有限な時間区間におけるサンプル値逆系の極限的性質 — 相対次数2の場合*

十河 拓也[†]・足立 紀彦[†]

A Limiting Property of the Inverse of Sampled-data Systems on a Finite Time Interval — The Case of Relative Degree 2*

Takuya SOGO[†] and Norihiko ADACHI[†]

It is tricky to predict the limiting property of the inverse of sampled-data systems obtained from linear continuous-time systems in a finite-time domain when the sampling period goes to 0. The reason is that, in some cases, all zeros tend to the boundary between the stable and unstable areas when the sampling period goes to 0, while the number of sample points goes to infinity. In this paper, we discuss the limiting property of the case of relative degree 2. It is demonstrated that inverse sampled-data systems converge to inverse continuous-time systems on the finite-time domain independently of the stability of zeros.

1. はじめに

逆システムの安定性すなわち伝達関数の零点の安定性は、さまざまな制御系設計の問題において重要な前提条件であることが多い。とりわけ、サンプル値系の伝達関数の零点はサンプル周期に依存してその配置が変化し、かつ、もとの連続時間系の伝達関数の零点と単純な対応関係がないため、その挙動について多くの研究が報告されている。また、その安定判別法や不安定なものを除去する様々な手法が発表されている [1,4,8,2,5,3]。

しかしながら、無限時間区間では考察の対象とならない不安定なシステムも、有限な時間区間で定式化される問題の場合は増大していく信号がその時間区間で許容範囲を越えなければ利用することに差し支えはない。したがって、有限な時間区間では極や零点が安定か不安定かを判別するのみならず、不安定な場合にはさらにその不安定な極や零点が考えている時間区間で及ぼす影響を明らかにすることが重要な問題である。そして、連続時間系についてのこの問題は、時間区間を固定すれば不安定な極や零点の安定限界（虚軸）からの距離だけに帰

着される単純な問題である。しかしながら、この問題はサンプル値系について考える場合は連続時間系のように極や零点の配置だけの問題に帰着できない。なぜなら、連続時間系の時間区間を固定して $[0, T]$ としてもサンプル周期 Δ のサンプル値系で考えるべき時間区間の長さは T/Δ に比例して変化し、同時に極や零点の配置もサンプル周期 Δ に依存して変化するからである。とくに、零点の配置は上に述べたようにサンプル周期に依存して複雑に変化するため、有限な時間区間上でのサンプル値系の逆システムの性質は自明な問題ではない。たとえば、以下のような連続時間系を時間区間 $[0, T]$ で考える。

$$G_1(s) = \frac{s-1}{s^2} \quad (1)$$

$$G_2(s) = \frac{2}{2s^2 - 3s + 1} \quad (2)$$

$$G_3(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad (3)$$

これらについて、サンプル周期 Δ のサンブラと0次ホルダを用いたサンプル値系を考えると、その伝達関数は以下ようになる。

$$H_1(z) = \frac{(2-\Delta)\Delta \left(z - \frac{2+\Delta}{2-\Delta} \right)}{2(z-1)^2} \quad (4)$$

*原稿受付 1998年12月14日

[†]京都大学 大学院 情報学研究科 Graduate School of Informatics, Kyoto University; Yoshida-Honmachi, Sakyo ward, Kyoto city, Kyoto 606-8501, JAPAN

Key Words: sampled-data system, inverse system, limiting zero, iterative learning control.

$$H_2(z) = 2(e^{\Delta/2} - 1)^2 \frac{z - q_1(\Delta)}{(z - e^{\Delta})(z - e^{\Delta/2})} \quad (5)$$

ただし, $q_1(\Delta) = -1 - \frac{\Delta}{2} + O(\Delta^2)$.

$$H_3(z) = \frac{2 - (\Delta^2 + 2\Delta + 2)e^{-\Delta}}{2} \frac{(z - q_2(\Delta))(z - q_3(\Delta))}{(z - e^{-\Delta})^3} \quad (6)$$

ただし, $q_2(\Delta) \rightarrow -2 - \sqrt{3}$ および $q_3(\Delta) \rightarrow -2 + \sqrt{3}$ である. なお, これらのサンプル値系の時間区間は $\{0, 1, \dots, T/\Delta - 1, T/\Delta\}$ (ただし T/Δ は整数とする) となる. これらのサンプル値系の逆システムの入力として恒等的に 0 でない関数 $y_d(t)$ をサンプルしたデータ $\{y_d(0), y_d(\Delta), y_d(2\Delta), \dots, y_d(T - \Delta), y_d(T)\}$ を与えることを考える. このとき, $H_3^{-1}(z)$ の出力は, 不安定な $-2 - \sqrt{3}$ へ近づく零点 $q_2(\Delta)$ の影響によりサンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ とすると T/Δ とともにいくらでも増大することが予想される. しかしながら, $H_1^{-1}(z)$ および $H_2^{-1}(z)$ の場合, サンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ のとき

$$\frac{2 + \Delta}{2 - \Delta} \rightarrow 1 + 0 \quad (7)$$

$$q_1(\Delta) \rightarrow -1 - 0 \quad (8)$$

となって, すべての極 ($H_1(z)$ および $H_2(z)$ の零点) が安定限界 (単位円周上) へ近づいていくため, $H_3^{-1}(z)$ と同様に出力が T/Δ とともに増大するかどうかは自明ではない. 実際, $H_1^{-1}(z)$ についてサンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ とした場合, その出力は, 関数 $y_d(t)$ が連続関数 ($u_d(t)$ とする) を $G_1(s)$ の入力としたときの応答関数であるなら増大せず, $u_d(t)$ をサンプルしたものに収束することが知られている [9]. さらに, この性質は $G_1(s)$ についてのみならずもとの連続時間系の相対次数が 1 のシステムに共通の性質であることも明らかになっている [9]. 本論文では, $G_2(s)$ のような相対次数 2 のシステムについてこのような共通の性質の有無について調べ, 相対次数 1 の場合と同様に零点の安定性によらずその性質が存在することを明らかにする.

2. 数学的準備

ここでは, サンプル値系の零点についてこれまでに知られている結果をまとめ, さらに, 後の議論のための準備を行う.

以下のような連続時間 1 入出力線形システムを考える.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_c x(t) + b_c u(t) \\ y(t) &= c x(t) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, $x \in R^n$, $u \in R$, $y \in R$ とし, 初期値 $x(0) = 0$ と

する. このとき, 伝達関数は

$$G(s) = c(sI - A_c)^{-1}b_c \quad (10)$$

$$= \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (11)$$

ただし

$$N_c(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A_c & -b_c \\ c & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$D_c(s) = \det(sI - A_c) \quad (13)$$

と表される.

