あるクラスのむだ時間系の平衡実現近似*

泉 智紀**・児島 晃**・石島辰太郎**

Balanced Reduction for a Class of Time Delay Systems*

Tomonori IZUMI**, Akira KOJIMA** and Shintaro ISHIJIMA**

A calculation method of Hankel singular values is discussed for input and unilateral time delay systems. For input time delay systems, whose channels involve different value of time delays independently, the Hankel singular values are obtained based on a matrix Lyapunov equation. By introducing auxiliary systems for the unilateral time delay system, it is shown that the singular values are characterized based on the preliminary results for input time delay systems. When Hankel singular values and vectors are derived for input and unilateral time delay systems, the calculation method of balanced reduction is constructed. We investigate balanced reduction with numerical examples.

1. はじめに

系の低次元化の一手法として, 入出力関係を良好に保存する平衡実現近似³⁾が知られている. これを求めるにはハンケル特異値を計算する必要がある, その計算法がさまざまな系に対して研究されている. むだ時間を含む系においては, 1) 入力にむだ時間が存在する系^{8), 10)–12)}, 2) 一方方向性むだ時間系^{5), 9)}, においてハンケル特異値と特異ベクトルの計算法が得られている. しかし 2) の場合は発見的に解を構成する必要がある, より一般的な系に対する解法は得られていなかった.

本稿では, 複数の入力むだ時間が独立したチャンネルに存在する系と, 風洞や圧延機のモデルとして知られている一方方向性むだ時間系のハンケル特異値の計算法を整理し, 一方方向性むだ時間系に対する計算法, 入力むだ時間系の結果に帰着できることを示す. この解法は, ハンケル特異値と特異ベクトルが系の入出力関係を表す量であり, 系の状態の定め方に依存しないという性質に基づいたものである. また, 入出力の間に直列にむだ時間が存

在する系であれば, より一般的な構造をもつ系にも適用することができる. そして, 解析的に与えられたハンケル特異値と特異ベクトルから平衡実現近似の計算法を導き, 数値計算により近似系を求める.

以下では, はじめにハンケル特異値の計算の基本となる入力むだ時間系を定義し, グラミアンとハンケル特異値の導出法を述べる. つぎに, 一方方向性むだ時間系に対し, 状態の定義をかえた 2 種類の補助系を導入し, これらの性質を明らかにする. そして, 補助系のグラミアンが入力むだ時間系における解法で与えられることを示し, これらの結果から一方方向性むだ時間系のハンケル特異値と特異ベクトルを求める. 最後に平衡実現近似を求め, 数値例を示す.

2. 入力むだ時間系

ここでは, 複数の入力むだ時間が独立したチャンネルに存在する系に注目し, ハンケル特異値と特異ベクトルの計算法を明らかにする (Fig. 1). このような系に対しては参考文献 10) にて 2 種類のむだ時間を扱った場合が報告されており, また, 一般の場合についての計算の方針が述べられている. 以下では, 任意の個数のむだ時間を含む系 (Fig. 1) に注目し, ハンケル特異値が超越方程式の根により特徴づけられ, 特異ベクトルが常微分方程式の解により与えられることを明らかにする. ここに導か

* 原稿受付 1998 年 8 月 6 日

** 東京都立科学技術大学 工学部 Tokyo Metropolitan Institute of Technology; Asahigaoka 6-6, Hino city, Tokyo 191-0065, JAPAN

Key Words: input time delay system, unilateral time delay system, controllability/observability gramian, Hankel singular value, balanced reduction.

Fig. 1 Input time delay system

れる一般的な結果は、一方向性むだ時間系のハンケル特異値の計算に援用することができる。

2.1 入力むだ時間系の記述

つぎのように入力むだ時間 $L_1, L_2, \dots, L_N$ を独立したチャンネルに有する系

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1(t-L_1) \\ \quad + B_2 u_2(t-L_2) + \dots \\ \quad \dots + B_N u_N(t-L_N) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$u_i(t) \in R^{m_i} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

$$x(t) \in R^n, \quad y(t) \in R^r$$

$$B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_N]$$

$$L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_N > 0$$

を考える (Fig. 1). ここで, (C, A, B) は可観測, 可制御, 行列 A は安定であるとする.

この系の状態空間を

$$\mathcal{X} := R^n \times L_2(-L_1, 0; R^{m_1}) \\ \times L_2(-L_2, 0; R^{m_2}) \times \dots \times L_2(-L_N, 0; R^{m_N})$$

で表現し, 状態空間 $\mathcal{X}$ における内積を

$$\langle \psi, \phi \rangle := \psi^{0T} \phi^0 + \sum_{i=1}^N \int_{-L_i}^0 \psi^{iT}(\beta) \phi^i(\beta) d\beta \quad (2)$$

$$\phi := (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^N) \in \mathcal{X}, \quad \psi := (\psi^0, \psi^1, \dots, \psi^N) \in \mathcal{X}$$

と定義すると, 系 Σ_1 はつぎの発展方程式により記述される¹³⁾.

$$\hat{\Sigma}_1: \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \mathcal{A}\hat{x}(t) + \mathcal{B} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = \mathcal{C}\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u_t^1 \\ \vdots \\ u_t^N \end{bmatrix}, \quad u_t^i(\beta) := u_i(t+\beta) \quad (-L_i \leq \beta \leq 0)$$

$$(i=1, 2, \dots, N)$$

ここで, 作用素 $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A}\phi = \begin{bmatrix} A\phi^0 + \sum_{k=1}^N B_k \phi^k(-L_k) \\ \phi^{1'} \\ \vdots \\ \phi^{N'} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$D(\mathcal{A}) = \{\phi \in \mathcal{X} : \phi^i \in W^{1,2}(-L_i, 0; R^{m_i}), \\ \phi^i(0) = 0, (i=1, 2, \dots, N)\}$$

と定めた無限小生成作用素であり, 状態空間 $\mathcal{X}$ を $\mathcal{V} := D(\mathcal{A}^*)^*$ と拡張すると, 作用素 $\mathcal{A}$ の定義域は $D_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$ となる. また, 空間 $\mathcal{V}^*$ を $\mathcal{V}^* := D(\mathcal{A}^*)$ と定めると, $\mathcal{V}^*, \mathcal{X}, \mathcal{V}$ は $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{V}$ ($\mathcal{X} = \mathcal{X}^*$) と稠密に埋め込まれており, 入出力を表す作用素 $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ は

$$\mathcal{B}: R^m \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathcal{B}^* \psi = \begin{bmatrix} \psi^1(0) \\ \vdots \\ \psi^N(0) \end{bmatrix} \\ (\psi \in \mathcal{V}^* = D(\mathcal{A}^*), \quad m = m_1 + m_2 + \dots + m_N) \\ \mathcal{C}: \mathcal{X} \rightarrow R^r, \quad \mathcal{C}\phi = C\phi^0 \quad (\phi \in \mathcal{X})$$

と与えられる. ここで空間 $\mathcal{V}^*$ は $\mathcal{V}$ に対して, $\mathcal{X}$ での位相で連続な線形汎関数全体で定義した空間であり, $\mathcal{X}$ の位相に依存することに注意する. 言い換えれば, $\psi \in \mathcal{V}$ としたとき, 任意の $\phi \in \mathcal{V}^*$ に対して (2) 式右辺の演算が有界であることが保証される.

