観測ノイズを伴う離散時間多変数系に対する フィードバック制御系の一構成法*

加瀬 渡**

A Design of Pole Assignment Control Systems for a Discrete-Time Multivariable Plant with Measurement Noise*

Wataru KASE**

Recently, a design of model matching and adaptive control systems under the presence of measurement noise is reported by employing a non-minimal order state observer. But this method can be only used for the single-input, single-output plant which is stably invertible. In this paper, it will be shown that the idea is also applicable to the multivariable plant which may not have a stable inverse. Since the proposed method can be implemented by simple calculation, it is adequate for an adaptive control in which the controllers must be calculated on line.

1. はじめに

近年, 制御器を冗長化することで生じる自由度を利用し, 制御系のロバスト性を改善する研究が数多くなされている¹⁾⁻⁶⁾. これらの研究の中で, 本論文では特に参考文献6)の結果を拡張することを考える. 参考文献6)では, 離散時間 Exact Model Matching (EMM) 系において, インタラクタ, オブザーバ多項式の零点がすべて原点に存在するという仮定のもとで, オブザーバ多項式の次数を冗長化すれば観測ノイズが出力に及ぼす影響を抑えることができることを示している. ノイズの影響を考慮した設計には, 共分散制御^{7),8)}や H_∞ 制御に基づく方法⁹⁾がある. 参考文献7),8)では, 状態変数の共分散行列をあらかじめ指定された正定行列に一致させるような制御器が, 参考文献9)では, 外乱から被制御量までの伝達関数の無限大ノルムをあらかじめ指定された正数以下にするような制御器が設計されている. すなわち, いずれも最適な設計法である. これに対して, 参考文献6)ではインタラクタ, オブザーバが限定されているが, 最適な制御系が構成されている.

参考文献6)の結果を非最小位相系に拡張する研究もなされている¹⁰⁾. ところが, この研究では, 出力の分散の上限値を用いて制御系を構成しているため, 得られた制御器の性能が保守的なものになってしまう. したがって, このような保守性を取り除くことは重要な課題である.

本論文では, 参考文献10)の評価法を見直し, よりタイトな評価を用いて参考文献6)の結果を多変数系に拡張をすることを目的とする. 参考文献6)では, 制御器を冗長化するために制御対象のマルコフパラメータを利用した制御器のパラメトリゼーションが利用されている. この方法は, 最小位相系の場合の設計方程式 (Diophantine 方程式と呼ばれる) が特殊な構造を有しているために可能である. しかしながら, 参考文献10)では非最小位相系が考察されており, マルコフパラメータを利用した方法は適用できない. そこで, 参考文献10)では, Youla パラメトリゼーションを利用した方法が示されている. しかしながら, 多変数系¹¹⁾を考えるとときには非常に複雑なものになってしまう. そこで, 本論文では, 拡張割算アルゴリズムを利用したパラメトリゼーション^{12),13)}を適用する.

参考文献11)では, 最小位相系の場合が扱われているが, この文献でも出力の分散の上限値を評価して制御系が構成されており, 保守的なものとなっている. 本論文では, EMM の閉ループ系の基本構造を与える逆インタラクタ化¹⁵⁾に対して観測ノイズを考慮した設計法も示す.

* 原稿受付 1998年4月23日

** 大阪工業大学 工学部 Faculty of Engineering, Osaka Institute of Technology; 5-16-1, Omiya, Asahi-ku, Osaka 535-8585, JAPAN

Key Words: discrete-time systems, polynomial matrix approach, measurement noise, extended division algorithm, pseudoinverse.

