柔軟構造物における構造系と制御系の同時最適設計 —ディスクリプタシステム表現*

多田 幸生[†]・Jung-Hyen PARK[‡]

Simultaneous Optimal Design of Structural and Control Systems in Flexible Structures —Representation by Descriptor System Forms*

Yukio TADA[†] and Jung-Hyen PARK[‡]

A simultaneous optimal design problem of structural and control systems is discussed for a 3-dimensional truss structure as an object. We use descriptor forms for a controlled object and a generalized plant because the structural parameters appear naturally in these forms. As the design purpose, we consider minimum weight design problem for structural system and suppression problem of the influence of disturbances for control system.

1. はじめに

構造系と制御系の同時最適設計は、高度な機械構造物を設計するための有力な動的設計手法の一つである。特に人工衛星や宇宙ステーションに代表される柔軟かつ大規模な構造物でも制御の難しい柔軟宇宙構造物などの設計には適切な手法と考えられる。すなわち、このような大規模構造物の設計では、軽量でなければならないという構造系の仕様と振動抑制などの厳しい制御系の仕様がある。しかし、軽量であれば剛性が低くなり、わずかな外乱によっても大きな振動が励起されることになる。そして、減衰が小さいためにいったん生じた振動はなかなか収まりにくいという欠点もある。そのような振動に対して制振特性を確保するためには制御系設計に対するコストが大きくなる。逆に制御系設計に対するコストを小さくするためには構造物の剛性をあげることが必要になり、構造重量が大きくなる。このように構造系設計と制御系設計の間に密接な関係があるとき、構造系と制御系を一つの系とみなして設計することが必要である [1,2]。

一般的にこの問題の多くは、設計対象が状態方程式で

記述されていることを前提として扱われてきた。本研究では、設計対象の表現にディスクリプタ形式を用いる。ディスクリプタ形式は、システムに現れる変数の間の動的・静的な関係をそのまま記述したものであり、ディスクリプタ形式を用いて変数間の結合や物理定数の配置に由来する構造を陽に表したモデリングができる [3~5]。

本研究では、3次元トラス構造物を有限要素法によりモデル化したものを設計対象として構造系と制御系の同時最適設計問題を扱う。構造系の評価関数は構造重量であり、制御系の評価関数は制御が施された全体閉ループ系の外乱から制御出力までの伝達関数の H^∞ ノルムである。同時最適設計問題における評価関数は、正規化された構造系と制御系の評価関数の重み付き線形和とする。この評価関数を最小化することによって構造重量と制御性能のバランスのとれた最適設計が可能となると考えられる。最適設計問題を扱うときの設計変数としてはトラス部材の断面積を採用し、数値例を通して本手法の有効性を示す。

2. システムの定式化と制御系の設計

本論文では、材質および構造的配置は変化しない n 本の部材からなる立体トラス構造物を設計対象とする。有限要素法（要素内で軸方向変位が 1 次式であると仮定、トラス部材 1 本を一つの要素とする）によってモデル化すると、その運動方程式は次のように表される。

$$M(a)\ddot{q} + D(a)\dot{q} + K(a)q = L_1 w + L_2 u \quad (1)$$

*原稿受付 1998 年 9 月 28 日

[†]神戸大学 工学部 Faculty of Engineering, Kobe University; 1-1 Rokkodai-Cho, Nada-Ku, Kobe 657-8501, JAPAN

[‡]神戸大学大学院 自然科学研究科 Graduate School of Science and Technology, Kobe University; 1-1 Rokkodai-Cho, Nada-Ku, Kobe 657-8501, JAPAN

Key Words: optimal design, structural control, descriptor system.

ただし, $M(a), D(a), K(a)$ はそれぞれ質量, 減衰, 剛性行列であり, q は節点変位ベクトル, L_1 は外乱入力配置行列, w は外乱入力, L_2 は操作入力配置行列, u は操作入力である. また, $a = [a_1 \cdots a_n]^T$ は設計変数である部材断面積 a_i ($i=1, \dots, n$) から成るベクトルである.