2.2 入力むだ時間系のグラミアンとハンケル特異値

可制御性グラミアンは入力と状態, 可観測性グラミアンは状態と出力を対応させた作用素である. そして, ハンケル作用素は入出力を直接対応させた作用素で, それらの特異値と特異ベクトルは, 可制御性/可観測性グラミアンの固有値問題から求めることができる.

ここでは, (3) 式の記述を用いて, ハンケル特異値の計算に必要な可制御性/可観測性グラミアンが代数方程式の解から構成できることを示す. その後に, 解析的に求められたグラミアンからハンケル特異値の満たす条件が導出できることを示す.

【定理 1】 (入力むだ時間系のグラミアン) リアプノ

フ作用素方程式

$$\mathcal{A}P\psi + P\mathcal{A}^*\psi + B\mathcal{B}^*\psi = 0 \quad (\psi \in \mathcal{V}^*) \quad (5)$$

を満たす可制御性グラミアン $P > 0$ ($P \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$) は,

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad (6)$$

の正定解 $P =: GG^T$ を用いて, つぎのように与えられる.

$$P =: GG^*, \quad Gv := \begin{bmatrix} Gv^0 \\ v^1 \\ \vdots \\ v^N \end{bmatrix} \quad (G \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), v \in \mathcal{X}) \quad (7)$$

また, つぎのリアプノフ作用素方程式

$$\mathcal{M}\mathcal{A}\phi + \mathcal{A}^*\mathcal{M}\phi + C^*C\phi = 0 \quad (\phi \in \mathcal{X}) \quad (8)$$

を満たす可観測性グラミアン $\mathcal{M} > 0$ ($\mathcal{M} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}^*)$) は,

$$MA + A^T M + C^T C = 0 \quad (9)$$

の正定解 $M =: F^T F$ を用いて, つぎのように与えられる.

$$\mathcal{M} := \mathcal{F}^* \mathcal{F} \quad (10)$$

ここで $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, R^n \times L_2(-L_1, 0; R^r))$ は, つぎのように定めた作用素である.

$$\begin{bmatrix} (\mathcal{F}v)^0 \\ (\mathcal{F}v)^1(\xi) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Fe^{AL_1}v^0 \\ Ce^{A(\xi+L_1)}v^0 \\ + \left(\sum_{i=1}^N \int_{-L_i}^0 Fe^{-A(\beta+L_i-L_1)} B_i v^i(\beta) d\beta \right) \\ + \int_{-L_1}^{\xi} Ce^{A(\xi-\beta)} r(\beta) d\beta \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$r(\beta) = \sum_{k=1}^i B_k v^k(\beta + L_1 - L_k) \quad (12)$$

$$(v \in \mathcal{X}, -L_1 + L_{i+1} \leq \beta < -L_1 + L_i)$$

□

(証明) 可制御性グラミアンが (5) 式の解であることは, (7) 式を (5) 式に直接代入することにより確認できる. また, 可観測性グラミアンが (8) 式の解であることは, (10), (11) 式を (8) 式に代入し

$$\langle \mathcal{F}\psi, \mathcal{F}\mathcal{A}\phi \rangle + \langle \mathcal{F}\mathcal{A}\psi, \mathcal{F}\phi \rangle + \langle C\psi, C\phi \rangle = 0 \quad (13)$$

$$\phi, \psi \in D(\mathcal{A})$$

を確認することにより証明できる.

□

以上の計算により, 可制御性/可観測性グラミアンが導出できた. つぎに, これらを用いたハンケル特異値の計算法を示す.

ハンケル特異値 $\sigma > 0$ は, 定理 1 により求められた作用素 $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ を用いて与えられ, ハンケル特異値 σ と特異ベクトル $(u, v) \neq 0$ が

$$\sigma u = \mathcal{F}\mathcal{G}v, \quad \sigma v = \mathcal{G}^* \mathcal{F}^* u \quad (14)$$

なる条件を満たすことを用いると, 計算法はつぎのように整理できる.

【定理 2】 (ハンケル特異値) 系 Σ_1 のハンケル特異値 σ は超越方程式

$$\det(X) = 0 \quad (15)$$

$$X = \begin{bmatrix} -\sigma^{-1}M & I_n \end{bmatrix} e^{J_1(L_1-L_2)} e^{J_2(L_2-L_3)} \times \dots$$

$$\dots \times e^{J_N L_N} \begin{bmatrix} \sigma^{-1}P \\ I_n \end{bmatrix}$$

$$J_i := \begin{bmatrix} A & \sigma^{-1}(B_1 B_1^T + \dots + B_i B_i^T) \\ -\sigma^{-1}C^T C & -A^T \end{bmatrix}$$

の根により与えられる. また, 特異ベクトル $u = (u^0, u^1) \in R^n \times L_2(-L_1, 0; R^r)$, $v = (v^0, v^1, \dots, v^N) \in \mathcal{X}$ は $Xg = 0$ となるベクトル $g \neq 0$ ($g \in R^n$) と (6), (9) 式の解 $P = GG^T, M = F^T F$ を用いて, つぎのように構成できる.

$$v^0 = G^T g \quad (16)$$

$$v^i(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & B_i^T \end{bmatrix} \Pi(\beta - L_1 + L_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

$$u^0 = \begin{bmatrix} F & 0 \end{bmatrix} \Pi(0) \quad (18)$$

$$u^1(\beta) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \Pi(\beta) \quad (19)$$

$$\Pi(\beta) := e^{J_i(\beta+L_1-L_{i+1})} e^{J_{i+1}(L_{i+1}-L_{i+2})} \times \dots$$

$$\dots \times e^{J_N L_N} \begin{bmatrix} \sigma^{-1}P \\ I_n \end{bmatrix} g \quad (20)$$

$$-L_1 + L_{i+1} < \beta \leq -L_1 + L_i, \quad L_{N+1} = 0$$

□

(証明) ハンケル特異値 $\sigma > 0$ と対応する特異ベクトル u, v は (14) 式を満たす. 以下では, 作用素 $\mathcal{F}\mathcal{G}$ の特異値すべてが (15) 式の根に一致することを示す. (14) 式に補助変数

$$p(\xi) = e^{A(\xi+L_1)} G v^0 + \int_{-L_1}^{\xi} e^{A(\xi-\beta)} r(\beta) d\beta \quad (21)$$

$$(r(\beta) \text{ は (12) 式で定義})$$

$$q(\beta) = e^{-A^T \beta} F^T u^0 + \int_{\beta}^0 e^{A^T(\xi-\beta)} C^T u^1(\xi) d\xi \quad (22)$$