インタラクタが非対角行列の場合には、インタラクタのパラメータがノイズによる出力の共分散行列に含まれるため、単純に参考文献6)の方法を適用することができない。逆インタラクタ化も任意極配置制御の特殊な場合であるため、本論文で提案する方法が有効である。

本論文では、「多項式行列 $D(z)$ の次数」とは、 $D(z)$ の全要素中の最高次数を意味し、また、「多項式行列 $D(z)$ の i 列目の列次数」とは、 $D(z)$ の i 列目の全要素中の最高次数を意味し、記号 $\partial_{ci}[D(z)]$ で表す。さらに、「多項式行列 $D(z)$ が列プロパー」とは、 $\mu_i := \partial_{ci}[D(z)]$ として、

$$D(z) = D_0 \begin{bmatrix} z^{\mu_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z^{\mu_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z^{\mu_m} \end{bmatrix} + \text{低列次数項}$$

と表したとき、

$$\Gamma_c[D(z)] := D_0.$$

が正則であることを意味する。詳しくは、参考文献16), 17)を参照されたい。

2. 問題の設定

以下の制御対象を考える。

$$y(t) = N(z)D^{-1}(z)u(t) \quad (1)$$

ここで、 $u(t) \in \mathbf{R}^m$ は入力、 $y(t) \in \mathbf{R}^p$ は出力、 $D(z)$ は $m \times m$ の正則多項式行列、 $N(z)$ は $p \times m$ の多項式行列であり、

$$\begin{aligned} \partial_{ci}[D(z)] &= \mu_i, \quad \partial_{ci}[N(z)] \leq \mu_i - 1 \\ n &:= \sum_{i=1}^m \mu_i, \quad \mu := \max_{1 \leq i \leq m} \mu_i \end{aligned} \quad (2)$$

を満たすものとする。 z は時間進み演算子で、 t は整数である。さらに、一般性を失うことなく $D(z)$ は列プロパーであると仮定する¹⁶⁾。また、実際に観測される出力 $\bar{y}(t)$ は真の出力と観測ノイズの和として以下のように表せるものとする (Fig. 1 参照)。

$$\bar{y}(t) = y(t) + w(t) \quad (3)$$

まず、以下の仮定を設ける。

- A1 $D(z)$ と $N(z)$ は互いに右素で、 $D(z)$ は正則。
- A2 $N(z)D^{-1}(z)$ は厳密にプロパー。
- A3 $m \times m$ 希望閉ループ多項式 $D_*(z)$ 、オブザーバの減衰特性を指定する多項式 $H(z)$ は次式を満たす。

Fig. 1 Feedback control systems with measurement noise

$$\begin{aligned} \partial_{ci}[D_*(z)] &= \partial_{ci}[D(z)], \quad \Gamma_c[D_*(z)] = \Gamma_c[D(z)] \\ H(z) &= z^{d-1} I_m \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、整数 d は $N(z)D^{-1}(z)$ の可観測指数の最大値 ν 以上の値である。

A4 $w(t)$ は以下の性質を満たす白色雑音である。

$$\begin{aligned} E[w(t)] &= 0, \quad E[w(t)w^T(t)] = \Sigma \geq 0, \\ E[w(t)w^T(t+k)] &= 0, \quad k \neq 0 \text{ (integer)} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $E[\cdot]$ は期待値を表すものとする。

設計仕様は、

S1 閉ループ系の特性多項式を指定する

S2 観測ノイズ $w(t)$ による出力の分散を、あらかじめ指定された多項式行列 $D_*(z)$, $H(z)$ に対して最小化する

である。

以下の Diophantine 方程式を考える。

$$X(z)D(z) + Y(z)N(z) = H(z)[D(z) - D_*(z)] \quad (6)$$

上式の解多項式行列 $X(z)$, $Y(z)$ を利用して、制御入力を

$$u(t) = H^{-1}(z)X(z)u(t) + H^{-1}(z)Y(z)\bar{y}(t) + r(t) \quad (7)$$

と与えることにより、

$$y(t) = N(z)D^{-1}(z)[r(t) + H^{-1}(z)Y(z)w(t)] \quad (8)$$

となり、閉ループ系の内部安定性が保証される。ただし、 $r(t)$ は外部基準入力である。

3. 拡張割算アルゴリズムを用いた制御器のパラメトリゼーション

(6) 式を解く方法はいくつか報告されているが、本論文での問題を取り扱ううえで都合の良い拡張割算アルゴリズムを利用した方法を採用する。拡張割算アルゴリズムは、以下の補題で与えられる。証明は参考文献12), 13)を参照されたい(後の都合上、原論文とは異なった表現をする)。

