繰返し運動による 1 自由関節を有する 2 リンク平面 マニピュレータにおける強制振動現象*

藤本 憲市**・田中 芳夫***・川上 博****

Forced Oscillatory Phenomena of a Two-Link Planer Manipulator with a Free Joint under Repetitive Motion*

Ken-ichi FUJIMOTO**, Yoshio TANAKA*** and Hiroshi KAWAKAMI****

The dynamics of a two-link planer manipulator with a free joint is described by non-linear ordinary differential equations including trigonometric functions. By commanding repetitive tasks, it is estimated that non-linear phenomena including chaotic motions are occurred on the manipulator. In this paper, some dynamical properties are analyzed with bifurcation theories. Moreover, some nonlinear phenomena of the manipulator are investigated with bifurcation diagrams in several parameter planes are calculated using an algorithm based on the geometric approach. In results, by applying a torque to 1st-joint performing repetitive motion, the 2nd-joint of the manipulator exhibits resonant motions, non-resonant motions, rotating motions, and chaotic motions.

1. はじめに

多関節マニピュレータの動力学は三角関数を含む非線形常微分方程式によって記述されるため、マニピュレータの制御は困難な問題であるといわれている。現在実用化されているマニピュレータ運動の位置制御は、各関節の角度、角速度を検出して線形フィードバックコントローラを構成し、目標位置を参照入力とする方法が用いられる¹⁾。

一方、非駆動関節を持つ多関節マニピュレータは、非ホロノミック性を有するシステム^{2),3)}である。この非ホロノミックシステムにおいては、平衡点への滑らかな状態フィードバックによる安定化は不可能⁴⁾であり、さらには計算トルク法を用いた厳密な線形化によるフィードバック制御が適用できない⁵⁾などの特徴がある。それゆえに、

駆動関節の周期運動によるマニピュレータの位置制御法等が提案されている²⁾。そこで、駆動関節が繰返し運動を行う際のマニピュレータの定常運動(安定な解)、システムパラメータの変動に伴う解の分岐現象など、非線形現象の解析が重要になる。また線形フィードバック制御が適用できないことから、非線形制御理論の構築と共に、システムが本質的に有する非線形性を積極的に利用する新しい機械システムの構築の観点からも、システムに生じる非線形現象の解析は重要となる。

本論文では、1 自由関節を有する 2 リンク平面マニピュレータにおいて、第 1 関節が速度制御された繰返し運動を行う際の第 2 リンクの挙動について、その力学的性質を明らかにし、さらには分岐理論に基づく数値解析法⁶⁾を用いて位相面図、分岐図を作成することにより詳細な定性的解析を行った。

2. 1 自由関節を有する 2 リンク平面マニ ピュレータの力学系

2.1 運動方程式の導出

1 自由関節を有する 2 リンク平面マニピュレータの試作機を Fig. 1 に示す。ここで、Fig. 1 に示すマニピュレータの座標変数、物理パラメータを Table 1 にまとめた。第 i リンクにおける運動エネルギー K_i 、位置エネルギー P_i 、損失エネルギー D_i を求めることにより、系全体の各エネルギー

* 原稿受付 1998 年 11 月 30 日

** 阿南工業高等専門学校 Anan College of Technology; 265 Aoki, Minobayashi-cho, Anan city, Tokushima 774-0017, JAPAN

*** 四国工業技術研究所 基盤技術部 Shikoku National Industrial Research Institute; 2217-14 Hayashi-cho, Takamatsu city, Kagawa 761-0395, JAPAN

**** 徳島大学 工学部 Faculty of Engineering, The University of Tokushima; 2-1 Minamijosanjima-cho, Tokushima city, Tokushima 770-8506, JAPAN

Key Words: two-link planer manipulator, free joint, dynamical system, forced oscillation, bifurcation, chaos.

$$K = \frac{1}{2} \left\{ m_1 s_1^2 + m_2 (l_1^2 + s_2^2 + 2l_1 s_2 \cos \theta_2) + J_1 + J_2 \right\} \dot{\theta}_1^2 + \left\{ m_2 (s_2^2 + l_1 s_2 \cos \theta_2) + J_2 \right\} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (m_2 s_2^2 + J_2) \dot{\theta}_2^2 \quad (1)$$

$$P = 0 \quad (2)$$

$$D = \frac{1}{2} d_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} d_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (3)$$