を導入し、これらを整理すると以下の関係が得られる。

$$\sigma u^0 = F p(0) \quad (23)$$

$$\sigma u^1(\xi) = C p(\xi) \quad (24)$$

$$p(-L_1) = G v^0 \quad (25)$$

$$\frac{d}{d\xi} p(\xi) = A p(\xi) + \sum_{k=1}^i B_k v^k(\xi + L_1 - L_k) \quad (26)$$

$$(-L_1 + L_{i+1} \leq \xi < -L_1 + L_i)$$

$$\sigma v^0 = G^T q(-L_1) \quad (27)$$

$$\sigma v^i(\beta) = B_i^T q(\beta - L_1 + L_i) \quad (28)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

$$q(0) = F^T u^0 \quad (29)$$

$$\frac{d}{d\beta} q(\beta) = -A^T q(\beta) - C^T u^1(\beta) \quad (30)$$

つぎに (24), (28) 式を (26), (30) 式に代入すると、

$$\begin{bmatrix} p'(\beta) \\ q'(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A p(\beta) + \sigma^{-1} \left(\sum_{k=1}^i B_k B_k^T \right) q(\beta) \\ -\sigma^{-1} C^T C p(\beta) - A^T q(\beta) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$(-L_1 + L_{i+1} \leq \beta < -L_1 + L_i)$$

すなわち、

$$\begin{bmatrix} p(0) \\ q(0) \end{bmatrix} = e^{J_1(L_1-L_2)} e^{J_2(L_2-L_3)} \times \dots$$

$$\dots \times e^{J_N L_N} \begin{bmatrix} p(-L_1) \\ q(-L_1) \end{bmatrix} \quad (32)$$

が得られ、(23), (25), (27), (29) 式からは境界条件

$$p(-L_1) = \sigma^{-1} P q(-L_1), q(0) = \sigma^{-1} M p(0) \quad (33)$$

が導かれる。したがって特異値 σ に対する特異ベクトル u, v が存在するためには、 σ が (15) 式の解であることが必要である。

十分性は、 σ を (15) 式の根としたとき、代数ベクトル $g \neq 0$ から特異ベクトルが構成できることで示される。

□

以上の結果により、複数の入力むだ時間が独立したチャネルに存在する系に対して、ハンケル特異値と特異ベクトルを求めることができる。

3. 一方向性むだ時間系

ここでは Fig. 2 のように表された一方向性むだ時間系に注目し、ハンケル特異値と特異ベクトルの計算法を考察する。そして、これらの計算が 2. の結果を利用して行

Fig. 2 Unilateral time delay system ($N=2$)

えることを明らかにする。

以下では、はじめに一方向性むだ時間系の記述を整理し、2種類の補助系を導入する。つぎにこれらの補助系と定理 1 を用いると、一方向性むだ時間系の可制御性・可観測性グラミアンが構成できることを示し、ハンケル特異値・特異ベクトルの計算法を明らかにする。

3.1 一方向性むだ時間系の記述

長さが $h_1, h_2, \dots, h_N$ のむだ時間要素で結合された一方向性むだ時間系を考える (Fig. 2)。

$$\Sigma_2: \begin{cases} \dot{x}(t) = A_U x(t) + D_2 z_1(t-h_1) \\ \quad + D_3 z_2(t-h_2) + \dots \\ \quad \dots + D_{N+1} z_N(t-h_N) + B_U u(t) \\ z_i(t) = E_i x(t) \quad (i=1, 2, \dots, N) \\ y(t) = C_U x(t) \end{cases} \quad (34)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) & \dots & x_{N+1}^T(t) \end{bmatrix}^T \in R^n$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1^T(t) & u_2^T(t) & \dots & u_{N+1}^T(t) \end{bmatrix}^T \in R^m$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1^T(t) & y_2^T(t) & \dots & y_{N+1}^T(t) \end{bmatrix}^T \in R^r$$

$$x_i(t) \in R^{n_i}, u_i(t) \in R^{m_i}, y_i(t) \in R^{r_i} \quad (i=1, 2, \dots, N+1)$$

$$z_i(t) \in R^{p_i}, (i=1, 2, \dots, N)$$

$$A_U = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_{N+1})$$

$$B_U = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 & \hat{B}_2 & \dots & \hat{B}_{N+1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_i = \begin{bmatrix} 0^T & \dots & 0^T & \hat{B}_i^T & 0^T & \dots & 0^T \end{bmatrix}^T$$

$$C_U = \begin{bmatrix} \hat{C}_1^T & \hat{C}_2^T & \dots & \hat{C}_{N+1}^T \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{C}_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \hat{C}_j & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} 0^T & \dots & 0^T & \hat{D}_i^T & 0^T & \dots & 0^T \end{bmatrix}^T$$

$$E_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \hat{E}_j & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ここで、 (C_U, A_U, B_U) は可観測、可制御、行列 A_U は安定であるとする。

系 Σ_2 は状態空間を

$$\mathcal{X}_U := R^n \times L_2(-h_1, 0; R^{p_1}) \\ \times L_2(-h_2, 0; R^{p_2}) \times \cdots \times L_2(-h_N, 0; R^{p_N})$$

と選ぶと、つぎの発展方程式により記述される¹³⁾。

$$\hat{\Sigma}_2: \begin{cases} \dot{\hat{x}}_U(t) = \mathcal{A}_U \hat{x}_U(t) + \mathcal{B}_U u(t) \\ y(t) = \mathcal{C}_U \hat{x}_U(t) \end{cases} \quad (35)$$

$$\hat{x}_U(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z_t^1 \\ \vdots \\ z_t^N \end{bmatrix}$$

$$z_t^i(\beta) := z_i(t + \beta) \quad (-h_i \leq \beta \leq 0) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

ここで、作用素 $\mathcal{A}_U$ は

$$\mathcal{A}_U \phi_U = \begin{bmatrix} A_U \phi_U^0 + \sum_{k=1}^N D_{k+1} \phi_U^k(-h_k) \\ \phi_U^{1'} \\ \vdots \\ \phi_U^{N'} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$D(\mathcal{A}_U) = \{ \phi_U \in \mathcal{X}_U : \phi_U^i \in W^{1,2}(-h_i, 0; R^{p_i}), \\ \phi_U^i(0) = E_i \phi_U^0, (i = 1, 2, \dots, N) \}$$