つぎに, サンプル周期 Δ のサンブラと同じ周期の 0 次ホールドを (9) 式に用いて得られるサンプル値系を考える. このサンプル値系のサンプル点 $\{k\Delta; k=0, 1, \dots\}$ における y , x および u の関係は次のように表される.

$$\begin{aligned} x((k+1)\Delta) &= A_\Delta x(k\Delta) + b_\Delta u(k\Delta) \\ y(k\Delta) &= c x(k\Delta) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで

$$A_\Delta = \exp A_c \Delta \quad (15)$$

$$b_\Delta = \int_0^\Delta \exp(A_c \tau) b_c d\tau \quad (16)$$

パルス伝達関数は次のように表される.

$$\begin{aligned} H(z) &= c(zI - A_\Delta)^{-1}b_\Delta \\ &= \frac{N(z)}{D(z)} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで

$$N(z) = \det \begin{bmatrix} zI - A_\Delta & -b_\Delta \\ c & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$D(z) = \det(zI - A_\Delta) \quad (19)$$

いま, $G(s)$ が

$$G(s) = \frac{K(s - \gamma_1)(s - \gamma_2) \cdots (s - \gamma_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (20)$$

のように表されるとし,

$$\forall \Delta \in (0, \epsilon_0) \quad cb_\Delta \neq 0 \quad (21)$$

となる $\epsilon_0 > 0$ が存在すると仮定すれば, $H(z)$ は (18) 式および (19) 式より

$$H(z) = \frac{cb_\Delta(z - q_1(\Delta)) \cdots (z - q_{n-1}(\Delta))}{(z - \exp(p_1\Delta)) \cdots (z - \exp(p_n\Delta))} \quad (22)$$

と表されることがわかる．一般に，連続時間系の零点 $\{\gamma_i\}$ とサンプル値系の零点 $\{q_i(\Delta)\}$ の間には極 $\{p_i\}$ および $\{\exp(p_i\Delta)\}$ のような単純な関係はないが，サンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ としたときの漸近的な性質については次のことが知られている．

【定理 1】[1] 伝達関数 $G(s)$ は厳密にプロパー (i.e. $m < n$) であると仮定する．このとき，ほとんどすべての $\Delta > 0$ に対して， $H(z)$ は $n-1$ 個の零点を持ち， $\Delta \rightarrow 0$ のとき $H(z)$ は

$$K \frac{\Delta^{n-m}}{(n-m)!} \frac{(z-1)^m B_{n-m}(z)}{(z-1)^n} \quad (23)$$

へ近づく．ここで，

$$B_p(z) = b_{p1}z^{p-1} + b_{p2}z^{p-2} + \cdots + b_{pp} \quad (24)$$

$$b_{pk} = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \gamma_i^p \binom{p+1}{k-i} \quad (25)$$

□

この定理によると $n-1$ 個の零点は，1 へ収束する m 個の零点と多項式 $B_{n-m}(z)$ の零点へ収束する $n-m-1$ 個の零点の 2 種類に分類されることがわかる．これら 2 種類の零点のうち，前者の零点について次のことが知られている．

【定理 2】[3] 1 へ近づく零点はサンプル周期 Δ に関して次のようにテイラー展開される．

$$q_i(\Delta) = 1 + \gamma_i \Delta + \frac{\gamma_i^2}{2} \Delta^2 + \left(\frac{\gamma_i^3}{6} + \frac{\gamma_i c b_c}{12 G'(\gamma_i)} \right) \Delta^3 + O(\Delta^4) \quad (26)$$

ここで， $i = 1, 2, \dots, m$ ．

□

いま，相対次数 $n-m=2$ の場合を考えれば， $B_2(z) = z+1$ であるから定理 1 より $H(z)$ は安定限界の 1 または -1 に近づく零点のみを持つことがわかる．この -1 へ近づく零点のテイラー展開については次を示すことができる．

【補題 1】 相対次数 $n-m=2$ と仮定し， $m \geq 1$ のとき零点 $\{q_i(\Delta); i=1, 2, \dots, m\}$ は (26) 式のようにテイラー展開されるものとする．このとき，残る一つの零点は

$$q_{n-1}(\Delta) = \begin{cases} -1 - \frac{4cA_c^2 b_c - \text{trace}(A_c) c A_c b_c}{3cA_c b_c} \Delta \\ \quad + O(\Delta^2) \quad (\text{if } n=2) \\ -1 - \frac{cA_c^2 b_c}{3cA_c b_c} \Delta + O(\Delta^2) \\ \quad (\text{if } n \geq 3) \end{cases} \quad (27)$$

と表される．

(証明) 付録 1.

□

つぎに，連続時間系 (9) 式を有限な時間区間 $[0, T]$ 上で考えると，その入出力写像は

$$y = Su \quad (u, y \in L_2[0, T]) \quad (28)$$

となる．ここで

$$Su = \int_0^t c e^{A_c(t-\tau)} b_c u(\tau) d\tau \quad (29)$$

さらに，サンプル値系 (14) 式も $[0, T]$ 上で考え，サンプル周期 Δ は N を自然数として $N\Delta = T$ を満たすものとすれば，サンプル点 $\{0, \Delta, 2\Delta, \dots, T-\Delta, T\}$ における入出力関係は次のように表される．

$$w_\Delta = \Gamma_\Delta v_\Delta \quad (30)$$

ただし，

$$v_\Delta = [u(0) \ u(\Delta) \ \cdots \ u(T)]^T \quad (31)$$

$$w_\Delta = [y(0) \ y(\Delta) \ \cdots \ y(T)]^T \quad (32)$$

$$\Gamma_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c b_\Delta & 0 & & \\ c A_\Delta b_\Delta & c b_\Delta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \ 0 \\ c A_\Delta^{N-1} b_\Delta & \cdots & c A_\Delta b_\Delta & c b_\Delta \ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

このとき，サンプル点 $\{0, \Delta, 2\Delta, \dots, T-\Delta, T\}$ におけるサンプル値系の逆システムを Γ_Δ の Moore-Penrose 逆行列 [6] Γ_Δ^+ と定義する．なお， $\forall \Delta \in (0, \epsilon_0)$ に対して $c b_\Delta \neq 0$ となる正定数 ϵ_0 がとれ， $c b_\Delta \neq 0$ のときは

$$\Gamma_\Delta^+ = \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} c b_\Delta & 0 \\ \vdots & \ddots \\ c A_\Delta^{N-1} b_\Delta & \cdots & c b_\Delta \end{bmatrix}^{-1} \\ \vdots & \begin{bmatrix} c A_\Delta^{N-1} b_\Delta & \cdots & c b_\Delta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (34)$$

と表されることに注意する．

以下では，次のように定義されるサンプリング作用素 $\sigma_\Delta: L_2[0, T] \rightarrow R^{N+1}$ および N 次ホールド作用素 $\theta_\Delta: R^{N+1} \rightarrow L_2[0, T]$ を用いる．

$$\sigma_\Delta[u] = [u(0) \ u(\Delta) \ \cdots \ u((N-1)\Delta) \ u(T)]^T \quad (35)$$

$$[\theta_\Delta v](t) = \begin{cases} v_k & \text{if } t \in [(k-1)\Delta, k\Delta) \\ & (k=1, 2, \dots, \frac{T}{\Delta}) \\ v_{T/\Delta+1} & \text{if } t = T \end{cases} \quad (36)$$