【補題 1】 与えられた多項式行列 $D(z)$, $N(z)$, $P(z)$ に対して、次式を満たす $m \times m$ 多項式行列 $Q(z)$ と $R(z)$ が一意に存在する。

$$\begin{aligned} P(z)N(z) &= Q(z)D(z) + R(z) \\ R(z)D^{-1}(z) &: \text{strictly proper} \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 $D(z)$ は列プロパーな正方行列、 $N(z)D^{-1}(z)$ は厳密にプロパーな有理関数行列、 $P(z)$ は次数が k の $m \times p$ 多項式行列であるとする。さらに、 (A, B, C) を $N(z)D^{-1}(z)$ の可制御正準実現としたとき、 $Q(z)$ と $R(z)$ は次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} Q(z) &= P_k^T S_{I_m}^{k-1}(z) \\ R(z) &= P_k O_k S^{\mu_i-1}(z) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $P(z) = z^k P_k + \dots + P_0$ としたとき、

$$\begin{aligned} P_k &= [P_k \ \dots \ P_0] \\ P(z) &= P_k S_{I_p}^k(z) \\ O_k &= \begin{bmatrix} CA^k \\ \vdots \\ CA \\ C \end{bmatrix}, \quad S_{I_p}^k(z) = \begin{bmatrix} z^k I_p \\ \vdots \\ z I_p \\ I_p \end{bmatrix} \\ T_{k-1} &= \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{k-1}B \\ 0 & CB & \dots & CA^{k-2}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & CB \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ S^{\mu_i-1}(z) &= \text{block diag} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{\mu_i-1} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

とする。□

上記の補題を以下のように適用すれば (6) 式の解法を導くことができる。まず、多項式行列 $H(z)$, $X(z)$, $Y(z)$ が

$$\begin{aligned} H(z) &= I_m z^{d-1} + H_{d-2} z^{d-2} + \dots + H_0 \\ X(z) &= X_{d-2} z^{d-2} + X_{d-3} z^{d-3} + \dots + X_0 \\ Y(z) &= Y_{d-1} z^{d-1} + Y_{d-2} z^{d-2} + \dots + Y_0 \end{aligned}$$

のとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{d-1} &:= [I_m \ H_{d-2} \ \dots \ H_0] \\ \mathcal{X}_{d-2} &:= [X_{d-2} \ \dots \ X_0] \\ \mathcal{Y}_{d-1} &:= [Y_{d-1} \ \dots \ Y_0] \end{aligned} \quad (11)$$

と表すことにする。(6) 式を変形して、

$$\begin{aligned} X(z) + Y(z)N(z)D^{-1}(z) \\ = H(z)[D(z) - D_*(z)]D^{-1}(z) \end{aligned} \quad (12)$$

を得る。 $N(z)D^{-1}(z)$ の可制御正準形での最小実現を (A, B, C) , $[D(z) - D_*(z)]D^{-1}(z)$ のそれを (A, B, F) とし、 $H(z) = [I_m \ 0_{m \times m(d-1)}] S_{I_m}^{d-1}(z)$ に注意すると、補題 1 から次式が成立する。

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{d-1} \mathcal{O}_{d-1} &= \mathcal{H}_{d-1} \mathcal{O}_{d-1}(F) \\ &= F A^{d-1} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $\mathcal{O}_{d-1}(F)$ は、 $\mathcal{O}_{d-1}$ において、 C を F で置き換えた行列である。一方、 $\mathcal{X}_{d-2}$ は (12) 式の多項式部分の関係から、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{d-2} &= \mathcal{H}_{d-1} \mathcal{T}_{d-2}(F) - \mathcal{Y}_{d-1} \mathcal{T}_{d-2} \\ &= [FB \ \dots \ F A^{d-2} B] - \mathcal{Y}_{d-1} \mathcal{T}_{d-2} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $\mathcal{T}_{d-2}(F)$ も先と同様に、 $\mathcal{T}_{d-2}$ において C を F で置き換えた行列である。(14) 式において注意すべきことは、 $\mathcal{Y}_{d-1}$ がある行列に決まれば、自動的に $\mathcal{X}_{d-2}$ も決まるという点である。したがって、4. で考える最適化問題の拘束条件は (13) 式だけでよい。(13) 式を満たす $\mathcal{Y}_{d-1}$ は、 d の定義より一般に無数に存在し、したがって、(13) 式、(14) 式は制御器の一つのパラメトリゼーションを与える（詳しくは、参考文献 13) を参照されたい）。

