ゲインスケジューリング系の設計における ディスクリプタ形式の利用について*

増淵 泉**・示村悦二郎***

On Application of the Descriptor Form to Design of Gain Scheduling Systems*

Izumi MASUBUCHI** and Etsujiro SHIMEMURA***

The descriptor form provides system representations that preserve structure of systems along with static constraints on descriptor variables. Based on the descriptor-form representations of LPV (linear parameter varying)-systems, this paper proposes an approach to gain-scheduling controller synthesis. First, we show a descriptor form with scheduling parameters on the coefficient matrices and discuss using it as a model of LPV-systems. Next, we give a synthesis method of quadratically stabilizing LPV-controllers via solving LMIs for both state-feedback and output-feedback systems.

1. はじめに

実際の制御対象では、環境や動作状態に依存して時間的に変化するものがしばしば見受けられる。このような制御対象の時間的変化をスケジューリングパラメータで表現し、それに応じて動作する制御系をゲインスケジューリング制御系と呼ぶ。近年、LPV (Linear Parameter Varying) モデルで制御対象を表現し、線形ロバスト制御理論の成果に基づいたゲインスケジューリング制御系設計の研究が盛んに行われている¹⁾。

ゲインスケジューリング系では、スケジューリングパラメータへの依存に由来した構造が入る。したがってこの構造を扱いやすい形で表現することは、その表現の上で制御系設計を行うために重要である。本論文では、ディスクリプタ形式^{2),3)}による LPV システムのある一般的な表現を提案し、それに基づいてゲインスケジューリング補償器を設計することを考える。ディスクリプタ形式の係数の一部のみがスケジューリングパラメータの行列ポリトープとなるある限定された表現を示し、その表現

によって、スケジューリングパラメータの多項式行列を係数とする一般的な LPV システムを表せることを示す。この点においてディスクリプタ形式の、構造を保持した表現ができ、また変数間の静的な拘束条件が扱えるという利点が活かしている。つぎに、閉ループ系の二次安定条件を満たす補償器の設計を考える。まずディスクリプタ変数のフィードバックが可能な場合にスケジューリングパラメータに依存したゲインの形の補償器を与え、つぎに出力フィードバックの場合についてオブザーバ型の補償器の構成法を示す。これらの設計問題は端点モデルに対する線形行列不等式の求解に帰着される。

2. ディスクリプタシステムに関する準備

ここではディスクリプタシステム $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ および関連するペンシル $sE - A$ について以下の定義を行う。

【定義 1】 (I) $\det(sE - A)$ が恒等的には 0 でないとき (すなわち $sE - A$ の normal rank が n)、ペンシル $sE - A$ (もしくは対 (E, A)) が正則であるという。

(II) 正則なペンシル $sE - A$ において、 $sE - A$ の有限な固有値を対 (E, A) の有限モードという。

(III) $Ev_1 = 0$, $Ev_k = Av_{k-1}$, $k = 2, 3, 4, \dots$ を満たす一般化固有ベクトル v_k が存在するとき、 v_1 に対応する $sE - A$ の無限固有値を対 (E, A) の静的モード、 v_k , $k = 2, 3, 4, \dots$ に対応する無限固有値をインパ

* 原稿受付 1998 年 6 月 25 日

** 神戸大学 工学部 Faculty of Engineering, Kobe University; Rokko-dai, Nada ward, Kobe city, Hyogo 657-8501, JAPAN

*** 北陸先端科学技術大学院大学 Japan Advanced Institute of Science and Technology; 1-1 Asahi-dai, Tatsumokuchi town, Ishikawa 923-1292, JAPAN

Key Words: gain scheduling control, descriptor form, LPV-systems.

ルスモードと呼ぶ。

3. ディスクリプタ形式による LPV システムの表現

ディスクリプタ形式で表されたつぎの LPV システムを考える。

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

ここで $E \in \mathbf{R}^{n \times n}$ とし、 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ をディスクリプタ変数、 $u(t) \in \mathbf{R}^m$ を制御入力、 $y \in \mathbf{R}^p$ を観測出力とする。 $A(\theta)$ は、 N 個の端点行列 $A_k, k=1, 2, \dots, N$ の凸結合の値をとるものとする。すなわち

$$A(\theta) = \sum_{k=1}^N \theta_k A_k \quad (2)$$

ここで $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ は

$$\sum_{k=1}^N \theta_k = 1, \quad \theta_k \geq 0, \quad k=1, 2, \dots, N$$

を満たすとする。このような θ の集合を Ω^N と記す。

(注意 1) 独立に区間変動する複数個の変数がスケジューリングパラメータである場合は、各パラメータのとり値の端点のすべての組合せをもとに A_k を決めることによって (2) 式のポリトープの形に表せる。