つぎに, x をディスクリプタ変数, z を制御出力, y を観測出力とし, (1) 式をディスクリプタ方程式で表現すると次のようになる.

$$E\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (2)$$

$$z = C_1x + D_{12}u \quad (3)$$

$$y = C_2x + D_{21}w \quad (4)$$

ここで, ディスクリプタ変数 x と係数行列は

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(a) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K(a) & -D(a) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

である. これに対して (1) 式の運動方程式を状態方程式に変換すると,

$$\dot{x} = A_s x + B_{1s} w + B_{2s} u \quad (6)$$

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M(a)^{-1}K(a) & -M(a)^{-1}D(a) \end{bmatrix}$$

$$B_{1s} = \begin{bmatrix} 0 \\ M(a)^{-1}L_1 \end{bmatrix}, B_{2s} = \begin{bmatrix} 0 \\ M(a)^{-1}L_2 \end{bmatrix}$$

となり, 質量行列 $M(a)$ が逆行列 $M(a)^{-1}$ の形で現れる. 一般に, $M(a)$ の要素の一つだけが変化した場合でも $M(a)^{-1}$ のすべての要素が変わるため, 構造系のパラメータの変更は, 状態方程式の係数行列の変更に複雑に現れる [5]. このような場合, ディスクリプタ方程式を採用することによって状態方程式表現の場合より計算処理時間をも短縮することができるのである.

制御対象を (2)~(4) 式のようなディスクリプタ方程式表現で表す. H^∞ 制御問題とは, Fig. 1 に示す閉ループ系の外乱入力 w から制御出力 z までの伝達関数行列 T_{zw} の H^∞ ノルムが, ある与えられた $\gamma > 0$ に対して次式を満たす内部安定な H^∞ コントローラ $K(s)$ を求めることである.

$$N = \|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (7)$$

$$T_{zw} = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}$$

$$G_{ij}(s) = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}$$

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup_w \sigma_{\max}(T_{zw}(j\omega))$$

ただし, $\sigma_{\max}(T_{zw})$ は T_{zw} の最大特異値である. 周波

Fig. 1 H^∞ control system

数領域で与えられている (7) 式の仕様は次式のように時間領域で表現できる.

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t) dt \quad (8)$$

(8) 式の右边がシステムへの外乱による影響を表すので, N の値が小さいほど外乱による振動の影響を押さえることができる.

ここで, 次の二つの対称なりカッチ方程式を考える.

$$(A - B_2 D_{12}^\# C_1)^T X + X^T (A - B_2 D_{12}^\# C_1) - X^T (B_2 R_{12}^{-1} B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X + (D_{12}^\perp C_1)^T (D_{12}^\perp C_1) = 0 \quad (9)$$

$$E^T X = X^T E \geq 0 \quad (10)$$

および

$$(A - B_1 D_{21}^\# C_2) Y + Y^T (A - B_1 D_{21}^\# C_2)^T - Y^T (C_2 R_{21}^{-1} C_2^T - \gamma^{-2} C_1 C_1^T) Y + B_1 C_{21}^\perp (B_1 D_{21}^\perp)^T = 0 \quad (11)$$

$$EY = Y^T E^T \geq 0 \quad (12)$$

ここで, $R_{12}, R_{21}, D_{12}^\#, D_{12}^\perp, D_{21}^\#, D_{21}^\perp$ は, それぞれ

$$R_{12} = D_{12}^T D_{12} > 0, R_{21} = D_{21} D_{21}^T > 0$$

$$D_{12}^\# = R_{12}^{-1} D_{12}^T, D_{12}^\perp = I - D_{12} D_{12}^\#$$

$$D_{21}^\# = D_{21}^T R_{21}^{-1}, D_{21}^\perp = I - D_{21}^\# D_{21}$$

である. この 2 本のりカッチ方程式を満たす解 X, Y が存在するとする. さらに,

$$\det(I_n - \gamma^{-2} Y X) \neq 0, Z = (I_n - \gamma^{-2} Y X)^{-1} \geq 0 \quad (13)$$