を得る．ここで，各リンクは地表面と水平に運動するため $P=0$ となる．さらに一般化座標 (q_1, q_2) として (θ_1, θ_2) をとり，また第 2 関節は自由関節であるから $U_2=0$ として，ラグランジュ運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} = U_i, \quad (i=1, 2) \quad (4)$$

に代入すれば，マニピュレータの運動方程式

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5a)$$

ただし

$$M_{11} = m_1 s_1^2 + m_2 (l_1^2 + s_2^2 + 2l_1 s_2 \cos \theta_2) + J_1 + J_2 \quad (5b)$$

$$M_{12} = M_{21} = m_2 (s_2^2 + l_1 s_2 \cos \theta_2) + J_2 \quad (5c)$$

$$M_{22} = m_2 s_2^2 + J_2 \quad (5d)$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 s_2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + d_1 \dot{\theta}_1 \\ m_2 l_1 s_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + d_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (5e)$$

を得る．ここで (5a) 式の第 1 行が第 1 リンクの運動方程式を表し，第 2 行は第 2 リンクの運動方程式を表して

Fig. 1 Prototype of a two-link planer manipulator with a free joint

Table 1 Variables of coordinates and parameters on the manipulator

θ_i : 第 i 関節の角度 [rad]
m_i : 第 i リンクの質量 [kg]
s_i : 第 i 関節軸から第 i リンクの重心までの距離 [m]
l_1 : 第 1 関節軸から第 2 関節軸までの距離 [m]
J_i : 第 i リンクの重心回りの慣性モーメント [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
d_i : 第 i 関節における粘性摩擦係数 [$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$]
u_1 : 第 1 関節の駆動トルク [N·m]

いる．

第 1 関節への適当な制御トルク u_1 により，速度制御された第 1 関節の繰返し運動

$$\dot{\theta}_1 = A \sin \nu t \quad (6)$$

を仮定すれば[†]，第 2 リンクの運動方程式は

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \dot{\theta}_2 \quad (7a)$$

$$\frac{d\dot{\theta}_2}{dt} = -n_2 \dot{\theta}_2 - A \nu \cos \nu t - n_1 A \nu \cos \nu t \cdot \cos \theta_2 - n_1 A^2 \sin^2 \nu t \cdot \sin \theta_2 \quad (7b)$$

となる．ただしパラメータ n_1, n_2 は

$$n_1 = \frac{m_2 l_1 s_2}{m_2 s_2^2 + J_2} \quad (7c)$$

$$n_2 = \frac{d_2}{m_2 s_2^2 + J_2} \quad (7d)$$

である．

2.2 円筒形位相面図とポアンカレ写像

回転関節を持つロボットアームのように状態変数の一つが角度となるような物理系は，円筒形状状態空間上の運動として扱われる．ここで，(7) 式において θ_2 は周期 2π の周期座標であるので，(7) 式で記述される第 2 リンクの振舞いは Fig. 2(a) の円筒形状状態空間上に表現される．この場合 2 次元平面上の運動と異なる点は，円筒面を取り巻く，いわゆる第 2 種周期解が現れることである⁷⁾．そこで，この円筒面を取り巻く第 2 種周期解の解軌道を表現するため，シリンダ面を円筒軸 $\dot{\theta}_2$ 方向に展開した Fig. 2(b) に示す円筒形位相面図を用いることにする．円筒形位相面図は同心円から構成されており，水平軸を 0 として反時計回りの角度が第 2 リンクの回転角 θ_2 を表し，小さい円の円周上を 0 として半径方向（外向きに正，内向きに負）に角速度 $\dot{\theta}_2$ を表す．また Fig. 2(b) における二つの黒丸は，後述するポアンカレ写像上の周期点を表す．

[†]このような制御方法は，参考文献 2) において既に非ホロノミックマニピュレータの制御方法の一つとして提案され，その有効性が示されている．

(7) 式を一般的に表す方程式として, パラメータ λ を含んだ 2 次元非自律系常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda) \quad (8a)$$

$$x = (\theta_2, \dot{\theta}_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda = (n_1, n_2, \nu, A) \in \mathbb{R}^4 \quad (8b)$$

