{2,9}$ は, $\bar{X}_{2,8}, \bar{X}_{2,10}$ と比べて十分小さくなったため, それらを見捨てることによって, (36) 式を次式のように近似した.

$$X(x) \cong \bar{X}_0 + \bar{X}_{2,8}x_3^2 + \bar{X}_{2,10}x_4^2 \quad (37)$$

つぎに, (28) 式により $\bar{\beta}$ を求めると,

$$\Phi(x) = \bar{X}_0 + \sum_{j=1}^{10} \bar{\Phi}_{2,j}x_j^{[2]} \quad (38)$$

となり, その結果, $\rho(x) = \varepsilon x^T x$ とした Hamilton-Jacobi 方程式 (5) 式の解は, (31) 式の形式となった. 級数展開法

の場合と同様, 非線形状態フィードバック (7) 式を $x = \mathbf{o}$ 近傍で Taylor 級数展開し, 3 次非線形状態フィードバック (33) 式を導出すると, $k(x)$ の係数パラメータの値が Table 3, 6 のように定まった. ただし, Table 6 に示していない k_{ijk} の値は零である.

Table 6 Parameters of $k^{[3]}(x)$ (proposed method)

$k_{114} = -2.09 \times 10^{-3}$	$k_{234} = -2.32 \times 10^{-2}$
$k_{124} = -2.77 \times 10^{-3}$	$k_{244} = -6.86 \times 10^{-3}$
$k_{133} = -4.56 \times 10^0$	$k_{333} = 1.15 \times 10^1$
$k_{134} = -3.53 \times 10^{-2}$	$k_{334} = 3.67 \times 10^0$
$k_{144} = -1.13 \times 10^{-2}$	$k_{344} = -5.35 \times 10^{-2}$
$k_{224} = -9.69 \times 10^{-4}$	$k_{444} = -7.33 \times 10^{-3}$
$k_{233} = -2.49 \times 10^0$	

この例の場合, $x^{[3]}$ の次元が 20 であるのに対し, 提案する手法における $k^{[3]}(x)$ の項数は, それより 7 個少ない 13 個となった. これは, 一般化制御対象の係数行列 (30) 式が状態の一部である x_3, x_4 にのみ依存しているためであり, その結果, 提案する手法で導出される $k^{[3]}(x)$ は, 級数展開法や Laosuwan らの手法により導出されるそれと比べて簡単な形式となっている. さらに, 係数パラメータの値が 10^{-1} よりも小さい項を見捨てる, 3 次非線形状態フィードバックにおける $k^{[3]}(x)$ は, 次式に示すように, かなり簡単な形式となる.

$$k^{[3]}(x) \cong (k_{133}x_1 + k_{233}x_2 + k_{333}x_3 + k_{334}x_4)x_3^2 \quad (39)$$

また, Laosuwan らの手法では, (34) 式を評価関数としているため, 3.3 の注意 1 で述べたように, $x_{(l)}$ の集合 $\mathcal{X}$ における i_1, i_2 を任意とすることができない. その結果, Laosuwan らの手法を用いた場合, 提案する手法を用いた場合と比べて, 求解に多大な時間を要してしまう. この例の求解には, 制御系設計用 CAD である the MathWorks 社の MATLAB for Windows を利用し, NEC 社のパーソナルコンピュータ PC-9821 V200 (CPU: Intel 社製 MMX Pentium 200 [MHz], メモリ: 40 [Mbyte]) で実行したが, Laosuwan らの手法では, 求解に約 1.5 時間を要した. それに対し, 提案する手法では, $\bar{A}$ をあらかじめ与えた場合, わずか 20 秒程度で解が求まった.

4.4 シミュレーション結果

提案する手法の有効性を示すため, シミュレーションによって, 以下に示す制御法を比較した.

(a) 線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御: $u = Kx$

- (b) 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御 (級数展開法): $u = Kx + k^{[3]}(x)$
 (c) 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御 (Laosuwan らの手法): $u = Kx + k^{[3]}(x)$
 (d) 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御 (提案する手法): $u = Kx + k^{[3]}(x)$
- ただし, 提案する手法においては, (39) 式のように簡略化した $k^{[3]}(x)$ を用いた. m, ℓ, J をそれぞれノミナル値の 1.4, 1.4, 1.4^3 倍であるとして, シミュレーションを行った結果を Fig. 3, 4 に示す.

