入出力データに基づく線形準最適補償器の構成 —LFT 表現によるアプローチ*

浜本 研一**・杉江 俊治***

Construction Method of Linear Suboptimal Controllers from Input-Output Data —LFT Approach*

Kenichi HAMAMOTO** and Toshiharu SUGIE***

In this paper, we consider a suboptimal control problem based on the input-output data through the LFT representation. First we describe the suboptimal control problem in a general setting via the LFT. Then we solve the problem via numerical optimization, where the relation between the design parameters and the cost function plays a key role. For this equation, we discuss how to solve the optimization problem. Finally, we give numerical examples of controller design to demonstrate its effectiveness.

1. はじめに

近年、入出力データに基づく制御系設計手法が提案されてきている。入出力データに基づく設計とは、これまでの制御系設計が対象システムを数式モデルなどで記述しそのモデルに基づいて行われてきたのに対し、対象システムのモデル化という過程を経ずに対象システムの入出力データから直接に制御系設計を行うものである。これまでに研究されてきた適応制御や学習制御に加えてシステムのマルコフパラメータから LQG 制御問題を解く手法^{1),2)}, 入出力データ配列から基底行列を導き出すことにより制御入力を得る方法^{3),4)}, あるいは最適システムの初期値応答とインパルス応答の直交性を利用した最適レギュレータの設計法^{5),6)}などが研究されている。

上記の研究では特定の制御系設計指標に強く依存している制御入力やフィードバック補償器の設計法を与えている。しかし、より一般性を持った制御系設計指標を扱う問題設定を与え、それに対する設計法を考察することが必要であると思われる。またこのような問題設定

を与えることで入出力データを用いた場合に特有の新たな制御系設計指標が見つけ出される可能性がある。

そこで、本研究ではこのような立場から、LFT (Linear Fractional Transformation) 表現を用いて、入出力データに基づく制御系設計において先の従来研究より一般性をもつ設計指標が扱えるような枠組みを定式化し、この問題を数値最適化問題に帰着させて解く手法を考察する。そのために、まず与えられた最適制御問題に関して、入出力データと補償器の基本関係式を導出する。次に基本関係式に基づいて制御問題の解法を検討し、この式から最適化問題が凸、非凸となるときの場合分けを行い、それぞれに対して解法を考察する。さらに設計問題を挙げ、数値例を示す。

本文中では以下の記号を用いる。

- M^T : 行列 M の転置行列
- α_i : ベクトル α の i 番目の要素
- $u^i(t)$: 時系列信号 $u(t)$ の i 番目のサンプル
- $\langle u(t), y(t) \rangle_Q$: 時系列信号 $u(t)$ と $y(t)$ の内積,
 $\langle u(t), y(t) \rangle := \sum_{t=0}^N u(t)^T Q y(t)$
ただし、行列 Q は $Q^T = Q > 0$
 $Q = I$ の時は省略する
- $\|u(t)\|_Q$: 時系列信号 $u(t)$ のノルム
- $\|u(t)\|_Q^2 := \langle u(t), u(t) \rangle_Q$
- $\|\alpha\|_{\text{vec}}$: ベクトル α のユークリッドノルム

* 原稿受付 1998年2月16日

** 京都大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Kyoto University; Uji city, Kyoto 611-0011, JAPAN

*** 京都大学 大学院 情報学研究科 Graduate School of Informatics, Kyoto University; Uji city, Kyoto 611-0011, JAPAN

Key Words: LFT representation, I/O data-based design, numerical optimization.

2. 問題設定

本研究では考察対象として、Fig. 1 のように LFT の形で与えられる離散時間システムを扱う。

Fig. 1 LFT structure

このシステムは有限ステップ区間 $[0, N]$ で定義されているものとし、各時系列信号は $t \in [0, N]$ に対して $w(t) \in \mathbf{R}^l$, $u(t) \in \mathbf{R}^m$, $z(t) \in \mathbf{R}^p$ と $y(t) \in \mathbf{R}^q$ で与えられるとする。また、信号 $w(t)$ に対して次のベクトルを定義する。

$$w = \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ \vdots \\ w(N) \end{bmatrix} \in \mathcal{I}_1 \subseteq \mathbf{R}^{(N+1) \cdot l} \quad (1)$$