を考える. ここで $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ はなめらかな写像とする. また (6) 式が時刻 t に関して周期的であることから, f も時刻 t に関して周期的となり, その周期は $T = 2\pi/\nu$ である. さらに, (8) 式の $t = t_0$ において初期値 $x = x_0$ を通る解 $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ は常に存在し, そしてその解は唯一であることも仮定しておく. もちろん (7) 式はこの条件を満足する. 時刻 t に関して周期的である条件を用いて, ボアンカレ写像を

$$T_\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \\ x_0 \rightarrow T_\lambda(x_0) = \varphi(T, t_0, x_0, \lambda) \quad (9)$$

と定義する. これら円筒形位相面図と外力の周期 $2\pi/\nu$ ごとの時間サンプリングで定義したボアンカレ写像を用いることにより, マニピュレータにおける第 2 リンクの挙動の変化 (数学的には周期解の分岐現象) の概要を知ることができる⁶⁾.

Fig. 2 Phase trajectory on cylindrical state space and phase portrait

3. 解析手法

3.1 周期解の数値計算法

周期 $2\pi m/\nu$ の周期解は, ボアンカレ写像 T_λ の m 周期点に対応する. T_λ の m 周期点を求めるためには

$$F(x_0) = T_\lambda^m(x_0) - x_0 = 0 \quad (10)$$

を Newton 法を用いて解けばよい. ここで, $T_\lambda^m(x_0) = \varphi(mT, t_0, x_0, \lambda)$ である. (10) 式における固定点の第 k 次近似値を $x_0^{(k)}$ とすれば, (10) 式の第 $k+1$ 次近似値を得るための繰返しアルゴリズムは,

ステップ 1 初期値 $x_0^{(0)}$ を与える.

ステップ 2 近似解の修正量 $h = x_0^{(k+1)} - x_0^{(k)}$ として, 近似解 $x_0^{(k+1)}$ を $x_0^{(k)}$ より,

$$x_0^{(k+1)} = x_0^{(k)} + h \quad (11)$$

$$\frac{\partial F(x_0^{(k)})}{\partial x_0} h = -F(x_0^{(k)}) \quad (12)$$

を解くことにより求める.

ここで Newton 法に必要なヤコビ行列は

$$\frac{\partial F(x_0^{(k)})}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi(mT, t_0, x_0, \lambda)}{\partial x_0} - I \quad (13)$$

I: 2×2 の単位行列

となり, (13) 式における行列の各要素は, (8) 式の初期値に関する第 1 変分方程式を数値積分することにより求めることができる.

3.2 分岐の分類と分岐パラメータの数値計算法

(8) 式の固定点 x_0 の位相的性質 (安定性) は, 3.1 で求めた (10) 式の初期値に関するヤコビ行列 $\partial T_\lambda(x_0)/\partial x_0$ の固有値, すなわち (9) 式の特性方程式

$$\chi(\mu) = \det \left[\frac{\partial T_\lambda(x_0)}{\partial x_0} - \mu I \right] = 0 \quad (14)$$

の根 μ_1, μ_2 の値により議論できる. したがって (14) 式は分岐の条件を与える式となっており, 次に述べる方法によって各分岐の分岐パラメータを求めることができる.

(1) 接線分岐

この分岐はあるパラメータで一つの固定点が発生・消滅する現象を生じる. 実際のマニピュレータでは, 定常状態としての新たな周期運動が発生する. その発生条件は (14) 式の 1 根が $\mu = 1$ となることである. したがって (10) 式と $\chi(1) = 0$ を連立させ, 変数 (x_0, λ) に関して Newton 法で解けばよい.

(2) 周期倍分岐

あるパラメータで一つの固定点が 2 点に分かれる現象を生じる分岐である. 実際のマニピュレータにおいては, 定常状態としての周期運動の周期を 2 倍にする作用を及ぼす. この分岐が起こる条件は, (14) 式の 1 根が $\mu = -1$ となることである. したがって (10) 式と $\chi(-1) = 0$ との連立方程式を変数 (x_0, λ) に関して同様に解けばよい.