が成り立つと仮定する. このとき, 次式で与えられる H^∞ コントローラが存在する [6]. ここで, x_k はオブザーバによるディスクリプタ変数の推定値である.

$$E\dot{x}_k = A_k x_k + B_k y \quad (14)$$

$$u = C_k x_k + D_k y \quad (15)$$

ここで, A_k, B_k, C_k, D_k は次式のように表す.

$$\begin{aligned} A_k &= A - B_k C_2 + \gamma^{-2} Y^T C_1^T C_1 \\ &\quad + (B_2 + \gamma^{-2} Y^T C_1^T D_{12}) C_k \\ B_k &= (Y^T C_2^T + B_1 D_{21}^T) R_{21}^{-1} \\ C_k &= R_{12}^{-1} \{ D_{12}^T C_1 + (B_2 + \frac{1}{\gamma^2} Y^T C_1^T D_{12})^T Z \} \\ D_k &= 0 \end{aligned}$$

3. 同時最適設計問題

本研究では, 構造系に関しての最小重量設計問題と制御系に関しての外乱による影響の抑制問題を設計目的として考える. 対象構造物としてトラス構造物を採用すると, システムの質量, 減衰, 剛性行列はトラス部材の断面積の関数としてモデリングできる. 構造系の評価関数を全体構造重量 W とし, 制御系の評価関数は閉ループ系の外乱入力から制御出力までの伝達関数の H^∞ ノルム N とする. W は各部材の密度, 長さ, 断面積を ρ_i, l_i, a_i とすると

$$W(a) = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i a_i \quad (16)$$

と表せる. つぎに, この構造物に対して (17) 式のような区間で γ イタレーションを用いて H^∞ 最適制御問題を解き, その時の γ の最小値を N とする.

$$0 < \gamma \leq \gamma^{\max} \quad (17)$$

本研究で考える同時最適設計問題は, これら W と N の両方を小さくする非劣解を求めようというものである.

最適設計問題での評価関数 J を正規化された W と N との線形和として, 次式のように与える.

$$J(a) = w_W \frac{W(a)}{W_0} + w_N \frac{N(a)}{N_0} \quad (w_W + w_N = 1) \quad (18)$$

ここで, w_W, w_N はそれぞれ構造系と制御系の評価関数に対する重み係数であり, W_0 と N_0 は後に示す一様断面初期構造のときの構造重量と構造系の設計変数をその値で変化させずに制御系のみの単独設計を行ったときの N の値である. 設計変数として部材の断面積 a を採用し, (18) 式を最小化することによって, 構造重量と制御性能のバランスのとれた最適設計を可能にする.

H^∞ 制御問題は常に可解であるとは限らないので, その可解条件を最適設計問題の制約条件に加える必要がある. そこで, 最適設計問題を次式のように記述する.

$$\begin{aligned} \min_a J(a) &= w_W \frac{W(a)}{W_0} + w_N \frac{N(a)}{N_0} \\ \text{subject to } &\begin{cases} (9), (11) \text{ 式の解が存在する.} \\ (10), (12), (13) \text{ 式を満足する.} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

また, 設計変数に次のような制約条件を課す.

$$a^{\min} \leq a \leq a^{\max} \quad (20)$$

$a^{\min}, a^{\max}$ は部材断面積の下限值, 上限値である. なお, 最適設計問題を解く手法としては非線型問題に対するシンプレックス法 [7,8] を用いる.

4. 数値シミュレーション

Fig. 2 に示す 3 次元トラス構造物を設計対象とする. この 3 次元トラス構造物は以下のような無次元化された諸量を持つとする.

長部材長 ($a_l: l=1, \dots, 6$)	10
短部材長 ($a_s: s=7, \dots, 12$)	$2\sqrt{2}$
密度 (ρ)	1.0
縦弾性係数 (E)	10000

Fig. 2 の構造物では節点 5, 6, 7, 8, 9, 10 はそれぞれ x, y, z 方向が固定されているとする. いま, 節点 1 の x, y, z 方向にセンサが配置され, センサは節点 1 の変位を測定できるものとする. また, 節点 1 にはアクチュエータが x, y, z 方向に配置されており, 制御入力が増えられる. 外乱は節点 2, 3, 4 の y 方向に加わるものとする. 減衰特性は, 簡単のため構造減衰

$$D(a) = \alpha M(a) + \beta K(a) \quad (21)$$

と仮定し, $\alpha = 0.001, \beta = 0.001$ とする.