本論文では信号 w を $w(t)$ と表記した時は時系列データとして扱い、 w と表記した時は上式のようにベクトルデータとして扱う。同様に $u \in \mathcal{I}_2 = \mathbf{R}^{(N+1) \cdot m}$, $z \in \mathcal{O}_1 \subseteq \mathbf{R}^{(N+1) \cdot p}$ と $y \in \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbf{R}^{(N+1) \cdot q}$ を定義する。さらにこのベクトルデータ w に対する内積およびノルムは、 $w(t)$ に変換して与える。Fig. 1 において、 S は時不変線形システムであり、 T は時変な項を含む行列または時変線形システムである。いま、 S は未知のシステムであるが、その入力 $w(t), u(t)$ は任意に与えることができ、出力 $z(t), y(t)$ は観測可能な信号とする。また、ベクトルデータ $[w^T \ u^T]^T$ から $[z^T \ y^T]^T$ への各線形作用素を次のように表す。

$$S =: \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad S_{hk}: \mathcal{I}_k \mapsto \mathcal{O}_h \quad (2)$$

S_{hk} のサイズはベクトルデータに対応して与えられ、例えば w から z までは $S_{11} \in \mathbf{R}^{(N+1) \cdot l \times (N+1) \cdot p}$ となる。同様に T を y から u への線形作用素とする。 T は制御系設計において求めるべき補償器である[†]。

制御系設計問題を考えるにあたって上記の設定より、次のような仮定を考える。

[仮定 1-1] 時不変システム S に対して適当な入力サンプル集合 $\mathcal{W}, \mathcal{U}$ が与えられている。

$$\mathcal{W} := \{w^i\}, \mathcal{U} := \{u^j\}, \quad i=1, \dots, n_w, j=1, \dots, n_u \quad (3)$$

ただし、 w^i, u^j は $w^i(t), u^j(t)$ に対応するベクトルデータであり、 $\mathcal{W}$ と $\mathcal{U}$ の各要素は独立であるとする。ここで集合 $\mathcal{W}$ の各要素が「独立」とは、

$$\sum_{i=1}^{n_w} c_i w^i = 0 \quad (4)$$

となる $c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n_w}]^T \in \mathbf{R}^{n_w}$ が $c=0$ 以外存在しないことを指す。□

[仮定 1-2] 仮定 1-1 で与えた入力サンプル集合 $\mathcal{W}, \mathcal{U}$ の各要素を用いて、次の出力を得ることができる。

$$\begin{aligned} z^{(1),i} &= S_{11} w^i, & y^{(1),i} &= S_{21} w^i \\ z^{(2),j} &= S_{12} u^j, & y^{(2),j} &= S_{22} u^j \end{aligned} \quad (5)$$

各出力をまとめて、次のサンプル集合を定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{(1)} &:= \{z^{(1),i}\}, & \mathcal{Y}_{(1)} &:= \{y^{(1),i}\}, \\ \mathcal{Z}_{(2)} &:= \{z^{(2),j}\}, & \mathcal{Y}_{(2)} &:= \{y^{(2),j}\} \end{aligned} \quad (6)$$

□

仮定 1-1, 2 において、 $\mathcal{W}, \mathcal{Z}_{(1)}, \mathcal{Y}_{(1)}$ の要素のサンプル番号 i および $\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{(2)}, \mathcal{Y}_{(2)}$ のサンプル番号 j はそれぞれ対応していることに注意してほしい。この仮定のもとで次の問題を考える。

[最適補償器設計問題 1-1]

仮定 1 のもとで評価関数 $J = \|z(w, T)\|_Q^2$ を最小化する最適な組 (w^*, T^*) を求めよ。

[最適補償器設計問題 1-2]

仮定 1 のもとで評価関数

$$J = \max_{\|w\|_Q \neq 0} \frac{\|z(w, T)\|_Q^2}{\|w\|_Q} \quad (7)$$

を最小化する最適な T^* を求めよ。

[注意 1] 問題 1-1, 2 はそれぞれモデルベースの制御系設計における H_2 制御問題、 H_∞ 制御問題に対応する問題であり、この二つの問題を混合した場合もある。また、問題 1-2 は w と u の扱いを交換した場合も含むものとする。