と定めた無限小生成作用素であり、入出力を表す作用素 B_U, C_U は

$$B_U: R^m \rightarrow \mathcal{X}_U, B_U v = \begin{bmatrix} B_U v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (v \in R^m)$$

$$C_U: \mathcal{X}_U \rightarrow R^r, C_U \phi_U = C_U \phi_U^0 \quad (\phi_U \in \mathcal{X}_U)$$

と与えられる。

一方向性むだ時間系は、個々の入出力間の伝達関数が入力むだ時間系になり、**2.**で論じたむだ時間系と類似の性質をもつことが期待される。以下では系 $\hat{\Sigma}_2$ に対して 2 種類の補助系を導入すると、可制御性・可観測性グラミアンが定理 1 に基づいて構成できることを示す。

3.2 一方向性むだ時間系の可制御性グラミアン

系 $\hat{\Sigma}_2$ に対する可制御性グラミアンを求めるために、入力にむだ時間を有する補助系を導入する。そして、系の入力・状態の関係を調べ、可制御性グラミアンが定理 1 に基づいて構成できることを明らかにする。

系 Σ_1 と同じ構造をもつつぎの補助系を定義する。

$$\Sigma_3: \begin{cases} \dot{x}(t) = A_I x(t) + \hat{B}_1 u_1(t - L_1) \\ + \hat{B}_2 u_2(t - L_2) + \cdots \\ \cdots + \hat{B}_N u_N(t - L_N) + \hat{B}_{N+1} u_{N+1}(t) \end{cases} \quad (37)$$

$$A_I = A_U + D_2 E_1 + D_3 E_2 + \cdots + D_{N+1} E_N$$

$$x(t) \in R^n, u_i(t) \in R^{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N+1)$$

ここで、 $L_1, L_2, \dots, L_N$ はむだ時間の長さを表し、系 Σ_2 のむだ時間 $h_1, h_2, \dots, h_N$ に対して $L_i = \sum_{k=i}^N h_k$ と定める。一方向性むだ時間系の定義から、 (A_I, B_U) は可制御、行列 A_I は安定である。

系 Σ_3 は状態空間を

$$\mathcal{X}_I := R^n \times L_2(-L_1, 0; R^{m_1}) \\ \times L_2(-L_2, 0; R^{m_2}) \times \cdots \times L_2(-L_N, 0; R^{m_N})$$

と選ぶと、つぎの発展方程式により記述される¹³⁾。

$$\hat{\Sigma}_3: \begin{cases} \dot{\hat{x}}_I(t) = \mathcal{A}_I \hat{x}_I(t) + \mathcal{B}_I \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{N+1}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (38)$$

$$\hat{x}_I(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u_t^1 \\ \vdots \\ u_t^N \end{bmatrix}$$

$$u_t^i(\beta) := u_i(t + \beta) \quad (-L_i \leq \beta \leq 0) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

ここで、作用素 $\mathcal{A}_I$ は

$$\mathcal{A}_I \phi_I = \begin{bmatrix} A_I \phi_I^0 + \sum_{k=1}^N \hat{B}_k \phi_I^k(-L_k) \\ \phi_I^{1'} \\ \vdots \\ \phi_I^{N'} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$D(\mathcal{A}_I) = \{ \phi_I \in \mathcal{X}_I : \phi_I^i \in W^{1,2}(-L_i, 0; R^{m_i}), \\ \phi_I^i(0) = 0, (i = 1, 2, \dots, N) \}$$

と定めた無限小生成作用素であり、状態空間 $\mathcal{X}_I$ を $\mathcal{V}_I := D(\mathcal{A}_I^*)^*$ と拡張すると、作用素 $\mathcal{A}_I$ の定義域は $D_{\mathcal{V}_I}(\mathcal{A}_I) = \mathcal{X}_I$ となる。空間 $\mathcal{V}_I^*, \mathcal{X}_I, \mathcal{V}_I$ は $\mathcal{V}_I^* \subset \mathcal{X}_I \subset \mathcal{V}_I$ ($\mathcal{X}_I = \mathcal{X}_I^*$) と稠密に埋め込まれており、入力を表す作用素 B_I は

$$B_I: R^m \rightarrow \mathcal{V}_I$$

$$\mathbf{B}_I^* \psi_I = \begin{bmatrix} \psi_I^1(0) \\ \vdots \\ \psi_I^N(0) \\ \hat{B}_{N+1}^T \psi_I^0 \end{bmatrix} \quad (\psi_I \in \mathcal{V}_I^* = D(\mathcal{A}_I^*))$$

と与えられる。以上により、一方向性むだ時間系 $\hat{\Sigma}_2$ と補助系 $\hat{\Sigma}_3$ が定義された。つぎに、これらの関係を整理する。

系 $\hat{\Sigma}_2$ と $\hat{\Sigma}_3$ に共通の入力 $u \in L_2(-\infty, 0; R^m)$ を与えたとき、0 から遷移するそれぞれの初期状態 $\hat{x}_U(0)$, $\hat{x}_I(0)$ の対応を調べる。いま、入力 $u \in L_2(-\infty, 0; R^m)$ により、系 $\hat{\Sigma}_3$ の状態が $\hat{x}_I(0) = \phi_I$ に遷移したとする。このとき、Fig. 3 に基づいて、系の構造を部分的に変化させるとつぎの関係が明らかになる。

- 1) $G_1^{(a)}$ にむだ時間要素 $D_{11}^{(a)}$, $D_{12}^{(a)}$ に蓄えられていた入力を印加すると、 $G_1^{(b)}$, すなわち $G_1^{(c)}$ の内部状態が求められる。また、この時発生した $G_1^{(a)}$ の出力が、むだ時間要素 $D_{11}^{(b)}$, $D_{12}^{(b)}$ に蓄えられる。
- 2) $G_2^{(b)}$ にむだ時間要素 $D_{12}^{(b)}$, $D_{22}^{(a)}$ に蓄えられていた入力を印加すると、 $G_2^{(c)}$ の内部状態が求められる。また、この時発生した $G_2^{(b)}$ の出力が、むだ時間要素 $D_{22}^{(c)}$ に蓄えられる。

したがって、サブシステムとむだ時間要素の順序を入れ換え、部分的に対応する状態と出力の関係を整理するとつぎの結果が求められる（証明略）。

Fig. 3 Rearrange system (input time delay system, $N = 2$)