(3) D 型分枝

(8) 式が有する何らかの対称性が破壊されて生じる分岐であり, あるパラメータにおいて, 一つの安定な固定

点が二つの安定固定点と、一つの不安定固定点とに分かれる。実際のマニピュレータにおいては、一つの定常状態の周期運動が分離して二つ観測されるようになる。なお、この分岐の発生条件は (14) 式の 1 根が $\mu=1$ となることであるため、固有値のみでは接線分岐との区別ができない。しかし D 型分岐は、1 周期積分を施して $\mu=1$ となった固有値は、半周期だけ積分すれば $\mu=-1$ となる性質を持つことから、接線分岐を求める条件にこの条件を加えればよい。

これら (10), (14) 式の連立方程式を Newton 法で解く際に現れるヤコビ行列の計算には、(8) 式の初期値に関する第 1 変分方程式、第 2 変分方程式およびパラメータ λ に関する変分方程式を用いる。また以上に述べた固定点の分岐パラメータ計算アルゴリズムは、 m 周期点についても同様に適用できる。

4. 解析結果

4.1 解の分岐に関する力学系の性質

【性質 1】 (7) 式は、速度指令パラメータ A に関して対称性を有する。したがって、 $A \geq 0$ の領域についてのみ解の性質を調べればよい。

(証明) 初期値を $(\theta_2, \dot{\theta}_2) \rightarrow (-\theta_2, -\dot{\theta}_2)$ とすれば、

$$\begin{aligned} f(t, -x, n_1, n_2, A, \nu) \\ = -f(t, x, n_1, n_2, -A, \nu) \end{aligned} \quad (15)$$

が成立する。

【性質 2】 (7) 式は時間推移を伴う反転変換に対して不変な対称性を有する。

(証明) 初期値を $(\theta_2, \dot{\theta}_2) \rightarrow (-\theta_2, -\dot{\theta}_2)$ とし、時間軸を $t \rightarrow t + M\pi/\nu$ ($M=1, 3, 5, \dots$) とすれば、

$$\begin{aligned} f\left(t + \frac{M\pi}{\nu}, -x, n_1, n_2, A, \nu\right) \\ = -f(t, x, n_1, n_2, A, \nu) \end{aligned} \quad (16)$$

が成立する。

【性質 3】 初期条件 $x(t_0) = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda) = x_0$ を満たす (7) 式の解を

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \quad (17)$$

としたとき、

$$\begin{aligned} z(\tau) = -\varphi\left(\tau, t_0 + \frac{M\pi}{\nu}, x_0, \lambda\right) \\ M=1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

も (7) 式の解となる。ただし、 $\tau = t + M\pi/\nu$ である。なお $x(t) = z(\tau)$ ならば、周期解 $x(t)$ 自身が時間推移を伴う反転変換に対して対称性を有する一つの解となり、 $x(t) \neq z(\tau)$ ならば二つの異なった解となる。

(証明) 性質 2 を用いて

$$\begin{aligned} \frac{dz(\tau)}{d\tau} &= -\frac{d}{d\tau} \varphi\left(\tau, t_0 + \frac{M\pi}{\nu}, x_0, \lambda\right) \\ &= -f\left(\tau, \varphi\left(\tau, t_0 + \frac{M\pi}{\nu}, x_0, \lambda\right), \lambda\right) \\ &= f\left(\tau, -\varphi\left(\tau, t_0 + \frac{M\pi}{\nu}, x_0, \lambda\right), \lambda\right) \\ &= f(\tau, z(\tau), \lambda) \end{aligned} \quad (19)$$

となり、(18) 式も (7) 式の解となる。

【性質 4】 第 2 種周期解に関しては、任意のパラメータに対して左回りの解（進行波解）と右回りの解（後退波解）の二つの解が同時に発生する。

(証明) 参考文献 8) 参照。

【性質 5】 第 1 種周期解の Neimark-Sacker 分岐⁹⁾は発生しない。ゆえに回転運動の場合を除いて、第 2 リンクの挙動が準周期となる運動を行うことはない。

(証明) (7) 式は 2 次元であるから、(8) 式において $f = (f_1, f_2)^t$, $x = (\theta_2, \dot{\theta}_2)^t = (x, y)^t$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^t$, $x_0 = (x_0, y_0)^t$ とする。ただし肩付記号 t は転置を表す。