「 $\mathcal{W}, \mathcal{Z}_{(1)}, \mathcal{Y}_{(1)}$ が得られる」と仮定していることは一般に成り立つとはいえないが、例えば次のような対象システムの入出力端に外部入力加わる場合などに用いることができる。

[例 1] 目標軌道 $r(t)$ が与えられたとき、これに追従させる閉ループ系の設計について考える (Fig. 2 参照)。 P, K はそれぞれ制御対象、補償器を表すベクトルデータ間の作用素とする。 P の入出力をそれぞれ u_p, y_p とすると、 $w := r, u := u_p, z := y := r - y_p$ となる。このことから評価関数および LFT 形式に変換したときの S は次式で与え

[†] T はフィードバック補償器だけでなく、さまざまなクラスの補償器を考えることができる (feed-forward, anti-causal あるいは時変ゲインの場合など)。

Fig. 2 A closed loop system

られる。

$$J = \|r - y_p\|^2, \quad S = \begin{bmatrix} I & -P \\ I & -P \end{bmatrix} \quad (8)$$

このとき、入出力集合 $\mathcal{W}, \mathcal{U}, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \mathcal{Z}_1 = \mathcal{Y}_1 = \{r\}, \\ \mathcal{U} &= \{u_p^i\}, \quad \mathcal{Z}_2 = \mathcal{Y}_2 = \{-y_p^i\} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。

任意に与えられる補償器 T の中から最適な補償器 T^* を導出するのは困難である。そこで事前に探索する補償器のクラス $\mathcal{T}$ を限定しておく。本研究では補償器集合 $\mathcal{T}$ はパラメータ $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_T \subseteq \mathbf{R}^{n_T}$ から一意に定まるとして最適線形補償器 $T^* = T(\mathbf{a}^*)$ を求める方法を考察する。以後 T がパラメータ $\mathbf{a}$ に依存していることを明示するために T を $T(\mathbf{a})$ と書く。

対象システム S に関する情報は与えられた入出力集合 $\mathcal{W}, \mathcal{U}, \mathcal{Z}_{(1)}, \mathcal{Z}_{(2)}, \mathcal{Y}_{(1)}, \mathcal{Y}_{(2)}$ である。 S が線形であることから $\mathcal{Z}_{(1)}, \mathcal{Z}_{(2)}$ の要素の線形和を用いて評価関数 J を表してそれをもとに最適化を行うことを考える。よって各入力集合 $\mathcal{W}, \mathcal{U}$ の要素に対してパラメータ $\alpha_w \in \mathcal{A}_w \subseteq \mathbf{R}^{n_w}, \alpha_u \in \mathcal{A}_u \subseteq \mathbf{R}^{n_u}$ を導入し、パラメータ α_w と α_u によって z を次のように表す。

$$\begin{aligned} z &= S_{11} \sum_{i=1}^{n_w} \alpha_{w,i} w^i + S_{12} \sum_{i=1}^{n_u} \alpha_{u,i} u^i \\ &= \sum_{i=1}^{n_w} \alpha_{w,i} z^{(1),i} + \sum_{i=1}^{n_u} \alpha_{u,i} z^{(2),i} \end{aligned} \quad (10)$$

このことから評価関数の $z(w, T)$ の部分は $z(\alpha_w, \alpha_u)$ と表すことができる。このとき z には補償器 T のパラメータ $\mathbf{a}$ が含まれていないが、 α_w, α_u と $\mathbf{a}$ は互いに関係しており、その関係が次のように適当な数式を用いて表されるとする。

$$F(\alpha_w, \alpha_u, \mathbf{a}) = 0 \quad (11)$$

この式を等式制約条件として最適化問題が導かれる。

よって先に与えた最適補償器設計問題1は次のように二つの基本最適化問題に書き換えられる。

[最適補償器設計問題 2-1]

仮定1のもとで、 $F(\alpha_w, \alpha_u, \mathbf{a}) = 0$ をみたし、評価関

数 $J = \|z(\alpha_w, \alpha_u)\|_Q^2$ を最小化する最適パラメータの組 $(\alpha_w^*, \mathbf{a}^*)$ を求めよ。

[最適補償器設計問題 2-2]