また，次のような記法を用いる．

$C^k[0, T]: [0, T]$ 上 k 回連続的微分可能な関数 (37)

$$\|u\|_\infty = \sup\{|u(t)|; t \in [0, T]\} \quad (38)$$

$$\|u\|'_\infty = \sup\{|u(t)|; t \in [0, T]\} \quad (39)$$

3. 主要な結果

ここではある固定された関数 y^* を時間区間 $[0, T]$ でサンプリングしてサンプル値系の逆システムの入力としたときの出力 $\Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^*$ の振舞に関する結果を示す。

【定理 3】 相対次数 $n-m=2$ とし、関数 y^* は $y^* = Su^*$ を満たすものとする。ここで、 $u^* \in C^1[0, T]$ 。このとき、サンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ とすれば

$$\|\theta_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - u^*\|'_\infty \rightarrow 0 \quad (40)$$

□

(注意 1) 定理 3 の結果は $H(z)$ の零点の安定性に依存しない。 □

(注意 2) (34) 式より $\forall \Delta \in (0, \delta)$ に対して $[\Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^*](N+1) \equiv 0$ すなわち $[\theta_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^*](T) \equiv 0$ が成り立つ。したがって、(40) 式の収束はノルム $\|\cdot\|_\infty$ では一般に成り立たず、 $t=T$ を除くノルム $\|\cdot\|'_\infty$ での収束は最良の結果である。 □

定理 3 を示すために、まず、次の命題を準備する。

【命題 1】 $u^* \in C^0[0, T]$ ならば $\Delta \rightarrow 0$ のとき

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i} S \theta_\Delta \sigma_\Delta u^* - \frac{d^i}{dt^i} S u^* \right\|_\infty \rightarrow 0 \quad (41)$$

が $i=0, 1, \dots, n-m$ について成り立つ。ここで、 $\frac{d^0}{dt^0} S = S$ (証明) u^* は有界閉区間 $[0, T]$ 上の連続関数であるから、一様連続性すなわち

$$\psi(\Delta) = \sup\{|u^*(t_1) - u^*(t_2)|; |t_1 - t_2| \leq \Delta, t_1, t_2 \in [0, T]\} \quad (42)$$

とおくとき $\psi(\Delta) \rightarrow 0 (\Delta \rightarrow 0)$ が成り立つ。一方、

$$\psi(\Delta) \geq \sup\{|u^*(n\Delta) - u^*(t_2)|; |n\Delta - t_2| \leq \Delta, t_2 \in [0, T], n=0, \dots, T/\Delta\} \quad (43)$$

$$\geq \sup\{|u^*(n\Delta) - u^*(t_2)|; 0 \leq t_2 - n\Delta < \Delta, t_2 \in [0, T], n=0, \dots, T/\Delta\} \quad (44)$$

$$= \sup\{|\theta_\Delta \sigma_\Delta u^*(t) - u^*(t)|; 0 \leq t - n\Delta < \Delta, t \in [0, T], n=0, \dots, T/\Delta\} \quad (45)$$

$$= \sup\{|\theta_\Delta \sigma_\Delta u^*(t) - u^*(t)|; t \in [0, T]\} \quad (46)$$

であるから、 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \|\theta_\Delta \sigma_\Delta u^* - u^*\|_\infty = 0$ が成立する。さらに、

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i} S \right\|_\infty = \sup \left\{ \frac{\left\| \frac{d^i}{dt^i} S u \right\|_\infty}{\|u\|_\infty}; u(t): [0, T] \text{ 上区分的に連続な関数 } \right\} < +\infty \quad (47)$$

であることから、(41) 式が導かれる。 □

(注意 3) 命題 1 の収束は $H(z)$ の極の安定性、つまり $G(s)$ の極の安定性に依存しない。 □

定理 3 を示すには、まず、

$$\begin{aligned} & \|\theta_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - u^*\|'_\infty \\ & \leq \|\theta_\Delta \sigma_\Delta u^* - u^*\|'_\infty \\ & \quad + \|\theta_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - \theta_\Delta \sigma_\Delta u^*\|'_\infty \\ & \leq \|\theta_\Delta \sigma_\Delta u^* - u^*\|'_\infty \\ & \quad + \max\{|\theta_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - \sigma_\Delta u^*|(k)|; \\ & \quad k=0, 1, \dots, N-1\} \end{aligned} \quad (48)$$

となることと、 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \|\theta_\Delta \sigma_\Delta u^* - u^*\|'_\infty = 0$ が成り立つことから、 $\Delta \rightarrow 0$ のとき

$$\max\{|\theta_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - \sigma_\Delta u^*|(k)|; k=0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow 0 \quad (49)$$

となることを示せばよいことがわかる。さらに、 Γ_Δ^+ の定義、 $y^* = Su^*$ および $\Gamma_\Delta = \sigma_\Delta S \theta_\Delta$ より

$$\begin{aligned} & [\Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - \sigma_\Delta u^*](k) \\ & = [\Gamma_\Delta^+ (\sigma_\Delta y^* - \Gamma_\Delta \sigma_\Delta u^*)](k) \end{aligned} \quad (50)$$

$$= [\Gamma_\Delta^+ (\sigma_\Delta Su^* - \sigma_\Delta S \theta_\Delta \sigma_\Delta u^*)](k) \quad (51)$$

($k=0, 1, \dots, N-1$) であるから、

$$\max\{|\Gamma_\Delta^+ (\sigma_\Delta Su^* - \sigma_\Delta S \theta_\Delta \sigma_\Delta u^*)|(k)|; k=0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow 0 \quad (52)$$

を示せばよい。命題 1 の $i=0$ の場合を考えれば、これは Γ_Δ^+ が有界ならば直ちに帰結されることがわかる。実際、 Γ_Δ^+ の有界性は相対次数 $n-m=0$ のときは示される [9]。しかしながら、定理 3 で考えている相対次数 $n-m=2$ の場合には成り立たない。そこで、ここでは Γ_Δ^+ の第 $N+1$ 行を取り除いた行列 $\Gamma_\Delta^+(N, N+1)$ を構造の単純な $\Lambda_{\Delta 2}$ および $\Lambda_{\Delta 3}$ を用いて

$$\Gamma_\Delta^+(N, N+1) = \Lambda_{\Delta 1} \Lambda_{\Delta 2} \Lambda_{\Delta 3} \quad (53)$$