Fig. 3 は, 振子の初期角度 $\theta(0)$ を 0.6 [rad] とした場合のシミュレーション結果である. この場合, m, ℓ, J が変動しているにもかかわらず, いずれの制御法を用いても, 安定化することができた. また, 線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御と非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御を比べると, 線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の方が振動的な応答となっていることがわかる. なお, 安定化可能な最大初期角度は, 線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御では $\theta(0) = 0.629$ [rad], 級数展開法に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御では $\theta(0) = 0.980$ [rad], Laosuwan らの手法に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御では $\theta(0) = 0.816$ [rad], 提案する手法に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御では

Fig. 3 Simulation results for $\theta(0) = 0.6$ [rad]

Fig. 4 Simulation results for $\theta(0) = 0.9$ [rad]

$\theta(0) = 1.31$ [rad] 程度であった. $\theta(0) = 0.9$ [rad] とした場合のシミュレーション結果を Fig. 4 に示す.

以上のシミュレーション結果より, この数値例の場合, 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御は, いずれの手法を用いても幅広い動作領域で非線形性に対処できているため, 線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御と比べて安定度の高い良好な結果が得られることが確認できた. とくに, 提案する手法に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御は, かなり簡単な形式の制御則であるにもかかわらず, 級数展開法や Laosuwan らの手法に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御よりも良好な制御結果が得られた.

級数展開法では, $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ を無限級数で表し, また, Hamilton-Jacobi 方程式の解を k 次多項式に仮定することによって, 指定された次数までの $\mathcal{H}_L(x)$ (数値例では, $\mathcal{H}_L^{[2]}(x)$, $\mathcal{H}_L^{[4]}(x)$) を完全に零とすることができる. しかしながら, 級数展開法では, 指定された次数よりも高次の項の影響が全く無視されており, この無視された $\mathcal{H}_L(x)$ の高次の項が近似解の精度に悪影響を及ぼしていると考えられる. それに対し, 提案する手法

では、級数展開法のように $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ を Taylor 級数展開することはせずにそのまま扱うことにより、評価関数 (19) 式を最小化する $X(x)$ を決定しているため、級数展開法よりもよい結果が得られている。

今回示した数値例では、Laosuwan らの手法を用いた場合、級数展開法や提案する手法と比べてよい結果が得られなかったが、 $\phi(x)$ の形式や $x_{(l)}$ の与え方を工夫すれば、制御性能が向上する可能性がある。さらに、 $\phi(x)$ を簡単な形式に仮定すれば、提案する手法と同様に、制御則が級数展開法よりも簡単な形式となる。なお、 $\phi(x)$ の形式を提案する手法と同様に $\phi(x) = x^T X(x)x$ ($X(x)$ は (36) 式の形式) として近似解を求めてみたが、このとき得られた簡単な形式の制御則ではよい制御結果が得られなかった。

5. おわりに

本論文では、Hamilton-Jacobi 方程式の解を拡張 2 次形式に仮定することによって、非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御を近似的に実現することを提案した。提案する手法では、まず、状態に依存した Riccati 方程式を導出し、その解を最小自乗法により k 次多項式で近似した。ついで、この k 次多項式と Hamilton-Jacobi 方程式の解を近似的に一致させるため、疑似逆行列を用いて拡張 2 次形式を決定した。

提案する手法に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の有効性は、倒立振り子システムへ応用したシミュレーションによって検証した。本論文で示した数値例の場合、一般化制御対象の係数行列が状態の一部にのみ依存しているため、提案する手法によって得られる制御則は、かなり簡単な形式となった。また、Laosuwan らの手法と比較して、求解に要する時間を大幅に短縮することができた。それにもかかわらず、提案する手法に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御は、線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御や級数展開法や Laosuwan らの手法に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御よりも良好な制御結果が得られた。

本論文で示した数値例や参考文献 (19), (20) で示されている数値例からわかるように、提案する手法を用いると、級数展開法と比較して精度のよい近似解が得られることが期待できる。とくに、一般化制御対象の係数行列が状態の一部にのみ依存するとき、提案する手法は、簡単な形式の制御則を短時間で求めることができ、これまでに提案されている級数展開法や Laosuwan らの手法よりも実用的な近似解法であると考えられる。