(注意) Diophantine 方程式の解法に関して、参考文献 14) の (25) 式でも本論文の (13) 式と同等の関係式が示されている。その意味では、参考文献 14) の結果から容易に制御器のパラメトリゼーションが得られると思われるかもしれない。しかしながら、参考文献 14) では $Y(z)$ の全要素中の次数の下限が n であるのに対し、本論文では $\nu-1$ と小さい。また、参考文献 14) では、フィードバックゲイン行列が陽な形で表れず、結果が煩雑となる。それに対し、本論文では F がフィードバックゲイン行列となっており¹³⁾、(13) 式、(14) 式に示すように結果も比較的シンプルなものとなっている。さらに、参考文献 14) では同文献 (6) 式の割算が必要であるが、本論文ではそれが無い。すなわち、演算量の面でも本論文の方が有利である。

4. 制御系の設計

4.1 任意極配置の場合

(8) 式に示すように、観測ノイズ $w(t)$ から出力 $y(t)$ に至る入出力関係は

$$y(t) = z^{1-d} N(z) D_*^{-1}(z) Y(z) w(t) \quad (15)$$

となる。参考文献10),11) では、上式から

$$y(t) = z^{1-d} N(z) D_*^{-1}(z) \hat{y}(t), \quad \hat{y}(t) = Y(z) w(t)$$

と分割し、

$$\|y(t)\| \leq c_1 + c_2 \max \|\hat{y}(t)\|$$

を満たす定数 c_1, c_2 が存在することから、 $\hat{y}(t)$ の共分散行列のノルムを最小化することで制御目的が達成されるとしている。しかしながら、この方法では $\|y(t)\|$ の上限を小さくしているだけであり、共分散行列のノルム自身が最小化されている保証はない。

さて、 $N(z) D_*^{-1}(z)$, $[D(z) - D_*(z)] D_*^{-1}(z)$ の状態表現と Doyle の記法³⁾を利用すると、

$$\begin{aligned} N(z) D_*^{-1}(z) &= N(z) D^{-1}(z) D(z) D_*^{-1}(z) \\ &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -F & I \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} A_F & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \\ &= [V_0 \ V_1 \ \cdots \ V_f \ \cdots] \begin{bmatrix} z^{-1} I_m \\ z^{-2} I_m \\ \vdots \\ z^{-f} I_m \\ \vdots \end{bmatrix} \\ A_F &:= A + BF, \quad V_i := CA_F^i B \\ V &:= [V_0 \ V_1 \ \cdots \ V_f \ \cdots] \end{aligned} \quad (16)$$

と書ける。よって、

$$\begin{aligned} z^{1-d} N(z) D_*^{-1}(z) Y(z) &= V \mathcal{M}(\mathcal{Y}_{d-1}) \\ \mathcal{M}(\mathcal{Y}_{d-1}) &:= \begin{bmatrix} Y_{d-1} & \cdots & Y_0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & Y_{d-1} & \cdots & Y_0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & Y_{d-1} & \cdots & Y_0 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。したがって、観測ノイズ $w(t)$ による出力 $y(t)$ の共分散行列は、

$$\begin{aligned} E[y(t) y^T(t)] &= V \mathcal{M}(\mathcal{Y}_{d-1}^\Sigma) \{V \mathcal{M}(\mathcal{Y}_{d-1}^\Sigma)\}^T \\ \mathcal{Y}_{d-1}^\Sigma &:= \mathcal{Y}_{d-1} (I_d \otimes \Sigma^{1/2}) \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、 $\otimes$ はクロネッカー積を表す。これより、設計仕様は以下の最適化問題を解くことで満たされる。

$$\text{minimize } \|V \mathcal{M}(\mathcal{Y}_{d-1}^\Sigma)\|^2 \quad (18)$$

$$\text{subject to } \mathcal{Y}_{d-1} \mathcal{O}_{d-1} = F A^{d-1} \quad (19)$$