のように分解し、

$$\max\{|\Lambda_{\Delta 2} \Lambda_{\Delta 3} (\sigma_\Delta Su^* - \sigma_\Delta S \theta_\Delta \sigma_\Delta u^*)|(k)|;$$

$$k=0,1,\dots,N-1\} \rightarrow 0 \quad (54)$$

を示して、さらに、 $\Lambda_{\Delta 1}$ の有界性を示すことによって (52) 式を証明することにする。

以下では、相対次数 $n-m=2$ の場合のみを考え、 Δ は十分小さく $cb_{\Delta} \neq 0$ であると仮定する。まず、(14) 式によって定義される入出力写像 $\{u(k\Delta); k=0,1,\dots,N-1\} \rightarrow \{y(k\Delta); k=0,1,\dots,N\}$ を以下の関係式 (55), (56), (57) によってそれぞれ定義される三つの写像

$$\{u(k\Delta); k=0,1,\dots,N-1\} \rightarrow \{\eta(k); k=0,1,\dots,N-1\}$$

$$\{\eta(k); k=0,1,\dots,N-1\} \rightarrow \{\zeta(k); k=0,1,\dots,N-2\}$$

$$\{\zeta(k); k=0,1,\dots,N-2\} \rightarrow \{y(k\Delta); k=0,1,\dots,N\}$$

に分解する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x((k+1)\Delta) \\ v_1(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{\Delta} & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k\Delta) \\ v_1(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix} u(k\Delta) \\ \eta(k) &= \begin{bmatrix} \frac{c(A_{\Delta}-3I)}{\Delta^2} & \frac{4}{\Delta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k\Delta) \\ v_1(k) \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{cb_{\Delta}}{\Delta^2} u(k\Delta) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\zeta(k) = \eta(k+1) + \eta(k) \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{31}(k+1) \\ v_{32}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31}(k) \\ v_{32}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta^2 \end{bmatrix} \zeta(k) \\ y(k\Delta) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31}(k) \\ v_{32}(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (57)$$

したがって、行列 $\Gamma_{\Delta}^+(N, N+1)$ による写像 $\{y(k\Delta); k=0,1,\dots,N\} \rightarrow \{u(k\Delta); k=0,1,\dots,N-1\}$ は以下の関係式による三つの写像に分解される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x((k+1)\Delta) \\ v_1(k+1) \end{bmatrix} &= \bar{A}_{\Delta} \begin{bmatrix} x(k\Delta) \\ v_1(k) \end{bmatrix} + \bar{b}_{\Delta} \eta(k) \\ u(k\Delta) &= \bar{c}_{\Delta} \begin{bmatrix} x(k\Delta) \\ v_1(k) \end{bmatrix} + \frac{\Delta^2}{cb_{\Delta}} \eta(k) \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} v_2(k+1) &= -v_2(k) + \zeta(k) \\ \eta(k) &= v_2(k) \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \zeta(k) &= \frac{1}{\Delta^2} \{y((k+2)\Delta) \\ &\quad - 2y((k+1)\Delta) + y(k\Delta)\} \end{aligned} \quad (60)$$

ここで、

$$\bar{A}_{\Delta} = \begin{bmatrix} A_{\Delta} - \frac{b_{\Delta}c(A_{\Delta}-3I)}{cb_{\Delta}} & -\frac{4b_{\Delta}}{cb_{\Delta}} \\ c & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta^2 b_{\Delta}}{cb_{\Delta}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_{\Delta} = \begin{bmatrix} -\frac{c(A_{\Delta}-3I)}{cb_{\Delta}} & -\frac{4}{cb_{\Delta}} \end{bmatrix}$$

このことから、行列 $\Gamma_{\Delta}^+(N, N+1)$ は、以下のように定義される $N \times N$ 行列 $\Lambda_{\Delta 1}$ 、 $N \times (N-1)$ 行列 $\Lambda_{\Delta 2}$ および $(N-1) \times (N+1)$ 行列 $\Lambda_{\Delta 3}$ を用いて (53) 式のように表されることがわかる。

$$\Lambda_{\Delta 1} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta^2}{cb_{\Delta}} & & & & 0 \\ \bar{c}_{\Delta} \bar{b}_{\Delta} & \frac{\Delta^2}{cb_{\Delta}} & & & \\ \bar{c}_{\Delta} \bar{A}_{\Delta} \bar{b}_{\Delta} & \bar{c}_{\Delta} \bar{b}_{\Delta} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\Delta^2}{cb_{\Delta}} \\ \bar{c}_{\Delta} \bar{A}_{\Delta}^{N-2} \bar{b}_{\Delta} & \dots & \bar{c}_{\Delta} \bar{A}_{\Delta} \bar{b}_{\Delta} & \bar{c}_{\Delta} \bar{b}_{\Delta} & \frac{\Delta^2}{cb_{\Delta}} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{\Delta 2} = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ -1 & 1 & 0 & & \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ (-1)^N & \dots & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{\Delta 3} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

なお、(58) (59) (60) 式への分解は仮に無限時間区間で考えれば伝達関数 $H^{-1}(z)$ のつぎのような分解に相当することに注意する。

$$H^{-1}(z) = H_1^{-1}(z) H_2^{-1}(z) H_3^{-1}(z) \quad (61)$$

ここで、

$$H_1^{-1}(z) = \frac{\Delta^2}{cb_{\Delta}} \frac{(z+1)(z-\exp(p_1\Delta)) \cdots (z-\exp(p_n\Delta))}{(z-1)^2(z-q_1(\Delta)) \cdots (z-q_{n-1}(\Delta))}$$

$$H_2^{-1}(z) = \frac{1}{z+1}$$

$$H_3^{-1}(z) = \frac{(z-1)^2}{\Delta^2}$$

つぎに、定理 3 の証明のために以下のような $A_{\Delta 1}$ の有界性に関する補題および (54) 式を示すのに必要な $A_{\Delta 2}$ に関する補題を準備する。

【補題 2】 数列 $\{\eta(k); k=0, 1, \dots, N-1 (=T/\Delta-1)\}$ を考え

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} u(0) & u(\Delta) & \dots & u((N-1)\Delta) \end{bmatrix}^T \\ &= A_{\Delta 1} \begin{bmatrix} \eta(0) & \eta(1) & \dots & \eta(N-1) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (62)$$

とすると、任意の $\Delta \in (0, \epsilon)$ および任意の数列 $\{\eta(k)\}$ について

$$\begin{aligned} & \max\{|u(k\Delta)|; k=0, 1, \dots, N-1 (=T/\Delta-1)\} \\ & \leq M_1 \max\{|\eta(k)|; k=0, 1, \dots, N-1 (=T/\Delta-1)\} \end{aligned} \quad (63)$$

が成り立つ。ここで、 ϵ および M_1 は正定数。

(証明) 付録 2. $\square$

【補題 3】 数列 $\{\zeta(k); k=0, 1, \dots, N-2\}$ を

- (1) $\zeta(k) = \Delta^p f_{\Delta}(t_k)$ ($p \geq 1$) ここで $t_k \in [0, T]$ および $\Delta \rightarrow 0$ のとき $\|f_{\Delta}\|_{\infty} \rightarrow 0$
- (2) $\zeta(k) = \Delta^p f(t_k)$ ($p \geq 1$) ここで $t_k \in [0, T]$, $|t_{k+1} - t_k| \leq M_2 \Delta$ (M_2 : 正定数), $f \in C^0[0, T]$
- (3) $\zeta(k) = f_{\Delta}(k\Delta) - f(k\Delta)$ ここで, $f_{\Delta}, f \in C^1[0, T]$ かつ $\Delta \rightarrow 0$ のとき $\left\| \frac{d}{dt} f_{\Delta} - \frac{d}{dt} f \right\|_{\infty} \rightarrow 0$