仮定1のもとで、 $F(\alpha_w, \alpha_u, \mathbf{a}) = 0$ をみたし、評価関数

$$J = \max_{\|w(\alpha_w)\|_Q \neq 0} \frac{\|z(\alpha_w, \alpha_u)\|_Q^2}{\|w(\alpha_w)\|_Q^2} \quad (12)$$

を最小化する最適パラメータ $\mathbf{a}^*$ を求めよ。

3. 基本関係式と評価関数

ここでは、まず2.で与えられた最適補償器設計問題2における等式制約条件(11)式を具体的に示す。続いてこのパラメータ間の関係式を用いてどのように評価関数が与えられるかを考察する。

いま、 z から w までの作用素 S_{zw} は S_{hk} ($h=1, 2, k=1, 2$) および $T(\mathbf{a})$ から、

$$S_{zw} := S_{11} + S_{12}(I - T(\mathbf{a})S_{22})^{-1}T(\mathbf{a})S_{21} \quad (13)$$

となる。このとき次のような時系列信号 v を考える。

$$v := (I - T(\mathbf{a})S_{22})^{-1}T(\mathbf{a})S_{21}w \in \mathcal{I}_2 \quad (14)$$

入力集合 $\mathcal{U}$ の要素 u^j ($j=1, \dots, n_u$) が張る空間

$$\mathcal{I}_u := \text{span}\{u^j\}_{j=1, \dots, n_u} \quad (15)$$

が、 $\mathcal{I}_u = \mathcal{I}_2$ を満たすとき ($n_u = m \cdot (N+1)$ のとき)、

$$v := \sum_j \alpha_{u,j} u^j \quad (16)$$

で表される。このことと $w = \sum_i \alpha_{w,i} w^i$ から、(11)式は具体的に次式の形で表される。

$$\begin{aligned} &\sum_j \alpha_{u,j} (u^j - T(\mathbf{a})y^{(2),j}) \\ &\quad - \sum_i \alpha_{w,i} T(\mathbf{a})y^{(1),i} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

[注意2] 離散系の場合、 S_{22}, T の直達項を D_{22} および D_T とすると、 $D_T \cdot D_{22} = 0$ が満たされるとき、適当に $\mathcal{U}$ と $\mathcal{Y}$ を選べば(17)式は α_u について解くことができることは簡単に確かめられる。このとき、 z を $\alpha_w, \mathbf{a}$ についての関数に変換することができる。□

本研究では、入力 $\mathcal{U}$ と α_u に関して次のように仮定して問題を解く場合を考える。

[仮定2][†] 入力サンプル集合 $\mathcal{U}$ が $\mathcal{I}_u = \mathcal{I}_2$ をみたし、(11)式が α_u について解け、 α_u が α_w と $\mathbf{a}$ の既知関数として

[†] この仮定は対象を有限時間区間離散時間システムとしているので強い仮定とはならない。

$$\alpha_u = \tilde{F}(\alpha_w, \mathbf{a}) \quad (18)$$

で与えられる。このとき $z(\alpha_w, \alpha_u) = z(\alpha_w, \mathbf{a})$ となる。□

[例 2] 例 1 の場合、 $\alpha_w = 1$ とできる。また (8) 式より、(13) 式は

$$y_p = P(I + KP)^{-1}Kr \quad (19)$$

と表されるので (17) 式は

$$\sum_j \alpha_{u,j} (u_p^j + K y_p^j) = Kr \quad (20)$$

となる。このとき評価関数 J は次式のようにになる。

$$J = \|r - y_p\|^2 = \left\| r - \sum_i \alpha_i y_p^i \right\|^2 \quad (21)$$

次にこの基本関係式によって、最適化問題がどのように書き換えられるかをみてみよう。簡単のため $Q := I$ とし、1 入力 1 出力 (SISO) の場合を考える。(10) 式より

$$J = \|Z_{(1)}\alpha_w + Z_{(2)}\alpha_u\|_{\text{vec}}^2 \quad (22)$$

となる。ここで、 $Z_{(1)}$ は、 $z^{(1),i}$, $i = 1, \dots, n_w$ から

$$Z_{(1)} := \begin{bmatrix} z^{(1),1} & z^{(1),2} & \dots & z^{(1),n_w} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times n_w} \quad (23)$$