いま、行列のノルムとして、フロベニウスノルムを採用する。 $\mathcal{Y}_{d-1}$ の疑似逆行列を

$$\mathcal{O}_{d-1}^+ := (\mathcal{O}_{d-1}^T \mathcal{O}_{d-1})^{-1} \mathcal{O}_{d-1}^T \quad (20)$$

とする。ここで、 (A, B, C) は最小実現であり、 d の値が可観測指数の上限値以上なので、 $\mathcal{O}_{d-1}$ はフルランクである。すなわち、(19) 式は可解である。このとき、(19) 式の一般解は、

$$\mathcal{Y}_{d-1} = F A^{d-1} \mathcal{O}_{d-1}^+ - \Lambda_d (I_{dp} - \mathcal{O}_{d-1} \mathcal{O}_{d-1}^+) \quad (21)$$

と表せる。ただし、 Λ_d は $m \times dp$ 次元フリーパラメータ行列である。いま、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d &:= (I_{dp} - \mathcal{O}_{d-1} \mathcal{O}_{d-1}^+) (I_d \otimes \Sigma^{1/2}) \\ \mathcal{G}_d &:= F A^{d-1} \mathcal{O}_{d-1}^+ (I_d \otimes \Sigma^{1/2}) \end{aligned} \quad (22)$$

とくと、

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{Y}_{d-1}^\Sigma) &= \mathcal{M}(\mathcal{G}_d) - \mathcal{M}(\Lambda_d \mathcal{F}_d) \\ &= \mathcal{M}(\mathcal{G}_d) - (I_* \otimes \Lambda_d) \mathcal{M}(\mathcal{F}_d) \end{aligned} \quad (23)$$

となる。ただし、 I_* は無限大次元単位行列を意味する。また、 V の i 行目の行ベクトルを v_i 、 v_i の j 番目の要素を v_{ij} として、クロネッカー積と行展開¹⁷⁾を利用すれば、

$$\begin{aligned} v_i (I_* \otimes \Lambda_d) \mathcal{M}(\mathcal{F}_d) &= \text{rs}[I_* \otimes \Lambda_d] v_i^T \otimes \mathcal{M}(\mathcal{F}_d) \\ &= \text{rs}[\Lambda_d] V_i \mathcal{M}(\mathcal{F}_d) \\ V_i &:= \begin{bmatrix} v_{i1} I_{dp} & v_{i,m+1} I_{dp} & \cdots & v_{i,m(f-1)+1} I_{dp} & \cdots \\ v_{i2} I_{dp} & v_{i,m+2} I_{dp} & \cdots & v_{i,m(f-1)+2} I_{dp} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ v_{im} I_{dp} & v_{i,2m} I_{dp} & \cdots & v_{i,mf} I_{dp} & \cdots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

したがって、フロベニウスノルムの性質を利用すれば、

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{VM}(\mathcal{Y}_{d-1}^\Sigma)\|^2 \\
& \quad \|\mathcal{V}(I_* \otimes A_d)\mathcal{M}(\mathcal{F}_d) - \mathcal{VM}(\mathcal{G}_d)\|^2 \\
& = \left\| \begin{bmatrix} \text{rs}[A_d]V_1 \\ \text{rs}[A_d]V_2 \\ \vdots \\ \text{rs}[A_d]V_p \end{bmatrix} \mathcal{M}(\mathcal{F}_d) - \mathcal{VM}(\mathcal{G}_d) \right\|^2 \\
& = \|\text{rs}[A_d]\mathcal{P}_d - \text{rs}[\mathcal{VM}(\mathcal{G}_d)]\|^2 \\
& \mathcal{P}_d := \begin{bmatrix} V_1\mathcal{M}(\mathcal{F}_d) & \cdots & V_p\mathcal{M}(\mathcal{F}_d) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{25}$$