末筆ながら、日頃から討論して頂いている大阪工業大学工学部電子工学科大場和久講師ならびに貴重なご指摘を賜りました査読者の方々に感謝致します。

参考文献

1) A. J. van der Schaft: $\mathcal{L}_2$ -gain analysis of nonlin-

- ear systems and nonlinear state feedback $\mathcal{H}_\infty$ control; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, No. 6, pp. 770-784 (1992)
- 2) A. J. van der Schaft: Nonlinear state space $\mathcal{H}_\infty$ control theory; *Perspectives in Contr.* (H. L. Trenteleman and J. C. Willems eds.), *Birkhäuser, Series: Progress in Syst. and Contr., the 2nd ECC, Groningen* (1993)
- 3) A. Isidori and A. Astolfi: Disturbance attenuation and $\mathcal{H}_\infty$ -control via measurement feedback in nonlinear systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, No. 9, pp. 1283-1293 (1992)
- 4) 井村: 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御 — 線形系の $\mathcal{H}_\infty$ 制御は非線形系にどこまで拡張可能か — ; 計測と制御, Vol. 34, No. 3, pp. 188-195 (1995)
- 5) 井村: 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御 — 理論と応用 — ; 第 35 回 SICE 制御理論部会第 9 回講演会資料 (1996)
- 6) J. Imura, T. Sugie and T. Yoshikawa: A Hamilton-Jacobi inequality approach to the strict $\mathcal{H}_\infty$ control problem of nonlinear systems; *Automatica*, Vol. 32, No. 4, pp. 645-650 (1996)
- 7) W. M. Lu and J. C. Doyle: $\mathcal{H}_\infty$ control of nonlinear systems via output feedback: controller parameterization; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 39, No. 12, pp. 2517-2521 (1994)
- 8) W. M. Lu and J. C. Doyle: $\mathcal{H}_\infty$ control of nonlinear systems: A convex characterization; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, No. 9, pp. 1668-1675 (1995)
- 9) J. Imura, H. Maeda, T. Sugie and T. Yoshikawa: Robust stabilization of nonlinear systems by $\mathcal{H}_\infty$ state feedback; *Syst. & Contr. Letters*, Vol. 24, pp. 103-114 (1995)
- 10) 中, 田村: 不確かさを有する非線形系のロバスト $\mathcal{H}_\infty$ 制御; 計測自動制御学会論文集, Vol. 31, No. 3, pp. 408-410 (1995)
- 11) 川田, 島津, 井上: 構造的な不確かさを考慮した非線形システムの $\mathcal{H}_\infty$ 制御とその倒立振り子への応用; 第 19 回 DST シンポジウム資料, pp. 239-244 (1996)
- 12) 三平, 久保田: 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の多自由度構造物の振動制御への応用可能性; 第 23 回制御理論シンポジウム資料, pp. 301-306 (1994)
- 13) 石井, 申, 田村: 厳密な線形化手法を用いた Hamilton-Jacobi 不等式の解法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 32, No. 7, pp. 1135-1137 (1996)
- 14) W. Kang, P. K. De and A. Isidori: Flight control in a windshear via nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ methods; *Proc. of the 31st CDC*, pp. 1135-1142 (1992)
- 15) J. Huang and C. Lin: Numerical approach to computing nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control laws; *J. of Guidance, Contr. and Dynamics*, Vol. 16, No. 5, pp. 989-994 (1995)
- 16) P. Laosuwan, M. Sampei, M. Koga and E. Shimizu: A numerical approach of Hamilton-Jacobi-Isaacs equation in nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control problems; 第 25 回制御理論シンポジウム資料, pp. 335-340 (1996)
- 17) 楊, 申, 田村: ニューラルネットワークに基づいた非線形 $\mathcal{H}_\infty$ コントローラの近似実現; 計測自動制御学会論文集, Vol. 32, No. 10, pp. 1425-1431 (1996)
- 18) 鈴木, 川田, 亀井, 井上: 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 状態フィードバックによる Ball and Beam System の制御; 第 39 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, pp. 17-18 (1995)
- 19) 川田, 島津, 井上: 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の近似実現とその倒立振り子システムへの応用; 1997 年度 SICE 関西支部シンポジ

- ウム「ダイナミカルシステムのモデリングと制御」講演論文集, pp. 97-100 (1997)
- 20) 島津, 川田, 井上: 拡張 2 次形式を用いた非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の近似実現; 第 40 回自動制御連合講演会前刷, pp. 257-258 (1997)
- 21) 佐々木, 内田: 拡張 2 次形式リアプノフ関数による非線形システムの $\mathcal{L}_2$ ゲイン解析 — 行列不等式による凸解析アプローチ —; 計測自動制御学会論文誌, Vol. 33, No. 5, pp. 352-358 (1997)
- 22) 渡辺, 内田, 藤田: 有限個の LMI 条件に基づいたスケジューリングパラメータを持つ線形システムの解析; 第 24 回制御理論シンポジウム資料, pp. 9-14 (1995)
- 23) M. Sampei, T. Mita and M. Nakamichi: An algebraic approach to $\mathcal{H}_\infty$ output feedback control problems; *Syst. & Contr. Letters*, Vol. 14, pp. 13-24 (1990)
- 24) 川田, 島津, 井上: ディスクリプタ形式に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 状態フィードバック制御の実現; 第 40 回自動制御連合講演会前刷, pp. 253-256 (1997)
-