このとき特性方程式は

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} - \mu & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} - \mu \end{bmatrix} \\ = \mu^2 - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \right) \mu + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \end{aligned} \quad (20)$$

である。(20) 式の根を μ_1, μ_2 とすると、根と係数の関係より

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \quad (21)$$

となる。ここで (21) 式の右辺の各要素は初期条件 $X(0) = I$ における行列変分方程式 $(\dot{X} = B(t)X)$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \end{bmatrix} \quad (22)$$

の行列解の要素である。リュービルの公式¹⁰⁾により、

$$\begin{aligned} \det X &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \\ &= |X(0)| \cdot \exp \int_0^T \text{tr} B(t) dt \\ &= |I| \cdot \exp \int_0^T \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dt \end{aligned} \quad (23)$$

が成り立つので、(21), (23) 式より

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \exp \int_0^T \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dt \quad (24)$$

となる. (7) 式において $\partial f_1 / \partial x = 0$, $\partial f_2 / \partial y = -n_2$ であるから, $n_2 > 0$ において (24) 式の関係式より

$$0 \leq \exp(-n_2 T) = \mu_1 \cdot \mu_2 < 1 \quad (25)$$

が成立する. ただし等号成立は $n_2 = 0$ のときのみである. よって, ポアンカレ写像上の固定点 x_0 における複素共役な二つの根が単位円を横切ることはない. すなわち Neimark-Sacker 分岐は発生しない. $\square$

4.2 数値解析

(7) 式におけるシステムパラメータを $n_1 = 2.162$, $n_2 = 0.0216$ として数値解析を行った. なおこれらのパラメータ値は, Table 1 における粘性摩擦係数は参考文献 8) の値, それ以外の物理定数については参考文献 2) の値を用いて算出した. 4.1 で述べた (7) 式の性質 3, 4 を検証すると共に, (6) 式で記述される速度制御された周期運動において, その周期運動の周波数 ν および振幅 A によって第 2 リンクに生じる非線形現象について解析した.

4.2.1 力学的性質の検証

性質 3 で述べた, 初期条件 $x(t_0)$ を満たす (7) 式の解 $x(t)$, $z(\tau)$ を Figs. 3, 4 に示す. ここで円筒形位相面図における縦横軸の座標値は, $\theta_2[\text{rad/s}]$ を表しており, 以降の円筒形位相面図についても同様である (Fig. 2(b) 参照). Fig. 3 は $x(t) = z(\tau)$ の場合の周期解を示しており, したがって Fig. 3 に示す周期解は時間推移を伴う反転変換に対して対称性を有する一つの周期解となっている. 一方 Fig. 4 は $x(t) \neq z(\tau)$ の場合の周期解を示しており, ゆえに Fig. 4 は二つの異なる周期解となっている. また, 性質 4 で述べた左回りの解 (進行波解) および右回りの解 (後退波解) を Fig. 5 に示す. なお Fig. 4 も性質 4 を満たす解の一例となっている.

Fig. 3 A solution with symmetry: $x(t) = z(\tau)$

Fig. 4 Different two solutions: $x(t) \neq z(\tau)$

Fig. 5 Counterclockwise rotating motion and clockwise rotating motion

4.2.2 2 パラメータ分岐図による解析

3. で述べた数値解析法を用いて ν - A パラメータ平面における周期解の分岐集合を求めた. その分岐図を Fig. 6 に示す. ここで, 以下に示す分岐図における分岐曲線として次の記号を用いた.

- G_l^m 第 1 種 m 周期解の接線分岐
- I_l^m 第 1 種 m 周期解の周期倍分岐
- D_l^m 第 1 種 m 周期解の D 型分岐
- G_l^{mR} 第 2 種 m 周期解の接線分岐
- I_l^{mR} 第 2 種 m 周期解の周期倍分岐

下付の数字 l は異なった種類の周期解を区別するために便宜上付けている. ただし下付の数字が同じでも肩付数字の R の有無で, 異なった周期解を表していることに注意されたい. Fig. 6 において, すべての分岐曲線は原点 $(\nu, A) = (0, 0)$ を中心として放射状に延びている. またあるパラメータ領域においては, $I_1^1 \rightarrow I_1^2 \rightarrow I_1^4$, $I_1^{1R} \rightarrow I_1^{2R} \rightarrow I_1^{4R}$, および $I_4^1 \rightarrow I_4^2$ の周期倍分岐の連鎖が起こっている. さらに Fig. 6 の左半分領域で, システムの対称性破壊分岐である D 型分岐 (D_4^1) も生じている.