が成立する．以上から，最適化問題 (18) 式, (19) 式は，

$$J_d := \min_{A_d} \|\text{rs}[A_d]\mathcal{P}_d - \text{rs}[\mathcal{VM}(\mathcal{G}_d)]\|^2 \tag{26}$$

と同じであり， $\mathcal{P}_d$ の疑似逆行列を $\mathcal{P}_d^+$ とすれば，上式を最小化する A_d は

$$\text{rs}(A_d) = \text{rs}[\mathcal{VM}(\mathcal{G}_d)]\mathcal{P}_d^+ \tag{27}$$

と与えられる¹⁷⁾．

実際には， $\mathcal{V}$ の列数が無限大なので，上記のような計算是できない．そこで，適当な自然数 f を用いて，

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{f-1} &:= [V_0 \ V_1 \ \cdots \ V_{f-1}] \\
\mathcal{M}_f(\mathcal{Y}_d) &:= \left\{ \begin{bmatrix} Y_d & \cdots & Y_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_d & \cdots & Y_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & Y_d & \cdots & Y_0 \end{bmatrix} \right\} f \text{ blocks}
\end{aligned} \tag{28}$$

と定義し，(18) 式以降の議論で， $\mathcal{V}$ を $\mathcal{V}_{f-1}$ ， $\mathcal{M}(\cdot)$ を $\mathcal{M}_f(\cdot)$ と置き直して近似的に $A_{d,f}$ を求める．つぎに， f の値を一つ増やして $A_{d,f+1}$ を求める．このとき， $A_{d,f}$ と $A_{d,f+1}$ 差が設計者の許容する範囲内の値ならば $A_d = A_{d,f+1}$ とすればよい．そうでなければ， f を大きめに選び直す． $f \rightarrow \infty$ で最適値が求められるのだから，この作業はいずれは終了する．この値を (21) 式に代入すれば， $\mathcal{Y}_{d-1}$ が定まり，ついでこの値を (14) 式に代入すれば $\mathcal{X}_{d-2}$ が定まる．以上により，設計仕様を満たす制御器のパラメータが求められる．特に閉ループ系の極がすべて原点にあるとき，すなわち $\det D_*(z) = (\det \Gamma_c[D(z)])z^n$ のときには， $i \geq \mu$ を満たす自然数 i に対しては $V_i = 0$ であるが，一般に $i < \mu$ に対しては $V_i \neq 0$ であるので， $f \geq \mu$ とする必要がある．

以上は， d を ν 以上のある値に固定したときの議論であるが， $f \rightarrow \infty$ のときには，参考文献6)と同様に本手法でも d を大きくすることでノイズ抑制効果が増す．これは，参考文献10)では示すことができない点である．(18) 式を最小化するときの $\mathcal{Y}_{d-1}$ を $\mathcal{Y}_{d-1}^{opt}$ とする． d の値を一つ増やした場合，

$$\mathcal{Y}_d = [\mathcal{Y}_{d-1}^{opt} \ 0_{m \times p}] \tag{29}$$

と定義すると，

$$\mathcal{Y}_d \mathcal{O}_d = \mathcal{Y}_{d-1}^{opt} \mathcal{O}_{d-1} A = F A^d \tag{30}$$

なので，拘束条件 (19) 式は満たされる．また，

$$\mathcal{VM}(\mathcal{Y}_d) = [\mathcal{VM}(\mathcal{Y}_{d-1}^{opt}) \ 0_{m \times p}] \tag{31}$$

なので，

$$\begin{aligned}
J_{d+1} &\leq \|[\mathcal{VM}(\mathcal{Y}_{d-1}^{opt})(I_* \otimes \Sigma^{1/2}) \ 0_{m \times p}]\|^2 \\
&= J_d
\end{aligned} \tag{32}$$