以下では、いわゆる端点モデルのひとつである (1) 式を用いてどのようなシステムが表せるかについて考える。

【例題 1】 つぎの表現を考える。

$$\begin{aligned} E_0(\theta)\dot{\xi}(t) &= A_0(\theta)\xi(t) + B_0(\theta)u(t) \\ y(t) &= C_0(\theta)\xi(t) + D_0(\theta)u(t) \end{aligned}$$

ここで、 $E_0(\theta), A_0(\theta), B_0(\theta), C_0(\theta), D_0(\theta)$ は (2) のような形に表されとする。 $E_0(\theta)$ は正方行列で、その kernel が θ によらず一定となるものとする。このとき $E_0(\theta) = G_0(\theta)H_0$ と最大階数分解される ($G_0(\theta)$ と H_0 はそれぞれ列フルランク、行フルランク)。 $\eta = H_0\dot{\xi}$ とおき、ディスクリプタ変数を $x = [\xi^T \quad \eta^T \quad u^T \quad y^T]^T$ と定義し、係数行列を

$$\begin{aligned} E &= \text{diag}\{H_0, 0, 0, 0\} \\ A(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ A_0(\theta) & -G_0(\theta) & B_0(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ C_0(\theta) & 0 & D_0(\theta) & -I \end{bmatrix} \\ B &= [0 \quad I \quad 0 \quad 0]^T, C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad I] \end{aligned}$$

とおけば、(1) 式よりも一見一般的な上のディスクリプタシステムが (1) の形となることがわかる。これによって例えば参考文献 4), 5) よりも広いクラスを扱うことができる。なお、 $B_0(\theta) \equiv B_0, C_0(\theta) \equiv C_0, D_0(\theta) \equiv 0$ の場合には、 $x = [\xi^T \quad \eta^T]^T$ として、

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0(\theta) & -G_0(\theta) \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix}, C = [C_0 \quad 0] \end{aligned}$$

でよい。また、行列 $E_0(\cdot)$ などの構造を吟味すれば、より小さなディスクリプタ変数で等価に表現し得ることを注意しておく。

【例題 2】 スケジューリングパラメータが有理関数の形で入っている場合、適当にディスクリプタ変数を定義することで一次式の形にすることができる。たとえば変数 ξ_1, ξ_2 の間に

$$\dot{\xi}_1 = \left(1 + \frac{\theta_1}{1 + \theta_2}\right) \xi_1 + (\theta_2^2 + 1) \xi_2$$

という関係がある場合、新たなディスクリプタ変数を $\xi_3 = \xi_1/(1 + \theta_2), \xi_4 = \theta_2 \xi_2$ とおけば、

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_1 + \xi_2 + \theta_1 \xi_3 + \theta_2 \xi_4 \\ 0\dot{\xi}_3 &= \xi_1 - (1 + \theta_2) \xi_3 \\ 0\dot{\xi}_4 &= \xi_4 - \theta_2 \xi_2 \end{aligned}$$

と表すことができる。分子・分母により高次の項が含まれる場合も同様にディスクリプタ変数を定義することでスケジューリングパラメータの 1 次式に直せる。また、Taylor 展開などを用いてスケジューリングパラメータの解析関数を近似することも (1) 式で可能である。

これらの例に示すように、(1) 式は、静的拘束条件を記述できることにより柔軟なモデル化の手段を与えている。また、上の例に示した変換は正則変換と自明な拡大変換³⁾の組合せであり (例題 1 については付録の命題 1 参照)、変換前後のディスクリプタシステムは等価で、表現の変換により人工的なインパルスモードが加わることはない。

4. LPV システム (1) に対するゲインスケジューリング制御則

ここでは、LPV システム (1) で表されるモデルをもつ制御対象に対するゲインスケジューリング制御則の構成法を示す。補償器も LPV システムの形のものを考え、閉ループ系の二次安定性を達成する。ここで、ディスクリプタシステム (1) の二次安定性をつぎのように考える⁵⁾。