【補題 1】 系 $\hat{\Sigma}_2$ と $\hat{\Sigma}_3$ に共通の入力 $u \in L_2(-\infty, 0; R^m)$ を与え、それぞれの状態が 0 から $\hat{x}_U(0) = \phi_U$, $\hat{x}_I(0) = \phi_I$ に遷移したとする。このとき、状態 ϕ_U と ϕ_I の関係は、作用素 $\mathcal{T}_{UI} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_I, D(\mathcal{A}_U))$ を用いてつぎのように表される。

$$\phi_U^0 = (\mathcal{T}_{UI} \phi_I)^0 := e^{U_1 A_I h_1 + U_2 A_I h_2 + \dots + U_N A_I h_N} \phi_I^0 + \sum_{j=1}^N \int_{-L_j}^0 \hat{U}_j e^{-A_I \beta} \left(\sum_{k=1}^j \hat{B}_k \phi_I^k (\beta - L_k + L_j) \right) d\beta \quad (40)$$

$$\phi_U^i = (\mathcal{T}_{UI} \phi_I)^i(\xi) := E_i e^{A_I(\xi + L_i)} \phi_I^0 + \int_{-L_i}^{\xi} E_i e^{A_I(\xi - \beta)} \left(\sum_{k=1}^i \hat{B}_k \phi_I^k (\beta - L_k + L_i) \right) d\beta \quad (41)$$

$$(\mathcal{T}_{UI} \phi_I)^i(0) = E_i (\mathcal{T}_{UI} \phi_I)^0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$\phi_I \in \mathcal{X}_I$$

$$U_i = \begin{bmatrix} I_{n_1 + \dots + n_i} & 0 \\ 0 & 0_{n_{i+1} + \dots + n_N} \end{bmatrix} \in R^{n \times n}$$

$$\hat{U}_i = \begin{bmatrix} 0_{n_1 + \dots + n_{i-1}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n_{i+1} + \dots + n_N} \end{bmatrix} \in R^{n \times n}$$

さらに、作用素 $\mathcal{A}_I$, $\mathcal{A}_U$ と $\mathcal{B}_I$, $\mathcal{B}_U$ の関係が

$$\mathcal{T}_{UI} \mathcal{A}_I \phi_I = \mathcal{A}_U \mathcal{T}_{UI} \phi_I \quad (\phi_I \in D(\mathcal{A}_I)) \quad (42)$$

$$\mathcal{B}_I^* \mathcal{T}_{UI}^* \psi_U = \mathcal{B}_U^* \psi_U \quad (\psi_U \in \mathcal{X}_U) \quad (43)$$

と与えられる。□

以上のように状態空間 $\mathcal{X}_U$, $\mathcal{X}_I$ を定め、これらの関係を作用素 $\mathcal{T}_{UI}$ で表すと、一方向性むだ時間系の可制御性グラミアンはつぎのように求まる。

【補題 2】 リアプノフ作用素方程式

$$\mathcal{A}_U \mathcal{P}_U \psi_U + \mathcal{P}_U \mathcal{A}_U^* \psi_U + \mathcal{B}_U \mathcal{B}_U^* \psi_U = 0 \quad (44)$$

$$(\psi_U \in \mathcal{V}_U^*)$$

を満たす可制御性グラミアン $\mathcal{P}_U > 0$ ($\mathcal{P}_U \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_U)$) は、

$$A_I P_I + P_I A_I^T + B_U B_U^T = 0 \quad (45)$$

の正定解 $P_I =: G_I G_I^T$ と (40), (41) 式を用いて、つぎのように与えられる。

$$\mathcal{P}_U := \mathcal{T}_{UI} G_I G_I^* \mathcal{T}_{UI}^*, \quad G_I v := \begin{bmatrix} G_I v^0 \\ v^1 \\ \vdots \\ v^N \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathcal{G}_I \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_I), v \in \mathcal{X}_I$$

□

(証明) $\mathcal{P}_I := \mathcal{G}_I \mathcal{G}_I^*$ とすると, 系 $\hat{\Sigma}_3$ の定義と定理 1 からつぎのようなりアプノフ作用素方程式が与えられる.

$$\mathcal{A}_I \mathcal{P}_I \psi_I + \mathcal{P}_I \mathcal{A}_I^* \psi_I + \mathcal{B}_I \mathcal{B}_I^* \psi_I = 0 \quad (\psi_I \in \mathcal{V}_I^*) \quad (47)$$

この式の左右から $\mathcal{T}_{UI}, \mathcal{T}_{UI}^*$ を作用させ, (42), (43) 式の関係を用いると, (44) 式が得られる. よって $\mathcal{P}_U = \mathcal{T}_{UI} \mathcal{P}_I \mathcal{T}_{UI}^*$ は (44) 式の解となる. □

3.3 一方向性むだ時間系の可観測性グラミアン

つぎに, 系 $\hat{\Sigma}_2$ に対する可観測性グラミアンを求めるために, 出力にむだ時間を有する補助系を導入する. そして, 系の出力・状態の関係を調べ, 可観測性グラミアンが定理 1 に基づいて構成できることを明らかにする.

系 Σ_1 と双対な構造をもつぎの補助系を定義する.

$$\Sigma_4: \begin{cases} \dot{x}(t) = A_I x(t) \\ y_1(t) = \hat{C}_1 x(t) \\ y_2(t) = \hat{C}_2 x(t - L_1 + L_2) \\ \vdots \\ y_{N+1}(t) = \hat{C}_{N+1} x(t - L_1 + L_{N+1}) \end{cases} \quad (48)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, y_i(t) \in \mathbb{R}^{r_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N+1)$$

ここで, $L_1 - L_2, L_1 - L_3, \dots, L_1 - L_{N+1}$ はむだ時間の長さを表し, 系 Σ_2 のむだ時間 $h_1, h_2, \dots, h_N$ に対して $L_1 - L_i = \sum_{k=1}^{i-1} h_k$ と定める. 一方向性むだ時間系の定義から, (C_U, A_I) は可観測, 行列 A_I は安定である.