で得られる行列とする。 $Z_{(2)} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ についても $z^{(2),j}$ ($j = 1, \dots, n_u$) から $Z_{(1)}$ と同様にして得られる行列とする。(17) 式から次式を得る。

$$\alpha_u = (U - T(\mathbf{a})[Y_{(2)}])^{-1}T(\mathbf{a})[Y_{(1)}]\alpha_w \quad (24)$$

ここで $Y_{(1)} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times n_w}$ と $U \in \mathbf{R}^{(N+1) \times (N+1)}$, $Y_{(2)} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ は、 $y^{(1),i}$ ($i = 1, \dots, n_w$) と u^j , $y^{(2),j}$ ($j = 1, \dots, n_u$) を用いて $Z_{(1)}$ と同様にして求められる行列とする。この式から J は

$$J = \|(Z_{(1)} + Z_{(2)}(U - T(\mathbf{a})[Y_{(2)}])^{-1}T(\mathbf{a})[Y_{(1)}])\alpha_w\|_{\text{vec}}^2 \quad (25)$$

となる。いま $J < \gamma^2$ となる正数 γ を導入すると、最適化問題は次式を満たす最小の γ をみつける問題に書き換えられる。

$$\alpha_w^T (Z_{(1)} + Z_{(2)}R(\mathbf{a})[Y_{(1)}])^T \cdot (Z_{(1)} + Z_{(2)}R(\mathbf{a})[Y_{(1)}])\alpha_w - \gamma^2 < 0 \quad (26)$$

ただし、 $R(\mathbf{a}) := (U - T(\mathbf{a})[Y_{(2)}])^{-1}T(\mathbf{a})$ である。

最適化問題 2-2 では、行列 W を $Z_{(1)}$ と同様の方法を用いて与えると、(26) 式から次式の $T(\mathbf{a})$ を含む最大特異値最小化問題が導かれる。

$$\text{find } \mathbf{a}^* \text{ s.t. } \min_{\mathbf{a}} \gamma > 0,$$

$$(Z_{(1)} + Z_{(2)}R(\mathbf{a})[Y_{(1)}])^T \cdot (Z_{(1)} + Z_{(2)}R(\mathbf{a})[Y_{(1)}]) - \gamma^2 W^T W < 0 \quad (27)$$

4. 最適補償器の構成

ここでは、設計問題が凸計画問題になる補償器のクラスと非凸計画問題になる補償器のクラスのそれぞれに関して、最適補償器設計問題 2 に対する最適補償器の構成法について考察する。また簡単のため SISO の場合を扱う。

4.1 凸計画問題

探索する補償器のクラスが次のように与えられているとする。

$$\{T(\mathbf{a}) \mid T(\mathbf{a}) := UR(\mathbf{a})(I + Y_{(2)}R(\mathbf{a}))^{-1}, \\ R(\mathbf{a}) \text{ は } \mathbf{a} \text{ に関して線形}\}$$

ここで $R(\mathbf{a}) \in \mathbf{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ とする。よって、求める補償器は Fig. 3 で示される構造を有する。このとき、評価関数 J は (25) 式より、

$$J = \|(Z_{(1)} + Z_{(2)}R(\mathbf{a})Y_{(1)})\alpha_w\|_{\text{vec}}^2 \quad (28)$$

この式に $\gamma > 0$ を導入することで、最適化問題 2-1 は次のように書き換えることができる。

$$\text{find } \mathbf{a}^*, \alpha_w \text{ s.t. } \min_{\mathbf{a}, \alpha_w} \gamma > 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma & \alpha_w^T L^T \\ L\alpha_w & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

$$L := Z_{(1)} + Z_{(2)}R(\mathbf{a})Y_{(1)}$$

ここで、 α_w は固定されていると仮定すると、(29) 式は LMI (Linear Matrix Inequality) 条件となるので凸最適化法を用いて解くことができる。