【定義 2】 ディスクリプタシステム (1) において, 任意の $\theta \in \Omega^N$ について $(E, A(\theta))$ は正則かつインパルスモードをもたないものとする. つぎの二つの条件を満たすディスクリプタ変数 x の二次形式となる $q(x) = x^T R x$, $R = R^T \geq 0$ で, 任意の $\theta \in \Omega^N$ に対してつぎを満たすものが存在するとき, ディスクリプタシステム (1) の動的部分は二次安定であるという.

$$(1) \quad q(x) \geq 0, \quad q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(2) \quad \dot{q}(x) \leq 0, \quad \dot{q}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \quad (\text{ここで微分は (1) の解に沿ったものとする.})$$

(注意 2) 二次形式における行列 R は一般に正定ではなく, $\text{kernel} R = \text{kernel} E$ なる準正定対称行列である.

4.1 ディスクリプタシステムにおける二次安定条件

ここでは本論文で用いる, 線形行列不等式による二次安定性の条件⁵⁾を記す.

【補題 1】 つぎの (I), (II) のいずれかが成り立つとき, 任意の $\theta \in \Omega^N$ について $(E, A(\theta))$ はインパルスモードをもたず, かつその動的部分は二次安定となる.

(I) ある $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ が存在して, 任意の $\theta \in \Omega^N$ について

$$E^T X = X^T E \geq 0$$

$$A^T(\theta)X + X^T A(\theta) < 0$$

が成り立つ.

(II) ある $Y \in \mathbf{R}^{n \times n}$ が存在して, 任意の $\theta \in \Omega^N$ について

$$EY^T = YE^T \geq 0$$

$$A(\theta)Y^T + Y A^T(\theta) < 0$$

が成り立つ.

4.2 ディスクリプタ変数が観測可能な場合

ここでは, (1) 式のディスクリプタ変数 $x(t)$ が観測でき, かつ θ が $(x(t), t)$ から計算できるかもしくは観測できるとして, (1) 式で表されたシステムにたいするつぎの制御則の設計について述べる.

$$u(t) = F(\theta)x(t) \quad (3)$$

閉ループ系は

$$E\dot{x}(t) = \{A(\theta) + BF(\theta)\}x(t) \quad (4)$$

となる. 補題 1 より, つぎの結果が導かれる.

【定理 1】 ある $Y \in \mathbf{R}^{n \times n}$ と $W_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $k = 1, 2, \dots, N$ が存在して,

$$EY^T = YE^T \geq 0$$

$$(A_k Y^T + B W_k^T) + (A_k Y^T + B W_k^T)^T < 0, \quad (5)$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

が成り立つとする. このとき, さらに Y として正則なものが必ず存在する. 閉ループ系 (4) を二次安定化する $F(\theta)$ のひとつは

$$F(\theta) = \left(\sum_{k=1}^N \theta_k W_k^T \right) Y^{-T} \quad (6)$$

で与えられる.

(注意 3) 上の定理に示されるように, (3) の形の二次安定化制御則として, (6) 式のポリトープ形で与えられている. また, 制御則の設計は端点モデルに対する線形行列不等式の求解のみで可能となっている.

4.3 オブザーバ型の補償器による出力フィードバック

いま, (1) 式の $y(t)$ が観測可能であるとし, θ が $(y(t), t)$ から計算できるかしくは観測できるものとする. つぎの形のオブザーバ型の補償器を考える.

$$E\dot{\hat{x}}(t) = \{A(\theta) + BF(\theta) + L(\theta)C\}\hat{x}(t) - L(\theta)y(t)$$

$$u(t) = F(\theta)\hat{x}(t) \quad (7)$$

ディスクリプタ変数の推定誤差を $e(t) := x(t) - \hat{x}(t)$ とおくと, 併合系は

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) + BF(\theta) & -B(\theta)F \\ 0 & A(\theta) + L(\theta)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

となる.

【系 1】 (5) 式を満たす $Y \in \mathbf{R}^{n \times n}$ および $W_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $k = 1, 2, \dots, N$ と, つぎの線形行列不等式

$$E^T X = X^T E \geq 0$$

$$(A_k^T X + C^T V_k) + (A_k^T X + C^T V_k)^T < 0, \quad (9)$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

を満たす $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ および $V_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $k = 1, 2, \dots, N$ が存在するとする. このとき, さらに正則な X, Y でこれらを満たすものが必ず存在する. 閉ループ系を二次安定化する $F(\theta), L(\theta)$ は, (6) 式と,

$$L(\theta) = X^{-T} \left(\sum_{k=1}^N \theta_k V_k^T \right) \quad (10)$$

で与えられる.