系 Σ_4 は状態空間を

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_O &:= \mathbb{R}^n \times L_2(-L_1 + L_2, 0; \mathbb{R}^{r_2}) \\ &\times L_2(-L_1 + L_3, 0; \mathbb{R}^{r_3}) \times \dots \\ &\dots \times L_2(-L_1 + L_{N+1}, 0; \mathbb{R}^{r_{N+1}}), L_{N+1} := 0 \end{aligned}$$

と選ぶと, つぎの発展方程式により記述される¹³⁾.

$$\hat{\Sigma}_4: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_O(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_{N+1}(t) \end{bmatrix} = \mathcal{A}_O \hat{x}_O(t) \\ \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{C}_2 x_t \\ \vdots \\ \hat{C}_{N+1} x_t \end{bmatrix} = \mathcal{C}_O \hat{x}_O(t) \end{cases} \quad (49)$$

$$\hat{C}_i x_t(\beta) := \hat{C}_i x(t + \beta) \quad (-L_1 + L_i \leq \beta \leq 0)$$

ここで, 作用素 $\mathcal{A}_O$ は

$$\mathcal{A}_O \phi_O = \begin{bmatrix} A_I \phi_O^0 \\ \phi_O^1 \\ \vdots \\ \phi_O^{N'} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$D(\mathcal{A}_O) = \{\phi_O \in \mathcal{X}_O :$$

$$\phi_O^i \in W^{1,2}(-L_1 + L_{i+1}, 0; \mathbb{R}^{r_{i+1}}),$$

$$\phi_O^i(0) = \hat{C}_{i+1} \phi_O^0, (i = 1, 2, \dots, N)\}$$

と定めた無限小生成作用素であり, 状態空間 $\mathcal{X}_O$ を $\mathcal{W}_O := D(\mathcal{A}_O)^*$ と拡張すると, 作用素 $\mathcal{A}_O^*$ の定義域が $D_{\mathcal{W}_O}(\mathcal{A}_O^*) = \mathcal{X}_O$ となる. 空間 $\mathcal{W}_O^*, \mathcal{X}_O, \mathcal{W}_O$ は $\mathcal{W}_O^* \subset \mathcal{X}_O \subset \mathcal{W}_O$ ($\mathcal{X}_O = \mathcal{X}_O^*$) と稠密に埋め込まれており, 出力を表す作用素 $\mathcal{C}_O$ は

$$\mathcal{C}_O : D(\mathcal{A}_O) \rightarrow \mathbb{R}^r$$

$$\mathcal{C}_O \phi_O = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \phi_O^0 \\ \phi_O^1(-L_1 + L_2) \\ \vdots \\ \phi_O^N(-L_1 + L_{N+1}) \end{bmatrix} \quad (\phi_O \in D(\mathcal{A}_O))$$

と与えられる. 系 $\hat{\Sigma}_4$ は Fig. 1 に示した入力むだ時間系に対して双対な構造を有している. したがって, 系 $\hat{\Sigma}_4$ に対する可観測性グラミアンは, 作用素方程式 (5) 式に対する解法に基づいて構成することができる. 以上により, 補助系 $\hat{\Sigma}_4$ が定義された. つぎに, 一方向性むだ時間系との関係を整理する.

系 $\hat{\Sigma}_4$ の例として, $N=2$ の場合を Fig. 4 に示した. 系 $\hat{\Sigma}_3$ の場合と同様に, サブシステムとむだ時間要素の順序を入れ換え, 部分的に対応する状態と出力の関係を整理することで, $\hat{\Sigma}_2$ と $\hat{\Sigma}_4$ の関係が明らかになり, つぎの結果が求められる (証明略).

【補題 3】 系 $\hat{\Sigma}_2$ と $\hat{\Sigma}_4$ に初期状態 $\hat{x}_U(0) = \phi_U$, $\hat{x}_O(0) = \phi_O$ を与えたとき, 同一の出力 $y \in L_2(0, \infty; \mathbb{R}^r)$ が発生したとする. このとき, 状態 ϕ_U と ϕ_O の関係は, 作用素 $\mathcal{T}_{OU} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_U, D(\mathcal{A}_O))$ を用いてつぎのように表

Fig. 4 Output time delay system ($N=2$)

される.

$$\begin{aligned} \phi_O^0 &= (\mathcal{T}_{OU}\phi_U)^0 := e^{\bar{U}_1 A_I h_1 + \bar{U}_2 A_I h_2 + \dots + \bar{U}_N A_I h_N} \phi_U^0 \\ &+ \sum_{j=1}^N \int_{-h_j}^0 \bar{U}_j e^{-A_I \beta} D_{j+1} \phi_U^j(\beta) d\beta \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \phi_O^i &= (\mathcal{T}_{OU}\phi_U)^i(\xi) := \hat{C}_{i+1} e^{\bar{U}_i A_I (\xi + L_1 - L_{i+1})} \phi_U^0 \\ &+ \sum_{k=i}^{j+1} \int_{-h_k}^0 \hat{C}_{i+1} \bar{U}_k e^{-A_I \beta} D_{k+1} \phi_U^k(\beta) d\beta \\ &+ \int_{-L_1 + L_{j+1}}^{\xi} \hat{C}_{i+1} \bar{U}_j e^{A_I (\xi - \beta)} D_{j+1} \phi_U^j(\beta + L_1 - L_j) d\beta \end{aligned} \quad (52)$$

$$-L_1 + L_{j+1} \leq \xi \leq -L_1 + L_j$$

$$(\mathcal{T}_{OU}\phi_U)^i(0) = \hat{C}_{i+1} (\mathcal{T}_{OU}\phi_U)^0 \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

$$\phi_U \in \mathcal{X}_U$$

$$\bar{U}_i = \begin{bmatrix} 0_{n_1 + \dots + n_i} & 0 \\ 0 & I_{n_{i+1} + \dots + n_N} \end{bmatrix} \in R^{n \times n}$$

さらに, 作用素 $\mathcal{A}_U, \mathcal{A}_O$ と $\mathcal{C}_U, \mathcal{C}_O$ の関係が

$$\mathcal{T}_{OU}\mathcal{A}_U\phi_U = \mathcal{A}_O\mathcal{T}_{OU}\phi_U \quad (53)$$

$$\mathcal{C}_O\mathcal{T}_{OU}\phi_U = \mathcal{C}_U\phi_U \quad (54)$$

$$(\phi_U \in D(\mathcal{A}_U))$$

と与えられる. $\square$

以上のように状態空間 $\mathcal{X}_U, \mathcal{X}_O$ を定め, これらの関係を作用素 $\mathcal{T}_{OU}$ で表すと, 一方方向性むだ時間系の可観測性グラミアンはつぎのように求まる.