のいずれかによって定義されるとし、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \eta(0) & \eta(1) & \dots & \eta(N-1) \end{bmatrix}^T \\ &= A_{\Delta 2} \begin{bmatrix} \zeta(0) & \zeta(1) & \dots & \zeta(N-2) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (64)$$

とすると、 $\Delta \rightarrow 0$ に対して

$$\max\{|\eta(k)|; k=0, 1, \dots, N-1 (=T/\Delta-1)\} \rightarrow 0 \quad (65)$$

となる。

(証明) 付録 3. $\square$

(定理 3 の証明)

上に述べたことと (53) 式により、(40) 式を示すには

$$\begin{aligned} & \max\{|\Lambda_{\Delta 1} \Lambda_{\Delta 2} \Lambda_{\Delta 3} (\sigma_{\Delta} S u^* - \sigma_{\Delta} S \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*)|(k)|; \\ & k=0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (66)$$

の成立を示せばよい。

まず、 $\Lambda_{\Delta 3} (\sigma_{\Delta} S u^* - \sigma_{\Delta} S \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*)$ について調べる。

$G(s)$ は相対次数 $n-m=2$ であるから、

$$G(s) = K \frac{1}{s^2} + L \frac{1}{s^3} + \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^3 (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)} \quad (67)$$

のように表され、 S も次のように分解されることに注意する。

$$y = S u = S_1 u + S_2 u + S_3 u \quad (68)$$

ここで

$$S_1 u = K \int_0^t \int_0^{\tau} u(\sigma) d\sigma d\tau \quad (69)$$

$$S_2 u = L \int_0^t \int_0^{\tau} \int_0^{\sigma} u(x) dx d\sigma d\tau \quad (70)$$

$$S_3 u = \int_0^t \hat{c} \exp(\hat{A}(t-\tau)) \hat{b} u(\tau) d\tau \quad (71)$$

ここで、 $(\hat{A}, \hat{b}, \hat{c})$ は (67) 式第 3 項の相対次数 4 のシステムの実現である。このとき、

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\Delta 3} (\sigma_{\Delta} S u^* - \sigma_{\Delta} S \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*) \\ &= \Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} S_1 u^* + \Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} S_2 u^* + \Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} S_3 u^* - \\ & \quad (\Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} S_1 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^* + \Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} S_2 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^* \\ & \quad + \Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} S_3 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*) \end{aligned} \quad (72)$$

であり、 $Y = [y(0) \dots y(N)]^T$ とするとき

$$[\Lambda_{\Delta 3} Y](k) = \frac{y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)}{\Delta^2} \quad (73)$$

($k=0, \dots, N-2$) と表されることに注意して、(72) 式右辺の各項について平均値定理を用いると以下を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} [S_1 u^*](k) \\ &= K \left\{ u^*(k\Delta) + \Delta \frac{4}{3} \frac{d}{dt} u^*((k+2\phi_1(k, \Delta))\Delta) \right. \\ & \quad \left. - \Delta \frac{1}{3} \frac{d}{dt} u^*((k+2\phi_2(k, \Delta))\Delta) \right\} \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} [S_2 u^*](k) \\ &= L \left\{ \int_0^{k\Delta} u^*(\tau) d\tau + \Delta \frac{4}{3} \frac{d}{dt} u^*((k+2\phi_3(k, \Delta))\Delta) \right. \\ & \quad \left. - \Delta \frac{1}{3} \frac{d}{dt} u^*((k+2\phi_4(k, \Delta))\Delta) \right\} \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} [S_3 u^*](k) \\ &= K \left\{ \frac{d^2}{dt^2} S_3 u^*(k\Delta) + \Delta \frac{4}{3} \frac{d^3}{dt^3} S_3 u^*((k+2\phi_5(k, \Delta))\Delta) \right. \\ & \quad \left. - \Delta \frac{1}{3} \frac{d^3}{dt^3} S_3 u^*((k+2\phi_6(k, \Delta))\Delta) \right\} \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} [S_1 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*](k) \\ &= K \left(u^*(k\Delta) + \frac{\Delta}{2} \frac{d}{dt} u^*((k + \phi_7(k, \Delta))\Delta) \right) \quad (77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} [S_2 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*](k) \\ &= L \left(\int_0^{k\Delta} [\theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*] d\tau \right. \\ & \quad \left. + \Delta u^*(k\Delta) + \frac{\Delta^2}{6} \frac{d}{dt} u^*((k + \phi_8(k, \Delta))\Delta) \right) \quad (78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} [S_3 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*](k) \\ &= \frac{d^2}{dt^2} [S_3 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*](k\Delta) \\ & \quad + \Delta \frac{4}{3} \frac{d^3}{dt^3} [S_3 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*]((k + 2\phi_9(k, \Delta))\Delta) \\ & \quad - \Delta \frac{1}{3} \frac{d^3}{dt^3} [S_3 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*]((k + 2\phi_{10}(k, \Delta))\Delta) \quad (79) \end{aligned}$$

ここで, $0 \leq \phi_i(k, \Delta) \leq 1$ ($i=1, 2, \dots, 10$). さらに, (79) 式は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\Delta 3} \sigma_{\Delta} [S_3 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*](k) \\ &= \frac{d^2}{dt^2} [S_3 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*](k\Delta) \\ & \quad + \Delta \frac{4}{3} \left\{ \frac{d^3}{dt^3} [S_3 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*]((k + 2\phi_9(k, \Delta))\Delta) \right. \\ & \quad \left. - \frac{d^3}{dt^3} [S_3 u^*]((k + 2\phi_9(k, \Delta))\Delta) \right\} \\ & \quad - \Delta \frac{1}{3} \left\{ \frac{d^3}{dt^3} [S_3 \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*]((k + 2\phi_{10}(k, \Delta))\Delta) \right. \\ & \quad \left. - \frac{d^3}{dt^3} [S_3 u^*]((k + 2\phi_{10}(k, \Delta))\Delta) \right\} \\ & \quad + \Delta \frac{4}{3} \frac{d^3}{dt^3} [S_3 u^*]((k + 2\phi_9(k, \Delta))\Delta) \\ & \quad - \Delta \frac{1}{3} \frac{d^3}{dt^3} [S_3 u^*]((k + 2\phi_{10}(k, \Delta))\Delta) \quad (80) \end{aligned}$$

以上と, 命題 1 から

$$[\Lambda_{\Delta 3}(\sigma_{\Delta} S u^* - \sigma_{\Delta} S \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*)](k) \quad (81)$$