Fig. 6 Bifurcation diagram for $\nu-A$ plane

(1) さまざまな周期運動

Fig. 6において、振動周波数 ν および振動の振幅 A をさまざまな値に設定することで、数種の周期解を観測することができる。Fig. 7は、Fig. 6に示した(a)~(f)の各点における解軌道を円筒形位相面図で表している。Fig. 7(a)は、 $A=0$ の水平軸と I_1^1 とで囲まれたパラメータ領域で存在する非共振運動を示している。Fig. 7(b)は G_1^{1R} と I_1^{1R} とで囲まれたパラメータ領域で存在する第2種周期解、すなわち回転運動を表している。Fig. 7(c), (d)はそれぞれ G_4^1 , G_2^1 で発生する共振運動を表しており、各共振運動が存在するパラメータ領域はそれぞれ G_4^1 と D_4^1 で囲まれた領域、 G_2^1 と I_2^1 とで囲まれた領域である。その他、Fig. 7(e)は G_3^3 と I_3^3 とで囲まれた領域で存在する3周期運動であり、Fig. 7(f)は G_3^{3R} と I_3^{3R} とで囲まれたパラメータ領域で存在する3周期回転運動である。

(2) カオスの運動

本論文では、 $\nu-A$ 平面上の $(\nu, A) = (1.0, 1.89)$ において観測されたカオスアトラクタ[†]について、その発生過程を分岐図および円筒形位相面図を用いて詳細に解析した。Fig. 8はFig. 6における左上半分領域の拡大図を表している。Fig. 8において、 p 点から矢印 L に沿ってパラメータ A を増加させた場合の解の振舞いを解析した。 G_4^1 と D_4^1 で囲まれる領域、すなわち p 点においては、Fig. 7(c)に示す共振状態が起こっている。パラメータ A の増加によって対称性破壊分岐曲線 D_4^1 を横切った際、Fig. 7(c)の共振解はFigs. 10(a), (b)に示す二つの安定な共振解に分れる。その後 I_4^1 , I_4^2 を通過することに

Fig. 7 Resonant motion, non-resonant motion, rotating motion and the other periodic motions

より、Figs. 10(c), (d)の2周期共振解、4周期共振解へと周期倍分岐が起こる。最終的にこの周期倍分岐の連鎖によってFig. 7(c)で示す共振解は、Fig. 10(e)に示すカオス状態へと進展する。ここでFig. 10(f)は、Fig. 10(e)に示すカオス状態について、ポアンカレ写像によるアトラクタを表示している。また、この分岐過程をFig. 9に1パラメータ分岐図で示した。AD点($A=1.82$)においてD型分岐が生じ、 AI_1 ($A=1.88$), AI_2 ($A=1.8815$)でそれぞれ周期倍分岐が起こり、その後 θ_2 の全空間を占めるカオス状態へと移行している。

(3) 速度指令パラメータ A の連続的变化に対するシステムの振舞い

速度制御された周期運動において、その速度指令 A を連続的に変化させた場合の第2リンクの振舞いを解析し

[†]摩擦が無い場合の同様な系におけるカオスの存在と基本的考察は、参考文献2)で報告されている。

Fig. 8 Enlarged bifurcation diagram of Fig. 6

Fig. 9 Bifurcation process of the resonant solution shown in Fig. 7(c)

た. Figs. 11, 12 は, 初期値を $(\theta_2, \dot{\theta}_2) = (0, 0)$ とし, ν をそれぞれ $\nu = 0.5, \nu = 4.0$ に固定し, A を 0.01 ずつ増加させた場合の 1 パラメータ分岐図である. Fig. 11 ($\nu = 0.5$) において, $A \in [0.0, 1.07]$ では, 周期倍分岐, 周期倍分岐の連鎖により発生する定常状態としてのカオス運動 (カオストラクタ), および周期解の窓 (周期運動) が観測される. また $A \in [1.07, 2.0]$ においては, $A = 1.35, A = 1.58$ の 2 箇所周期解の窓が見られるものの, その他のパラメータでは定常状態としてのカオス運動が観測された. 一方 Fig. 12 ($\nu = 4.0$) においては, ある周期解から周期倍分岐の連鎖を経て過渡の状態としてカオス状態へ移行した後, 再びある周期解へ落ち着くといった過程を繰り返しているが, 定常状態としてのカオス運動は観測されなかった.