【補題 4】 リアプノフ作用素方程式

$$\mathcal{M}_U \mathcal{A}_U \phi_U + \mathcal{A}_U^* \mathcal{M}_U \phi_U + \mathcal{C}_U^* \mathcal{C}_U \phi_U = 0 \quad (55)$$

$$(\phi_U \in \mathcal{X}_U)$$

を満たす可観測性グラミアン $\mathcal{M}_U > 0$ ($\mathcal{M}_U \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_U, \mathcal{V}_U^*)$) は,

$$M_O A_I + A_I^T M_O + C_U^T C_U = 0 \quad (56)$$

の正定解 $M_O := F_O^T F_O$ と (51), (52) 式を用いて, つぎのように与えられる.

$$\mathcal{M}_U := \mathcal{T}_{OU}^* \mathcal{F}_O^* \mathcal{F}_O \mathcal{T}_{OU}, \mathcal{F}_O u := \begin{bmatrix} F_O u^0 \\ u^1 \\ \vdots \\ u^N \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathcal{F}_O \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_O), u \in \mathcal{X}_O$$

$\square$

(証明) 系 $\hat{\Sigma}_3$ と $\hat{\Sigma}_4$ は双対な関係にあるので, $\mathcal{M}_O := \mathcal{F}_O^* \mathcal{F}_O$ と置き, $A_I \rightarrow A_O^*, B_I \rightarrow C_O^*, P_I \rightarrow M_O$ の対応をそれぞれ整理すると, 定理 1 からつぎのようなリアプノフ作用素方程式が与えられる.

$$\mathcal{M}_O \mathcal{A}_O \phi_O + \mathcal{A}_O^* \mathcal{M}_O \phi_O + \mathcal{C}_O^* \mathcal{C}_O \phi_O = 0 \quad (58)$$

$$(\phi_O \in \mathcal{W}_O^*)$$

この式の左右から $\mathcal{T}_{OU}^*, \mathcal{T}_{OU}$ を作用させ, (53), (54) 式の関係を用いると, (55) 式が得られる. よって $\mathcal{M}_U = \mathcal{T}_{OU}^* \mathcal{M}_O \mathcal{T}_{OU}$ は (55) 式の解となる. $\square$

以上の結果により, 補助系のグラミアンから本来の一方方向性むだ時間系のグラミアンが構成できることが示された.

また, 一方方向性むだ時間系のリアプノフ代数方程式 (45), (56) が入力むだ時間系のリアプノフ代数方程式 (6) と同様なことから, 入力むだ時間系と一方方向性むだ時間系が, “応答が一定時間後, 集中系の応答になる” という同様の特徴をもっていることが確認できる.

3.4 一方方向性むだ時間系のハンケル特異値

つぎに, グラミアンからハンケル特異値を導出する.

ハンケル特異値 $\sigma > 0$ は, 補題 2, 4 により求められた作用素 $\mathcal{G}_U := \mathcal{T}_{UI} \mathcal{G}_I, \mathcal{F}_U := \mathcal{F}_O \mathcal{T}_{OU}$ を用いて与えられ, σ と (u, v) が

$$\sigma u = \mathcal{F}_U \mathcal{G}_U v, \sigma v = \mathcal{G}_U^* \mathcal{F}_U^* u \quad (59)$$

なる条件を満たすことを用いると, ハンケル特異値と特異ベクトルの計算法はつぎのように整理できる.

【定理 3】 (ハンケル特異値) 系 Σ_2 のハンケル特異値 σ は超越方程式

$$\det(X) = 0 \quad (60)$$

$$X = \begin{bmatrix} -\sigma^{-1} M_O & I_n \end{bmatrix} e^{\hat{J}_1 h_1} e^{\hat{J}_2 h_2} \times \dots$$

$$\dots \times e^{\hat{J}_N h_N} \begin{bmatrix} \sigma^{-1} P_I \\ I_n \end{bmatrix}$$

$$\hat{J}_i := \begin{bmatrix} A_I & \sigma^{-1} \sum_{k=1}^i \hat{B}_k \hat{B}_k^T \\ -\sigma^{-1} \sum_{k=i+1}^{N+1} \hat{C}_k^T \hat{C}_k & -A_I^T \end{bmatrix}$$

の根により与えられる. また, 特異ベクトル $u = (u^0, u^1, \dots, u^N) \in \mathcal{X}_O, v = (v^0, v^1, \dots, v^N) \in \mathcal{X}_I$ は $Xg = 0$ となる

ベクトル $g \neq 0$ ($g \in R^n$) と (45), (56) 式の解 $P_I = G_I G_I^T$, $M_O = F_O^T F_O$ を用いて, つぎのように構成できる.

$$v^0 = G_I^T g \quad (61)$$

$$v^i(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & \hat{B}_i^T \end{bmatrix} \Pi_U(\beta - L_1 + L_i) \quad (62)$$

$$u^0 = \begin{bmatrix} F_O & 0 \end{bmatrix} \Pi_U(0) \quad (63)$$

$$u^i(\beta) = \begin{bmatrix} \hat{C}_{i+1} & 0 \end{bmatrix} \Pi_U(\beta) \quad (64)$$

($i = 1, 2, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \Pi_U(\beta) := & e^{\hat{J}_i(\beta + L_1 - L_{i+1})} e^{\hat{J}_{i+1} h_{i+1}} \times \dots \\ & \dots \times e^{\hat{J}_N h_N} \begin{bmatrix} \sigma^{-1} P_I \\ I_n \end{bmatrix} g \end{aligned} \quad (65)$$

$$-L_1 + L_{i+1} < \beta \leq -L_1 + L_i$$

□

(証明) (59) 式を満たすハンケル特異値 σ が存在するためには, 作用素 $\mathcal{F}_U \mathcal{G}_U$ に対して導入された関数 $\Pi_U(\cdot)$ がつぎの微分方程式と境界条件

$$\Pi_U'(\beta) = \hat{J}_i \Pi_U(\beta) \quad (66)$$

$$(-L_1 + L_{i+1} < \beta \leq -L_1 + L_i, i = 1, 2, \dots, N)$$

$$\begin{bmatrix} I_n & -\sigma^{-1} P_I \end{bmatrix} \Pi_U(-L_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\sigma^{-1} M_O & I_n \end{bmatrix} \Pi_U(0) = 0$$

を満たすことが必要十分である.

また, 特異ベクトル $(u, v) \neq 0$ は微分方程式 (66) の解を用いて構成できる. □

定理 3 により, 一方方向性むだ時間系のハンケル特異値と特異ベクトルの計算法が明らかになった.

4. 平衡実現近似

定理 2 と **定理 3** により, 入力むだ時間系と一方方向性むだ時間系の特異値が超越方程式の根により与えられ, 特異ベクトルが常微分方程式の根から構成できることが明らかになった. これらを用いると, 平衡実現近似の計算法はつぎのようにまとめられる.