(証明) 併合系 (8) を $E_{cl}\dot{x}_{cl}(t) = A_{cl}(\theta)x_{cl}(t)$ と表し,

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} Y^{-T} & 0 \\ 0 & \alpha X \end{bmatrix}$$

とくと、十分大きな $\alpha > 0$ について補題 1 の条件 $E_{cl}^T X_{cl} = X_{cl}^T E_{cl} \geq 0$, $A_{cl}^T(\theta) X_{cl} + X_{cl}^T A_{cl}(\theta) < 0$ が成り立つ。□

(注意 4) 補償器 (7) はディスクリプタ形式で表されており、したがって微分要素を含む場合がある。しかし、制御対象 (1) の u から y への伝達特性が真にプロパーである場合 (すなわち直達成分および微分要素がない場合)、補償器に微分要素が含まれると閉ループ系が安定にならないことが簡単な考察でわかる。したがって、 u から y への伝達特性に関するこの緩い制約を設ければ補償器に微分要素が含まれることはなく、状態空間表現に直すことができる。

5. おわりに

LPV システムの表現としてディスクリプタ形式を用いることを提案し、ゲインスケジューリング制御系のひとつの構成法を示した。ディスクリプタ形式を用いることにより、時変パラメータを柔軟に表現でき、また線形行列不等式を解くことで補償器の設計が可能である。本論文の考え方にに基づき、(時不変の) ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御⁶⁾を用いた、ディスクリプタ形式で表された LPV 制御系の L_2 ゲインを仕様とする設計⁷⁾が可能となるが、これについては本稿では省略し、ディスクリプタ形式を利用する基本的なアイデアを述べた。

参考文献

- 1) 内田, 渡辺, 藤田: ゲインスケジューリングの新しい展開; 電学論 C, Vol. 116, No. 10, pp. 1085-1088 (1996)
- 2) 池田: Descriptor 形式に基づくシステム理論; 計測と制御, Vol. 24, No. 7, pp. 597-604 (1985)
- 3) 汐月: 表現手法としてのディスクリプタシステム — その可能性を探る; システム/制御/情報, Vol. 39, No. 5, pp. 219-224 (1995)
- 4) 磯田, 増淵, 小原, 須田: ゲインスケジューリングを用いたロバスト制御系設計について; 第 37 回自動制御連合講演会前刷, pp. 53-54 (1994)
- 5) 増淵, 小原, 須田: 状態フィードバックによるディスクリプタシステムのロバスト安定化; SICE 論文集, Vol. 30, No. 12, pp. 1553-1555 (1994)
- 6) I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara and N. Suda: H-infinity control for descriptor systems: A matrix inequalities approach; Automatica, Vol. 33, No. 4, pp. 669-673 (1997)
- 7) 増淵, 示村: ディスクリプタ形式に基づくゲインスケジューリング制御系設計; 第 26 回制御理論シンポジウム資料, pp. 21-24 (1997)

付 録

ディスクリプタ形式の変換について

ディスクリプタ表現には自由度があり、入出力関係 (すなわち伝達関数) およびペンシルのモードを静的モードの個数を除いて保つ等価変換が存在する³⁾。ここでは、3. で示した表現の変換における等価性を示す。

【命題 1】 ディスクリプタシステム

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (A1)$$

において、 $E = GH$ を最大階数分解とする。このとき、上のシステムとつぎの拡大システムは等価である。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + Du(t) \end{aligned} \quad (A2)$$

(証明) つぎの行列を考える。

$$S = \begin{bmatrix} G & I \\ 0 & G^+ \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -G^+A & I \end{bmatrix}$$

これらの行列は正則である。(G が列フルランクであることに注意。また G^+ は G の疑似逆行列を表す。) つぎに、以下の正則変換³⁾を行う。

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} -sH & I & 0 \\ A & -G & B \\ \hline C & 0 & D \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \\ = \left[\begin{array}{cc|c} A-sE & 0 & B \\ 0 & I & 0 \\ \hline C & 0 & D \end{array} \right] \end{aligned}$$

得られたシステム行列は、(A1) の自明な拡大³⁾となっている。これより二つの表現 (A1) と (A2) は等価である。

□