最適化問題 2-2 の場合も (27) 式のような形式で問題が与えられるので、LMI 条件へ書き換えが可能で凸計画問題になる。

Fig. 3 Structure of K

[例3] 例1のシステムに対して N ステップまでの出力端外乱 $w_o(t)$ に対する影響を最小化する問題を考える (最適化問題 2-2). ただし, w_o は次の集合 $\mathcal{W}_o := \{w_o^1, \dots, w_o^{n_w}\}$ の要素の線形和で与えられているとする. このとき

$$w = w_o, u = u_p, z = w_o + y_p, y = -(w_o + y_p) \quad (30)$$

で, $[w^T \ u^T]^T$ から $[z^T \ y^T]^T$ までのベクトルデータに関する作用素 S は,

$$S = \begin{bmatrix} I & P \\ -I & -P \end{bmatrix} \quad (31)$$

で与えられる. S の構造より,

$$Z_{(1)} = -Y_{(1)} =: W_o, Z_{(2)} = -Y_{(2)} =: Y \quad (32)$$

となる. ただし, W_o は (23) 式の $Z_{(1)}$ と同様にして与えられる行列である. (27) 式は

$$W_o^T (I - YR(a))^T (I - YR(a)) W_o - \gamma^2 W_o^T W_o < 0 \quad (33)$$

この式を LMI にすると次のようになる.

$$\begin{bmatrix} -\gamma W_o^T W_o & W_o^T (I - YR(a))^T \\ (I - YR(a)) W_o & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

この方法の場合, 参考文献 7) と同様の考え方で, 入力制約を考えることができる. なぜなら最適入力信号の集合 U^* は

$$U^* = UR(a^*) Y_{(1)} \quad (35)$$

の形で与えられ, パラメータ a に関して線形になるからである. そのため U^* の各ステップの値を取り出し, LMI を用いて制約条件を表すことができる.

[例4] 例1の場合を用いて入力制約に関する LMI 条件を示そう. また入力制約の上界を $\bar{u} > 0$ とおく. $(n-1)$ ステップ目に対する LMI は次式で与えられる.

$$\begin{bmatrix} -\bar{u} & [UR(a)]_n r \\ r^T [UR(a)]_n^T & -\bar{u} \end{bmatrix} < 0 \quad (36)$$

ここで, $[\cdot]_n$ は行列の n 行目を意味する. この結果を用いれば, 入力制約条件を考慮した補償器設計を行うことができる. ■

4.2 非凸計画問題

4.1 では Fig. 3 に示される構造を持つ K に限定したのに対し, ここでは例えば定数フィードバックゲイン等の

ように別の構造を持つ補償器のクラスを考慮した場合の解法について考察する.

特に最適化問題 2-1 の場合, 局所解をニュートン法等の最適化手法を用いて解くことができる. ここでは $T(a)$ が a に関して線形のときを示す. 決定変数は問題より α_w と a である. $b := [\alpha_w \ a]^T$ とおき, b の初期値 b_o が与えられているとする. このとき, ニュートン法を用いた場合の b の更新則は次式で表される.

$$b^{[h+1]} = b^{[h]} - \frac{\partial J}{\partial b} \left(\frac{\partial^2 J}{\partial b^2} \right)^{-1} \quad (37)$$

ここで, $b^{[h]}$ は h 回目の b を意味する.

では, 具体的に (37) 式に含まれる J の Gradient や Hessian が計算され, (37) 式が与えられるかを例を用いて示す.

[例5] 安定な離散時間線形時不変システム P に対する定数ゲインフィードバック制御を考える. システムの入力を $u_p(t)$, 出力を $y_p(t)$ とし, P_x を入力 $u_p(t)$ から拡大出力 $x(t) := [y_p(t) \ y_p(t-1) \ \dots \ y_p(t-n+1)]^T$ までのベクトルデータに関する作用素とする. また初期値を $x(0) = x_o$ とし, $\tilde{x}_o := [x_o^T \ 0 \ \dots \ 0]^T \in \mathbf{R}^{(N+1) \times n}$ とする. P_o を初期値 $\tilde{x}_o$ から x までの作用素とする. また x から出力 y_p までの作用素を C とする. さらに補償器として, $u_p(t) = Fx(t)$ なる定数フィードバックゲイン F を考える. F のパラメータ a は $F = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ で与えられるとする. N ステップまでの評価関数を

$$J = \sum_{t=1}^N (q \cdot y_p^2(t) + r \cdot u_p^2(t)) \quad (38)$$

としたとき, Fig. 1 の信号との対応関係から,

$$w = \tilde{x}_o, u = u_p, z = [y_p \ u_p]^T, y = x \quad (39)$$

となるので, 内積に用いる行列 Q および $[w^T \ u^T]^T$ から $[z^T \ y^T]^T$ までの作用素 S は次のように表される.