Fig. 2 3-D truss structure

(a) case1

(a) case3

(b) case2

(b) case4

Fig. 3 Distribution of cross sectional area

まず、各部材の断面積を $a_i = 1.0$ ($i = 1, \dots, 12$) と一様であるとする。これを初期構造と呼ぶ。この初期構造における構造重量 W は 76.971 であり、(17) 式に対応する次の区間で求められる N の値は 0.485 である。

$$0 < \gamma \leq 10 \quad (22)$$

初期構造におけるこの構造重量と H^∞ ノルムの値を (18) 式での W_0 , N_0 として用いる。

部材断面積を設計変数として (20) 式に対応する各部材の断面積への制約条件は以下とする。

$$0.5 \leq a_i \leq 1.5 \quad (i = 1, \dots, 12) \quad (23)$$

まず、重み係数を以下のように設定して、構造系と制御系の同時最適設計を行う。

$$(w_W, w_N) = (0.5, 0.5) \quad (24)$$

Fig. 4 Distribution of cross sectional area

この設定 (case1) で同時最適化を実行した結果、評価関数 J が最小値をとるときの構造重量 W は 71.383 となり、制御性能の評価関数である N の値は 0.437 となった。初期構造と比べて構造重量 W を 7.3%、外乱入力から制御出力までの伝達関数の H^∞ ノルム N を 9.9% 減らすことができた。また、重み係数を以下のように設定し (case2),

$$(w_W, w_N) = (0.6, 0.4) \quad (25)$$

同時最適化を実行した結果は W が 64.945 となり、 N は 0.460 となった。この場合は初期構造と比べて構造重量 W を 15.6%、外乱入力から制御出力までの伝達関数の H^∞ ノルム N を 5.2% 減らすことができた。これら二つのどの場合でも初期構造と比べて構造重量を低減することができ、外乱による振動に対する制振性能も向上していることがわかる。

つぎに、評価関数の中の重み係数を次のように設定して同時最適設計を実行した。

$$(w_W, w_N) = (0.7, 0.3) \quad (26)$$

この設定 (case3) で同時最適化を行った結果、評価関数 J が最小値をとる時の構造重量 W は 54.693 となり、制御性能の評価関数である N の値は 0.519 となった。初期構造と比べて構造重量 W は 28.9% も低減することができたが、 N の値は 7.0% 増加して外乱による振動に対する制振性能は悪化している。また、重み係数を次のように設定 (case4) し、

$$(w_W, w_N) = (0.3, 0.7) \quad (27)$$

同時最適化を実行した結果は W が 85.308 となり、 N は 0.419 となった。この場合には、初期構造と比べて N の値は 13.6% 減らすことができて外乱による振動に対する制振性能は向上しているが、構造重量は 10.8% 増加している。この結果は設計者が重み係数を選択することにより、設計仕様のバランスをコントロールすることができることを示している。各場合のトラス構造物の各部材の断面積を Figs. 3, 4 に示す。

ここからは、構造系と制御系の評価関数である構造重量 W と外乱入力から制御出力までの伝達関数の H^∞ ノルム N の関係について考察してみる。いくつかの重み係数 (w_W, w_N) に対して同時最適化を実行した結果、構造重量 W と外乱入力から制御出力までの伝達関数の H^∞ ノルム N の関係は Fig. 5 のように示される。Fig. 5 の中の * マークはトラスの各部材の断面積をすべて $a_i = 1.0$ ($i = 1, \dots, 12$) と一定にした初期構造の場合であり、