【定理 4】 (平衡実現近似) あるむだ時間系 Σ に対し, 平衡実現による p 次の近似は

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t) \\ y(t) = C_p x_p(t) \end{cases} \quad (67)$$

$$A_p := [a_{ij}] \in R^{p \times p}$$

$$B_p := \begin{bmatrix} b_1^T & \dots & b_i^T & \dots & b_p^T \end{bmatrix}^T \in R^{p \times m}$$

$$C_p := [c_1 \dots c_j \dots c_p] \in R^{r \times p}$$

$$a_{ij} := \frac{1}{\sqrt{\sigma_i \sigma_j}} \langle u_i, \mathcal{F}_U \mathcal{G}_U v_j \rangle$$

$$b_i^T := \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \mathcal{B}^* \mathcal{F}^* u_i, c_j := \frac{1}{\sqrt{\sigma_j}} \mathcal{C} \mathcal{G}_U v_j$$

と与えられる. ここで, $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ はハンケル特異値である. v_i と u_i は σ_i に対応する作用素 $\mathcal{F}_U \mathcal{G}_U$ の特異ベクトルで, $\langle v_i, v_i \rangle = 1, \langle u_i, u_i \rangle = 1$ と規格化したものである. □

(略証) 参考文献 1) の定理 3 と同様の計算を進めることにより確認できる. □

5. 数値例

入力むだ時間系 Σ_1 と一方方向性むだ時間系 Σ_2 について, つぎのように各パラメータを定めた系に **定理 4** を適用して, 平衡実現近似を求める.

(1) 入力むだ時間系

$$y(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} e^{-2s} & \frac{s+4}{(s+2)(s+3)} e^{-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\text{むだ時間: } L_1 = 2.0, L_2 = 1.0 \text{ 秒}$$

をそれぞれ 10, 15, 20 次に近似し, 得られた近似系の性質を調べた (Figs. 5~9).

Figs. 5~7 は近似系の周波数応答である. Fig. 5 は σ -plot, Figs. 6, 7 はボード線図を表している. 低周波数帯では良好な近似が得られているが, ある周波数で急激にゲインが低下している. このことから, 純粋なむだ時間要素がもつ大きな位相遅れを近似できないような周波数ではゲインが低下し, 位相の誤差による影響が出力に現れないような性質をもっていると考えられる. また, 近

Fig. 5 σ -plots of balanced reduction for an input time delay system

Gain

Phase

Fig. 6 Bode plots of balanced reduction (from u_1 to y) for an input time delay system

Gain

Phase

Fig. 7 Bode plots of balanced reduction (from u_2 to y) for an input time delay system

似の次数を上げると低周波数帯から誤差が少なくなることが確認できる。

Figs. 8, 9 は近似系の u_1 - y と u_2 - y 間のインパルス応答を示したものである。これらの結果から、むだ時間分遅れて応答が発生する様子が良好に再現できていることがわかる。

(2) 一方向性むだ時間系

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{e^{-5s}}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

むだ時間: $h_1 = 5.0$ 秒

をそれぞれ 5, 8, 10 次に近似し, 得られた近似系の性質を調べた (Figs. 10, 11)。

Fig. 10 は近似系の σ -plot を表したもので, すべての周波数において良好な近似が得られている。近似の次数を上げると低周波数帯から誤差が少なくなり, 本来の系の応答に近づく。

Fig. 11 は近似系の u_1 - y_2 間のインパルス応答を示したものである。この系は u_1 - y_2 間にだけむだ時間による影響が現れる。一方向性むだ時間系においても, むだ時間分遅れて応答が発生する様子が良好に再現できていることがわかる。

6. おわりに

本稿では, 入力むだ時間が独立したチャンネルに存在する系と, 一方向性むだ時間系のハンケル特異値・特異ベクトルの計算法を考察した。そして, ハンケル特異値が超越方程式の根により特徴づけられ, 特異ベクトルが常微

Fig. 8 Impulse responses of balanced reduction (from u_1 to y) for an input time delay system

Fig. 10 σ -plots of balanced reduction for a unilateral time delay system

Fig. 9 Impulse responses of balanced reduction (from u_2 to y) for an input time delay system

Fig. 11 Impulse responses of balanced reduction (from u_1 to y_2) for a unilateral time delay system

分方程式の解により与えられることを明らかにした。また、数値例を用い平衡実現により得られた近似系がむだ時間系の性質を良好に保存することを示した。本稿で用いた補助系に基づく計算法は方向性むだ時間系に限らず、入力むだ時間系に置き換えることが可能な系ならば、同様にしてハンケル特異値を導出することが可能と考えられる。

最後に、本論文の記述に関して建設的な御意見をいただいた査読者の方々に謝意を表します。

参考文献

- 1) 安達, 児島, 石島: 入力にむだ時間を含む系の有限次元近似について, 1994年度修士論文
- 2) R. F. Curtain and K. Glover: Balanced realizations

for infinite dimensional systems; *Proc. Workshop on Operator Theory and Systems*, H. Bart, I. Gohberg and M. A. Kaashoek, eds., Birkhäuser-Verlag, Basel, 1986, Amsterdam, the Netherlands, June 4-7 (1985)

- 3) D. F. Enns: Model reduction with balanced realization; *23rd CDC*, pp. 127-132 (1984)
- 4) B. A. Francis: *A Course in H_∞ Control Theory*, Springer-Verlag (1987)
- 5) 藤中, 荒木: 方向性むだ時間系に対する離散形最適レギュレータ問題の解法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 20, No. 4, pp. 288-293 (1984)
- 6) K. Glover, J. Lam and J. R. Partington: Rational approximation of a class of infinite-dimensional systems; *Report CUED/F INFENG/TR. 20*, Cambridge University, U. K. (1988)
- 7) K. Glover, R. F. Curtain and J. R. Partington: Realisation and approximation of linear infinite-dimensional systems with error bounds; *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 26, No. 4, pp. 863-898 (1988)

- 8) I. C. Hwang, H. Nishino and Y. Ohta: On the Hankel singular values of input time delay systems; *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 31, No. 10, pp. 1650-1657 (1995)
 - 9) 泉, 児島, 石島: 一方向性むだ時間系のハンケル特異値について; 第39回自動制御連合講演会, pp. 149-152 (1996)
 - 10) 児島, 石島: 入力むだ時間系の可制御性/可観測性グラミアン-複数のむだ時間が存在する場合-; 第34回計測自動制御学会学術講演会予稿集, pp. 697-698 (1995)
 - 11) 児島, 安達, 石島: 入力むだ時間系の可制御性・可観測性グラミアン-有限次元近似への応用-; 計測自動制御学会論文集, Vol. 33, No. 4, pp. 260-267 (1997)
 - 12) 太田, 児島: 入力むだ時間系のハンケル特異値-準分離型積分核のグラミアンをもつクラス-; 計測自動制御学会論文集, Vol. 34, No. 6, pp. 523-531 (1998)
 - 13) A. J. Prichard and D. Salamon: The linear-quadratic control problem for retarded systems with delays in control and observation; *IMA J. Math. Contr. Inform.* 2, pp. 335-361 (1985)
-