$$Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} CP_o & CP_x \\ 0 & I \\ P_o & P_x \end{bmatrix} \quad (40)$$

初期値 0 で適当な入力信号 $u_p^0(t)$ から出力サンプル $x^0(t)$, $y_p^0(t)$ を観測する. ただし, $t = 0, 1, \dots, N$ である. 得られた時系列信号 $u_p^0(t)$, $x_i^0(t)$, $y_p^0(t)$ から与えられる下三角 Toeplitz 行列を U , X_i , Y とする. また $Fx^0(t)$ から与えられる下三角 Toeplitz 行列を X_F , h 回目の定数フィードバックゲインを $F^{[h]}$ としたときの初期値応答から得られる信号をベクトル化したものを u^h , x^h と y^h とする. F の a に対する各偏微分は

$$\frac{\partial F}{\partial a} = I, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0 \quad (41)$$

なので、パラメータ α_u に対する偏微分は、

$$\frac{\partial \alpha_u}{\partial a} = Zx^h, \quad \frac{\partial^2 \alpha_u}{\partial a^2} = \begin{bmatrix} ZX_1 Zx^h \\ ZX_2 Zx^h \\ \vdots \\ ZX_n Zx^h \end{bmatrix} \quad (42)$$

となる。ただし、 $Z := (U - X_F)^{-1}$ である。これから

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 2MZx^h \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a^2} = 4 \begin{bmatrix} MZX_1 Zx^h \\ MZX_2 Zx^h \\ \vdots \\ MZX_n Zx^h \end{bmatrix} + 2x^h{}^T Z^T (qY^T Y + rU^T U) Zx^h \quad (44)$$

を得る。ただし $M := qy^h{}^T Y + ru^h{}^T U$ である。(43)、(44) 式を (37) 式に代入することで、最適化を行うことができる。 ■

5. 設計例

ここでは、4. で考察した各補償器構成法に対する設計例を与える。

入力制約を考慮したロバスト軌道追従制御

まず、凸計画問題となる場合に対して設計例を示す。ここでは例 1 と同様に Fig. 2 で示されるフィードバックシステムに対し、目標軌道 $r(t)$ を与え出力 $y(t)$ を $r(t)$ に追従させることを考える。ただし、出力端に外乱が加わったときも目標軌道 $r(t)$ に追従するような制御系を設計する。対象システム P は次式のように与えられているとする。

$$P: \begin{cases} x(t+1) = A_d x(t) + B_d u(t) \\ y(t) = C_d x(t) \end{cases} \quad (45)$$

$$A_d := \begin{bmatrix} 0.303 & -0.303 \\ 0.303 & 0.910 \end{bmatrix}, \quad B_d := \begin{bmatrix} 0.303 \\ 0.090 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$C_d := \begin{bmatrix} 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

ただし、実際に用いるのはこのシステムに対する入出力データのみである。ステップ数 $N=50$ 、サンプリングタイム $T_s=0.1$ とし、目標軌道としては次式の伝達関数で表されるシステムのステップ応答を用いた。

$$G_r(s) = \frac{20^4}{(s+20)^4} \quad (47)$$

この対象システムから得られる入出力データを U, Y とする (U, Y の構造は前述したとおり)。目標軌道に追従させるための LMI は、

$$\begin{bmatrix} -\gamma & r^T(I - YR(a))^T \\ (I - YR(a))r & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (48)$$

であり、 γ が最適化すべき値になる。外乱に対する LMI は

$$\begin{bmatrix} -\delta I & (I - YR(a))^T \\ I - YR(a) & -\delta I \end{bmatrix} < 0 \quad (49)$$

とした。これは、大きさ 1 の外乱を与えたときに、外乱から出力までの作用素のノルムが δ 以下であることを意味する。今回は $\delta=2$ とした。また各時刻に対して (36) 式に示される LMI を用いて入力制約を考慮する。この例では入力制約の上界を $\bar{u}=10$ とした。また、探索する $R(a)$ のクラスとしては、次式で表されるものを考える。

$$R(a) := \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ \vdots & & \ddots \\ a_{50} & a_{49} & a_{48} & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