5. おわりに

本論文では, 1 自由関節を有する 2 リンク平面マニピュレータの力学的性質について分岐理論の立場から考察し

Fig. 10 Bifurcation process of a resonant solution into chaotic states

た. 適当な制御トルクによって第 1 関節を繰返し運動させた場合について, ラグランジュ運動方程式を用いて第 2 リンクの力学系 (運動方程式) を導き, 解の分岐に関する力学系の一般的な性質:

- パラメータ A について対称性を有する.
- 時間推移を伴う反転変換 ($t \rightarrow t + M\pi/\nu$, $M = 1, 3, 5, \dots$) に対して不変な対称性を有する.
- 時間推移・反転に対する対称性が崩壊した場合, その対称性を有していた解は二つの異なった解となる.
- 第 2 種周期解に関しては, 任意のパラメータに対して, 進行波解および後退波解が同時に発生する.
- 回転運動の場合を除いて, 第 2 関節が準周期となる運動をすることはない. すなわち第 1 種周期解の Neimark-Sacker 分岐は発生しない.

を明らかにした. また円筒形位相面図を用いて, 性質 3, 4 を数値解析により検証した. さらに 3. で述べた数値解

Fig. 11 Bifurcation process at $\nu = 0.5$ Fig. 12 Bifurcation process at $\nu = 4.0$

析法を用い、円筒形相平面図による周期運動の観測、および2パラメータ分岐図等を作成することで、共振運動、非共振運動、カオスの運動などの非線形現象が発生するパラメータ領域を定量的に調査した。また、繰返し運動の速度パラメータ A が連続的に変化した場合の分岐現象を1パラメータ分岐図を用いて解析した。

本論文で対象とした非駆動関節を有するマニピュレータは、非ホロノミックシステムの一例である。システムに本質的に内在する非線形性を利用した制御システムの開発は、システムと制御技術とが一体となって初めて機能する新しいシステムを創造する可能性がある。本論文で解析したマニピュレータの非線形特性と非ホロノミック性との関連性を調査すると共に、これらの力学的性質を積極的に利用した制御システムの開発は今後の重要な課題である。

参考文献

- 1) 吉川：ロボット制御基礎論，コロナ社（1988）
- 2) 中村，濃沼，鈴木：自由関節を持つ平面アームのカオスの挙動と非線形制御；日本ロボット学会誌，Vol. 14, No. 4,

- pp. 602-611（1996）
- 3) 荒井：2階の非ホロノミック系の制御；計測と制御，Vol. 36, No. 6, pp. 404-410（1997）
- 4) R. W. Brockett: *Asymptotic Stability and Feedback Stabilization, Differential Geometric Control Theory* (R. W. Brockett, R. S. Millman and H. J. Sussmann, Eds.), Birkhäuser, Boston, pp. 181-191（1983）
- 5) 島，山下，川村，石動，渡邊，横道：非線形システム制御論，コロナ社（1997）
- 6) H. Kawakami: Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits: computation of bifurcation values of the system parameters; *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-31, No. 3, pp. 248-260（1984）
- 7) 川上：シリンダ（円筒形）相曲面上の強制振動に関する定性的性質；電子情報通信学会論文誌，Vol. J64-A, No. 11, pp. 916-923（1981）
- 8) 田中，川上，上田：速度制御された繰返し運動を行う天井走行形1リンクマニピュレータに見られる非線形現象；日本機械学会論文集（C編），Vol. 63, No. 611, pp. 172-179（1997）
- 9) S. Wiggins: 非線形の力学系とカオス（下），シュプリンガー・フェアラーク東京（1992）
- 10) ポントリヤギン：常微分方程式，共立出版（1963）