Fig. 5 Relation of structural weight and H^∞ norm

実線は部材断面積を変化させて同時最適化を行った場合の W と N の関係を表している。Fig. 5 の結果から構造重量 W と外乱入力から制御出力までの伝達関数の H^∞ ノルム N は互いに競合する関係にあることがわかる。すなわち、構造重量 W が大きくなれば H^∞ ノルム N の値はより小さい値まで解となり得ることができ、逆に構造重量 W が小さくなれば解となり得る H^∞ ノルム N の値は大きくなることがわかる。また、Fig. 5 の結果は本研究での重み係数法の有効性も示している。

つぎに、 N の値と制御性能について考察してみる。節点 2, 3, 4 の y 方向に Fig. 6 のような外乱が加わるとし、いくつかの場合の節点 1 の y 方向の変位の時間応答を Fig. 7 に示す。Fig. 7 (a), (b) は部材断面一様構造 $a_i = 0.5, 1.5$ の場合の応答であり、そのときのおのおの W の値は 38.485, 115.456 また N の値は 0.681, 0.393 であった。この結果から、構造重量が軽いほど外乱による影響が大きいのがわかる。また、Fig. 7 (c), (d) は一様断面構造 ($a_i = 1.0$) とほぼ同一重量の Pareto 最適構造 (case1) の場合の応答であり、case1 の方が外乱の影響が少ないことがわかる。この結果は、本研究での手法が軽量化と振動抑制という同時最適設計問題において有効であることを示している。

最後に、同様の仕様で状態方程式表現を用いて定式化を行って最適設計を実行し、ディスクリプタ方程式表現を用いる場合と計算時間を比較してみた。計算時間においては case1 の場合、ディスクリプタシステムを用いたときには 444 秒がかかり、通常の状態方程式を用いたときは 482 秒であった。case3 ではおのおの 376 秒, 553 秒であった。ディスクリプタ方程式表現を用いるときに計算時間が短いのがわかる。なお、数値計算には Sun Microsystems 社の Sun Ultra を利用した。

5. おわりに

本研究では、ディスクリプタ方程式で表されるシステ

Fig. 6 Disturbance

(a) Uniform cross sectional areas($a_i = 0.5$) (b) Uniform cross sectional areas($a_i = 1.5$) (c) Initial structure($a_i = 1.0$)

(d) Optimum cross sectional areas(case1)

Fig. 7 Response of y displacement at node 1

ムに対して構造系と制御系の同時最適設計法を提案した。この最適設計法においては、評価関数として構造系の評価関数である全体構造重量と制御系の評価関数である制御が施された全体閉ループ系の外乱から制御出力までの伝達関数の H^∞ ノルムの重み付き線形和を用いることによって、外乱に対する制御性能を向上させ、さらに構造重量を低減することができることを示した。またディスクリプタ方程式表現を用いることによって、状態方程式表現の場合より計算処理時間を短縮することができた。

参考文献

- [1] 小野田：宇宙構造物の構造と制御の同時最適設計；システム/制御/情報，Vol. 39, No. 3, pp. 136-141 (1995)
- [2] 多田，池田，菅，寺尾： H^∞ 制御による外乱抑制のもとでの構造物の最適設計（出力フィードバックによる場合）；機論C，Vol. 63, No. 610, pp. 1956-1961 (1997)
- [3] 郷，大日方：機械・構造系と制御系の統合最適設計問題（ディスクリプタ表現に基づく H^∞ 最適設計問題の定式化）；機論C，Vol. 62, No. 597, pp. 1765-1772 (1996)
- [4] 池田：Descriptor 形式に基づくシステム理論；計測と制御，Vol. 24, No. 7, pp. 597-604 (1985)
- [5] 池田：制御理論から見た同時最適設計手法；日本機械学会第 74 期全国大会講演資料集，Vol. 96, No. 15, pp. 74-75 (1996)
- [6] 鷹羽，片山：ディスクリプタシステムと H^∞ 制御；計測と制御，Vol. 34, No. 9, pp. 733-740 (1995)
- [7] 吉瀬：凸計画問題に対する最適化手法—内点法と解析的中心；システム/制御/情報，Vol. 38, No. 3, pp. 155-160 (1994)
- [8] M.J.Box, D.Davies and W.H.Swann: 非線形最適化の技法（黒田 訳），培風館，pp. 30-81 (1972)