($k=0, 1, \dots, N-2$) は補題 3 の (1)~(3) のような数列の線形結合になっていることがわかる. したがって, 補題 3 より

$$\begin{aligned} & \max\{[\Lambda_{\Delta 2} \Lambda_{\Delta 3}(\sigma_{\Delta} S u^* - \sigma_{\Delta} S \theta_{\Delta} \sigma_{\Delta} u^*)](k); \\ & k=0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow 0 \quad (82) \end{aligned}$$

が得られ, さらに補題 2 を適用して (52) 式を得る. 以上で定理 3 が示された. $\square$

4. 結果の意味と数値例

関数 $y(t)$ ($t \in [0, T]$) が定理 3 の仮定の y^* のようなものであれば, 以下のような (9) 式の逆システムを用いて $y = S u$ なる u を求めることができる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= \{A_c + b_c F^{-1} c A_c\} x(t) + b_c F^{-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-m} y(t) \\ u(t) &= F^{-1} c A_c^{n-m} x(t) + F^{-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-m} y(t) \quad (83) \end{aligned}$$

ここで, $F = c A_c^{n-m-1} b_c$ および $x(0) = 0$ とする. 逆システム (83) 式の入出力写像を $u = S^{-1} y$ と表せば, 定理 3 の結論は

$$\|\theta_{\Delta} \Gamma_{\Delta}^+ \sigma_{\Delta} y^* - S^{-1} y^*\|_{\infty}' \rightarrow 0 \quad (84)$$

と表される. これはサンプル値系の逆システムが連続時間系の逆システムを近似することを意味している. さらに, 参考文献 [9] の結果とあわせると相対次数が 2 以下の場合に共通してこのような性質があることがわかる.

反復学習制御 [7], すなわち有限時間区間において繰り返し得た入出力実験データに基づいて望ましい応答 y^* を実現するための入力 $S^{-1} u^*$ を求める手法は, 相対次数が 2 以下の場合にはサンプル値系においてはサンプルされた望ましい応答 $\sigma_{\Delta} y^*$ を実現するための入力 $\Gamma_{\Delta}^+ \sigma_{\Delta} y^*$ を得る手法 [10] として連続時間系と同様に問題を定式化すればよい. なぜなら, (84) 式の成立はサンプル周期を十分小さく取ることによってサンプル点間のリップルをいくらでも小さくできることを意味するからである.

一方, 相対次数が 3 以上の場合には (84) 式のような性質は一般に期待できない. なぜなら, 相対次数が 2 以下の場合のようにすべての零点が単位円周上 (安定限界) の点に収束するという共通の性質がないからである. 少なくとも, 相対次数 $n-m=3, 4, \dots, 9$ の場合は単位円外部 (不安定領域) の点に収束する零点が一つ以上存在する [1] ため, サンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ としてサンプル点の数 $T/\Delta \rightarrow \infty$ となるとき, この零点の影響によって一般に逆システムの出力 $\Gamma_{\Delta}^+ \sigma_{\Delta} y^*$ の発散が予想される.

例 1 :

相対次数 2 の連続時間系

$$G(s) = \frac{s-1}{s^3} \quad (85)$$

を考える. このとき

$$H(z) = \frac{(3-\Delta)\Delta^2}{6} \frac{(z-q_4(\Delta))(z-q_5(\Delta))}{(z-1)^3} \quad (86)$$

ただし, $q_4(\Delta) = 1 + \Delta + O(\Delta^2)$ および $q_5(\Delta) = -1 + \frac{\Delta}{3} + O(\Delta^2)$ である. いま, u^* を

$$u^*(t) = t + 1 \quad t \in [0, 10] \quad (87)$$

のようにとり, $y^* = S u^*$ と定義すれば, 定理 3 の仮定は満たされる. この例について, サンプル周期を $\Delta=1$ また

Fig. 1 $\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^{*}$ and u^{*} in Example 1 Fig. 2 $S(\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^{*} - u^{*})$ in Example 1

は0.5とした場合の $\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^{*}$ および $S(\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^{*} - u^{*})$ をそれぞれFig. 1および2に示す。ただし、Fig. 1における破線は u^{*} を表す。 $q_1(\Delta)$ は不安定領域から1へ近づく零点であるが、サンプル周期 Δ を小さくするとその影響は小さくなることが読み取れる。

例2：

相対次数2の連続時間系(2)式とそのサンプル値系(5)式を考える。 u^{*} と y^{*} を例1と同様に取り、サンプル周期を $\Delta=1$ または0.25とした場合の $\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^{*}$ および $S(\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^{*} - u^{*})$ をそれぞれFig. 3および4に示す。

例3：

相対次数3の連続時間系(3)式とそのサンプル値系(6)式を考える。 u^{*} と y^{*} を例1と同様に取り、サンプル周

Fig. 3 $\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^{*}$ and u^{*} in Example 2 Fig. 4 $S(\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^{*} - u^{*})$ in Example 2

期を $\Delta=2.5$ または1とした場合の $\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^{*}$ および $S(\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^{*} - u^{*})$ をそれぞれFig. 5および6に示す。

不安定な $z=-2-\sqrt{3}$ へ近づく零点 $q_2(\Delta)$ の影響によりサンプル周期 Δ を小さくしてサンプル点の数が増えると逆システムの出力は増大していることが読み取れる。

5. おわりに

本論文では相対次数2の連続時間系から得られるサンプル値系の逆システムを考え、有限な時間区間上でサンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ とした場合の性質について考察を行った。その結果、相対次数1以下の場合と同様、有限な時間区間上ではサンプル値系の逆システムは零点の安定性によらず連続時間系の逆システムを近似することがわかった。この性質は相対次数が2以下の場合のみについて共通のものであり、3以上については一般に期待できないことから、有限時間区間上でのサンプル値系の逆システムは相対次数2と3を境にその性質が大きく異なることが明

 Fig. 5 $\theta_{\Delta} \Gamma_{\Delta}^{+} \sigma_{\Delta} y^{*}$ and u^{*} in Example 3

 Fig. 6 $S(\theta_{\Delta} \Gamma_{\Delta}^{+} \sigma_{\Delta} y^{*} - u^{*})$ in Example 3