すなわち、 $R(a)$ は FIR モデルから与えられる下三角 Toeplitz 行列を意味する。

最適化した結果、得られた評価関数の値は

$$J = \|z\|^2 = 1.342 \quad (51)$$

となった。システムの応答を Fig. 4 に、そのときの入力値の大きさを Fig. 5 に示す。入力制約を満たしながら目標軌道に近い値が得られてることがわかる (破線は入力制約の上下界値を表している)。

[注意 3] ここで示した設計例では、参考文献 7) で示された結果とほぼ同様の結果が得られている。参考文献 7) で考えている問題設定と本研究で与えているものとは異なるので単純比較をすることはできないが、本研究では直接入力信号を求めていないので LMI 条件 ((49) 式等) で表される制御仕様を付加することができる。

拡大出力を用いた定数ゲインフィードバック制御

次に非凸計画問題に対する設計例を示す。ここでは例 5 を用いる。対象となる時不変離散システム P として

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9^2 & 2 \cdot 0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (52)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (53)$$

Fig. 4 System response

Fig. 5 Input signal sequence

となるシステムを用いた。ただし実際の設計では開ループ系のインパルス応答を用いて U , X_1 , X_2 , X_F および Y を求め、このデータをもとにフィードバックゲインを求める。 $N=100$ とし初期値 $x_o=[1 \ 1]^T$ とする。また、評価関数 J は

$$J = \sum_{t=1}^{100} (y^2(t) + u^2(t)) \quad (54)$$

を考える。はじめの $F=[0 \ 0]$ として、15 回繰り返した結果最適定数フィードバックゲイン F^* は

$$F^* = \begin{bmatrix} 0.5526 & -1.068 \end{bmatrix} \quad (55)$$

となった。与えられたシステムの離散 LQ 問題から導かれるゲインに近い値が得られている。

[注意 4] 例のように、求められたゲイン F による応答 u_F , x_F と y_F を利用することで、(17) 式を用いて α_u を求めることや実際の初期状態が既知であることが必要がなくなる。また数値例では、簡単のためにインパルス応答を用いて計算しているが、入力の種類に制限はない。

6. おわりに

本研究では、LFT (線形分数変換) 表現を用いて、入出力データに基づく制御系設計において従来研究より一般

性をもつ設計指標を扱えるような枠組みを定式化し、この問題を数値最適化問題に帰着させて解く手法を考察した。まず与えられた最適制御問題に関して、入出力データと補償器の基本関係式を導出した。そして基本関係式に基づいて制御問題の解法を検討し、この式から最適化問題が凸、非凸となる場合に場合分けを行い、それぞれに対して解法を考察した。最後に設計問題を挙げ、数値例を示した。

参考文献

- 1) R. E. Skelton and G. Shi: The data-based LQG control problem; *Proceedings of the 33rd CDC*, pp. 1447-1452 (1994)
- 2) K. Furuta and M. Wongsaisuan: Discrete-time LQG dynamic controller design using plant Markov parameters; *Automatica*, Vol. 31, No. 9, pp. 1317-1324 (1995)
- 3) 藤崎, 段, 池田: 入出力データ配列に基づく新たなシステム表現と制御方式; 第 25 回制御理論シンポジウム, pp. 199-204. SICE (1996)
- 4) 藤崎, 福田, 段, 池田: 入出力データ表現に基づく最適制御; 第 26 回制御理論シンポジウム資料, pp. 51-56 (1997)
- 5) 河村: 離散時間最適制御と最適推定について直交条件に関する双対性; 計測自動制御学会論文集, Vol. 24, No. 12, pp. 1260-1267 (1988)
- 6) 中野, 河村: 応答信号に基づく倒立振り子の高速学習 LQ 制御; 第 26 回制御理論シンポジウム資料, pp. 361-365 (1997)
- 7) 杉江, 浜本: 入出力データに基づく最適制御入力の決定法 — 凸計画法によるアプローチ; システム制御情報学会論文誌, Vol. 11, No. 2, pp. 86-92 (1998)