である．以上から， $f \rightarrow \infty$ のとき d を大きくすることで，出力の共分散行列のノルムの最小値が小さくなることが示された．このことは十分大きな有限の f に対しても成立すると思われる．

4.2 逆インタラクタ化の場合

ここでは， $p=m$ ，すなわち，入出力数が等しく，かつ制御対象が最小位相系であるとき，

$$D_*(z) = K^{-1}\xi(z)N(z) \tag{33}$$

と選んだ場合について考える．ただし， $\xi(z)$ はインタラクタ行列で，

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)N(z)D^{-1}(z) = K \text{ (nonsingular)} \tag{34}$$

を満たす．とくに，

$$\begin{aligned}
\det \xi(z) &= z^q \\
q &:= \deg \det D(z) - \deg \det N(z)
\end{aligned} \tag{35}$$

と仮定する．

さて，この場合の観測ノイズから出力に至る入出力関係は，

$$y(t) = z^{1-d}\xi^{-1}(z)KY(z)w(t) \tag{36}$$

となる．ここで，(35) 式を考慮すると，

$$\begin{aligned}
\xi^{-1}(z)K &= \bar{V}_1 z^{-1} + \cdots + \bar{V}_q z^{-q} \\
\bar{V}_q &:= [\bar{V}_q \ \cdots \ \bar{V}_1]
\end{aligned} \tag{37}$$

と表すことができる．したがって，(36) 式は

$$y(t) = z^{1-d-q}\bar{V}_q \mathcal{M}_{q-1}(\mathcal{Y}_{d-1})S_I^{d-1}(z)w(t) \tag{38}$$

となる．したがって，以下の最適化問題を解くことによって設計仕様を満たす制御器を求めることができる．

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \|\bar{\mathcal{V}}_q \mathcal{M}_{q-1}(\mathcal{Y}_{d-1}^F)\| \\ & \text{subject to } \mathcal{Y}_{d-1} \mathcal{O}_{d-1} = F A^{d-1} \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、 F の具体的な計算手順については参考文献15), 11)を参照されたい。

以上により、逆インタラクタ化の場合も4.1と同じ問題に帰着されることが示された。逆インタラクタ化は任意極配置の特殊な場合なので、上記のことは当然の結果のように思われるが、ここで特に強調したいことは(35)式を仮定しているため、 $\bar{\mathcal{V}}_q$ が有限な行列となり、厳密に最適解を求めることができる点である。

5. 数値例

$D(z)$, $N(z)$ がつぎのように与えられているとする。

$$D(z) = \begin{bmatrix} z-1.2 & 0 \\ 0 & z^2+1.5z+0.5 \end{bmatrix}$$

$$N(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & z+0.2 \end{bmatrix}$$

この場合、 $z=-1.2$ なる不安定零点があり、可観測指数の最大値は2である。また、

$$D_*(z) = \begin{bmatrix} z+0.1 & 0 \\ 0 & z^2+0.1z+0.01 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0424 \\ 0.0424 & 0.0450 \end{bmatrix}$$

とした。この場合、(28)式における f の値を5とすることで小数点以下4桁まで同じ Λ_{d2} と Λ_{d3} を得ることができた。

以下に、 d の値を変えたときの(18)式の最小値 J_d の値をまとめた表を示す。この表から、 d が大きくなるにしたがって J_d は小さくなっていることがわかる。

Table 1 The value of J_d corresponding to d

d	2	4	6	8	10
J_d	0.1492	0.0406	0.0214	0.0145	0.0112

また、実際に $d=2, 4, 6$ の場合にシミュレーションを行った結果をFigs.2~4に示す。外部基準入力として、20ステップごとに $1/4$ と $-1/4$ をとる矩形波を与えた。これらの図において、上段は出力を示したものであり、0レベル付近の折れ線はシミュレーションに用いた観測ノイズを示す。また、下段は制御入力を示している。これらの図からも、本論文で提案する手法の有効性が検証されたと考える。