らかになった。

謝 辞

貴重な校閲意見を下さった査読者に謝意を表します。

参考文献

- [1] K. J. Åström, P. Hagander and J. Sternby: Zeros of sampled systems; *Automatica*, Vol. 20, No. 1, pp. 31–38 (1984)
- [2] Y. Fu and G. A. Dumont: Choice of sampling to ensure minimum-phase behavior; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 5, pp. 560–563 (1989)
- [3] T. Hagiwara: Analytic study on the intrinsic zeros of sampled-data system; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 2, pp. 261–263 (1996)
- [4] Y. Hayakawa, S. Hosoe and M. Ito: On the limiting zeros of sampled multivariable system; *Systems & Control Letters*, Vol. 2, No. 5, pp. 292–300 (1983)
- [5] M. Ishitobi: Stable zero of sampled low-pass system; *Int. J. Control*, Vol. 57, No. 6, pp. 1485–1498 (1993)
- [6] 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)
- [7] K. L. Moore: *Iterative Learning Control for Deterministic Systems*, Springer-Verlag (1993)
- [8] K. M. Passino and P. J. Antsaklis: Inverse stable sampled low-pass systems; *Int. J. Control*, Vol. 47, No. 6, pp. 1905–1913 (1988)
- [9] 十河, 足立: 有限時間区間におけるサンプル値系の極限零点と逆システムの性質について; 計測自動制御学会論文集, Vol. 34, No. 10, pp. 1395–1403 (1998)
- [10] 十河, 木下, 足立: 離散時間線形システムに対する勾配法に基づいた反復学習制御; システム制御情報学会論文誌, Vol. 12, No. 4, pp. 250–259 (1999)

付 録

付録 1. 補題 1 の証明

まず, 行列式の微分公式を (18) 式へ適用することによって, 以下を得る.

$$\left. \frac{d}{d\Delta} N(z) \right|_{\Delta=0} = (z-1)^{n-1} c b_c \quad (A1)$$

$$\left. \frac{d^2}{d\Delta^2} N(z) \right|_{\Delta=0} = (z+1)(z-1)^{n-2} c A_c b_c \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^3}{d\Delta^3} N(z) \right|_{\Delta=0} \\ &= \begin{cases} (z+5)(z-1)^{n-2} c A_c^2 b_c \\ -3 \text{trace}(A_c) c A_c b_c (z-1)^{n-2} & \text{if } n=2 \\ (z^2+4z+1)(z-1)^{n-3} c A_c^2 b_c \\ -3 \text{trace}(A_c) c A_c b_c (z+1)(z-1)^{n-3} \\ & \text{if } n \geq 3 \end{cases} \quad (A3) \end{aligned}$$

つぎに, $n-m=2$ のとき $c b_c = 0$ かつ $c A_c^k b_c \neq 0 (k=1, 2, \dots)$ であることに注意して,

$$\begin{aligned} N(z) &= (z+1)(z-1)^{n-2} c A_c b_c \frac{\Delta^2}{2} \\ &+ \left. \frac{d^3}{d\Delta^3} N(z) \right|_{\Delta=0} c A_c^2 b_c \frac{\Delta^3}{6} \\ &+ O(\Delta^4) \quad (A4) \end{aligned}$$

さらに

$$\frac{N(-1)}{\Delta^3} = \begin{cases} \frac{(-2)^{n-2} 4 c A_c^2 b_c - 3 \text{trace}(A_c) c A_c b_c}{6} \\ + O(\Delta) & \text{if } n=2 \\ \frac{(-2)^{n-2} c A_c^2 b_c}{6} + O(\Delta) & \text{if } n \geq 3 \end{cases} \quad (A5)$$

を得る. 一方, (22) 式より

$$\frac{N(-1)}{\Delta^3} = \frac{c b_{\Delta}}{\Delta^2} \frac{(-1 - q_1(\Delta)) \cdots (-1 - q_{n-1}(\Delta))}{\Delta} \quad (A6)$$

となり, さらに以下が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{q_{n-1}(\Delta)+1}{\Delta} \\ &= -\left\{(-2)^{n-2}\frac{M_n}{6}+O(\Delta)\right\} \\ & \quad \left\{\frac{cb_\Delta}{\Delta^2}(-1-q_1(\Delta))\cdots(-1-q_{n-2}(\Delta))\right\}^{-1} \end{aligned}$$

ここで

$$M_n = \begin{cases} 4cA_c^2b_c - 3\text{trace}(A_c)cA_cb_c & \text{if } n=2 \\ cA_c^2b_c & \text{if } n \geq 3 \end{cases} \quad (\text{A7})$$

(26) 式より

$$(-1-q_1(\Delta))\cdots(-1-q_{n-2}(\Delta)) = (-2)^{n-2} + O(\Delta) \quad (\text{A8})$$

が得られ, また, $\frac{cb_\Delta}{\Delta^2} = \frac{cA_cb_c}{2} + O(\Delta)$ が成り立つことから,

$$\begin{aligned} & \frac{q_{n-1}(\Delta)+1}{\Delta} \\ &= -\left\{(-2)^{n-2}\frac{M_n}{6}+O(\Delta)\right\} \\ & \quad \left\{(-2)^{n-2}\frac{cA_cb_c}{2}+O(\Delta)\right\}^{-1} \quad (\text{A9}) \\ &= -\frac{M_n}{3cA_cb_c} + O(\Delta) \quad (\text{A10}) \end{aligned}$$

が得られる.

付録 2. 補題 2 の証明

まず, 定理 2 および補題 1 より

$$\begin{aligned} & H_1^{-1}(z) \\ &= \frac{\Delta^2}{cb_\Delta} \left\{ 1 + \frac{r_0(\Delta)z^n + r_1(\Delta)z^{n-1} + \cdots + r_n(\Delta)}{(z-1)^2(z-q_1(\Delta))\cdots(z-q_{n-1}(\Delta))} \right\} \end{aligned}$$

であることに注意する. ここで,

$$\frac{|r_j(\Delta)|}{\Delta} \leq +\infty \quad (j=0,1,\dots,n) \quad (\text{A11})$$

つぎに, $H_1^{-1}(z)$ の状態空間表現が (58) 式であることに注意しながら, $\frac{cb_\Delta}{\Delta^2} H_1^{-1}(z)$ の可観測正準形を参照すれば, (58) 式は以下のようなシステムへ変換できることがわかる.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}_\Delta \tilde{x}(k) + \begin{bmatrix} r_0(\Delta) \\ r_1(\Delta) \\ \vdots \\ r_n(\Delta) \end{bmatrix} \eta(k) \\ u(k\Delta) &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\Delta^2}{cb_\Delta} \end{bmatrix} \tilde{x}(k) + \frac{\Delta^2}{cb_\Delta} \eta(k) \quad (\text{A12}) \end{aligned}$$

ただし, $\tilde{x} \in R^{n+1}$ および初期値 $x(0)=0$ とする. ここで, (A11) 式より

$$\left\| \begin{bmatrix} r_0(\Delta) \\ r_1(\Delta) \\ \vdots \\ r_n(\Delta) \end{bmatrix} \right\| \leq \bar{M}_1 \Delta \quad (\text{A13})$$

が成り立つことに注意する. さらに, 定理 2 と補題 1 から, $\bar{M}_2$ を正定数として

$$\begin{aligned} & |\tilde{A}_\Delta| - 1 \\ &= |\max\{1, |q_1(\Delta)|, \dots, |q_{n-1}(\Delta)|\} - 1| \\ &\leq \bar{M}_2 \Delta \quad (\text{A14}) \end{aligned}$$

を得ることができるから,

$$|\tilde{A}_\Delta| \leq 1 + \bar{M}_2 \Delta \leq e^{\bar{M}_2 \Delta} \quad (\text{A15})$$

となることに注意する.