Fig. 2 Simulation result when $d=2$

Fig. 3 Simulation result when $d=4$

Fig. 4 Simulation result when $d=6$

6. おわりに

本論文では、参考文献 10) の評価法を見直し、厳密に参考文献 6) の結果を多変数系に拡張した。また、制御対象が非最小位相系であっても利用できるように拡張した。このために、拡張割算アルゴリズムから得られる制御器のパラメトリゼーションを利用した。本論文で用いた最適化手法は、疑似逆行列を利用したもので、Riccati 方程式の解を利用する方法と比べて数値的に安定な解が得られる。また、最適化手順が比較的簡単なため、特に適応制御系への応用が期待できるが、詳細に関しては今後検討を加えたい。さらに、数値実験を通して本手法の有効性を検証した。本論文では、オブザーバの極がすべて原点にあると仮定したが、これは単に表現を簡単にするためのものである。オブザーバの極を任意に設定した場合については、(13) 式、(14) 式を修正し、(16) 式における V を $N(z)D_*^{-1}(z)H^{-1}(z)$ のマルコフパラメータを使って定義することで本手法を利用することができる (1 入出力系の場合は、参考文献 18) を参照されたい)。本論文の結果を入力ノイズを伴う系へ拡張することも可能であると思われるが、詳しくは検討中である。

参考文献

- 1) M. Vidyasagar: *Control System Synthesis*, MIT Press (1985)
- 2) 前田, 杉江: アドバンスド制御のためのシステム制御理論, システム制御情報ライブラリー 3, 朝倉書店 (1991)
- 3) 美多: H_∞ 制御, 昭晃堂 (1994)
- 4) D. W. Clarke, C. Mohtadi and P. S. Tuffs: Generalized predictive control part I and II; *Automatica*, Vol. 23, No. 2, pp. 137-160 (1987)
- 5) 山本: 外乱対策を伴うモデルマッチングと適応制御; 計測自動制御学会論文集, Vol. 24, No. 11, pp. 1210-1212 (1988)
- 6) 武藤: 観測ノイズを伴う EMM 系の一構成法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 28, No. 2, pp. 222-227 (1992)
- 7) A. Holz and R. E. Skelton: Covariance control theory; *Int. J. Control*, Vol. 46, No. 1, pp. 13-32 (1987)
- 8) K. Yasuda, R. E. Skelton and K. M. Grigoriadis: Covariance controller: a new parametrization of the class of all stabilizing controllers; *Automatica*, Vol. 29, pp. 785-788 (1993)
- 9) T. Iwasaki and R. E. Skelton: All fixed-order H_∞ controller: observer-based structure and covariance bounds; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, No. 3, pp. 512-516 (1995)
- 10) 加瀬: 観測ノイズを伴う系に対する極配置制御系の一設計法; 電気学会論文誌 C, Vol. 118-C, No. 3, pp. 398-402 (1998)
- 11) W. Kase, Y. Mutoh and H. Okuno: Suboptimal exact model matching for multivariable systems with measurement or input noise and its application to MRACS; *Systems Science*, Vol. 24, No. 1, pp. 33-49 (1998)
- 12) 加瀬: 多項式行列の拡張割算アルゴリズムと安定化制御器の一般形の別表現; 計測自動制御学会論文集, Vol. 34, No. 12, pp. 1883-1888 (1998)
- 13) W. Kase: A solution of polynomial matrix equations using extended division algorithm; *Proc. 2nd Asian Contr. Conf.*, Vol. 2, pp. 123-126 (1997, to appear in *Int. J. Systems Science*)
- 14) M. Yamada, P. C. Zun and Y. Funahashi: On solving Diophantine equations by real matrix manipulation; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, No. 1, pp. 118-122 (1995)
- 15) 武藤, 市川: 状態フィードバックによる線形多変数系の逆インタラクタ化; 計測自動制御学会論文集, Vol. 27, No. 1, pp. 149-155 (1991)
- 16) W. A. Wolovich: *Linear Multivariable Systems*, Springer-Verlag (1974)
- 17) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)
- 18) 加瀬: 入出力ノイズを伴う離散時間系に対する極配置制御系の一構成法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 12, No. 3, pp. 145-151 (1999)