したがって, $|\cdot|$ はユークリッドノルムとその誘導ノルムを表すものとして,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{cb_\Delta}{\Delta^2} u(k\Delta) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} |\tilde{A}_\Delta|^j \left\| \begin{bmatrix} r_0(\Delta) \\ r_1(\Delta) \\ \vdots \\ r_n(\Delta) \end{bmatrix} \right\| |\eta(k-j-1)| \\ &\quad + |\eta(k)| \quad (\text{A16}) \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, (A13) 式および (A15) 式から,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{cb_\Delta}{\Delta^2} u(k\Delta) \right| \\ &\leq \frac{e^{k\bar{M}_2\Delta}-1}{e^{\bar{M}_2\Delta}-1} \bar{M}_1 \Delta \max\{|\eta(i)|; i=0,1, \dots, k-1\} + |\eta(k)| \quad (\text{A17}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{T}{e^{\bar{M}_2\Delta}-1} \bar{M}_1 \max\{|\eta(i)|; i=0,1, \dots, k-1\} + |\eta(k)| \quad (\text{A18}) \end{aligned}$$

が $k=1,2,\dots,N-1 (=T/\Delta-1)$ について成り立つことがわかる.

一方,

$$\frac{cb_\Delta}{\Delta^2} = \frac{cA_cb_c}{2} + O(\Delta) \quad (\text{A19})$$

であるから,

$$\forall \Delta \in (0, \epsilon) \quad \left| \frac{\Delta^2}{cb_\Delta} \right| < \bar{M}_3 \quad (\text{A20})$$

となる $\epsilon > 0$ が存在する。ここで、 $\bar{M}_3$ は正定数とする。
以上より、

$$\begin{aligned} & |u(k\Delta)| \\ & \leq \bar{M}_3 \frac{e^{\frac{T}{\Delta} \bar{M}_2 \Delta} - 1}{\bar{M}_2} \bar{M}_1 \\ & \quad \max\{|\eta(i)|, i=0, 1, \dots, k-1\} \\ & \quad + |\eta(k)| \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

が $k=1, \dots, N(=T/\Delta)$ について成立することがわかる。

$$(A12) \text{ 式より } u(0) = \frac{\Delta^2}{cb_\Delta} \eta(0) \text{ であり}$$

$$|u(0)| \leq \bar{M}_3 |\eta(0)| \quad (\text{A22})$$

であることがわかる。(A21) 式と (A22) 式をあわせて (63) 式が得られる。

付録 3. 補題 3 の証明

(1) について：

出力 $\eta(k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \zeta(k-j)$ となるから、

$$\begin{aligned} & \max\{|\eta(k)|, k=0, 1, \dots, N-1\} \\ & \leq (N-1) \max\{|\zeta(k)|, k=0, 1, \dots, N-2\} \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} & \max\{|\eta(k)|, k=0, 1, \dots, N-1\} \\ & \leq (T/\Delta - 1) \Delta^p \|f_\Delta\|_\infty \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

が成り立つ。これより、(65) 式が得られる。

(2) について、

まず、

$$\eta(k) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \{\zeta(k-2j+1) - \zeta(k-2j)\} \\ \quad + \zeta(0) \text{ if } k : \text{奇数} \\ \sum_{j=1}^{k/2} \{\zeta(k-2j+1) - \zeta(k-2j)\} \\ \quad \text{if } k : \text{偶数} \end{cases} \quad (\text{A24})$$

さらに

$$\begin{aligned} & |\eta(k)| \\ & \leq \begin{cases} \frac{k-1}{2} \max\{|\zeta(k-2j+1) - \zeta(k-2j)|, \\ \quad j=1, \dots, \frac{k-1}{2}\} + |\zeta(0)| \text{ if } k : \text{奇数} \\ \frac{k}{2} \max\{|\zeta(k-2j+1) - \zeta(k-2j)|, \\ \quad j=1, \dots, \frac{k}{2}\} \text{ if } k : \text{偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{N-2}{2} \max\{|\zeta(k-2j+1) - \zeta(k-2j)|, \\ \quad j=1, \dots, \frac{N-2}{2}\} \\ \quad + |\zeta(0)| \text{ if } N-1 : \text{奇数} \\ \frac{N-1}{2} \max\{|\zeta(k-2j+1) - \zeta(k-2j)|, \\ \quad j=1, \dots, \frac{N-1}{2}\} \text{ if } N-1 : \text{偶数} \end{cases}$$

に注意する。このとき、

$$\begin{aligned} & |\eta(k)| \\ & \leq \begin{cases} \frac{T-2\Delta}{2} \Delta^{p-1} \max\{|f(t_{k-2j+1}) - f(t_{k-2j})|, \\ \quad j=1, \dots, \frac{N-2}{2}\} + \Delta^p |f(t_0)| \\ \quad \text{if } N-1 : \text{奇数} \\ \frac{T-\Delta}{2} \Delta^{p-1} \max\{|f(t_{k-2j+1}) - f(t_{k-2j})|, \\ \quad j=1, \dots, \frac{N-1}{2}\} \text{ if } N-1 : \text{偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

一方、 $f \in C^0[0, T]$ および $|t_{k-2j+1} - t_{k-2j}| \leq M_2 \Delta$ より $\Delta \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned} & \max\left\{|f(t_{k-2j+1}) - f(t_{k-2j})|, \right. \\ & \quad \left. j=1, \dots, \frac{N-2}{2} \left(\text{or } \frac{N-1}{2}\right)\right\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

を得る。したがって、(65) 式が導かれる。

(3) について、

$\Delta \rightarrow 0$ のとき $\zeta(0) = f_\Delta(0) - f(0) \rightarrow 0$ が成り立つことと、以下の等式が成り立つことに注意する。

$$\begin{aligned} & \zeta(k-2j+1) - \zeta(k-2j) \\ & = \Delta \left\{ \frac{f_\Delta((k-2j+1)\Delta) - f_\Delta((k-2j)\Delta)}{\Delta} \right. \\ & \quad \left. - \frac{f((k-2j+1)\Delta) - f((k-2j)\Delta)}{\Delta} \right\} \\ & = \Delta \left\{ \frac{d}{dt} f_\Delta((k-2j)\Delta + \alpha(k, \Delta)\Delta) \right. \\ & \quad \left. - \frac{d}{dt} f((k-2j)\Delta + \alpha(k, \Delta)\Delta) \right\} \quad (\text{A25}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \Delta \left\{ \frac{d}{dt} f_\Delta((k-2j)\Delta + \alpha(k, \Delta)\Delta) \right. \\ & \quad \left. - \frac{d}{dt} f((k-2j)\Delta + \alpha(k, \Delta)\Delta) \right\} \\ & \quad + \Delta \left\{ \frac{d}{dt} f((k-2j)\Delta + \alpha(k, \Delta)\Delta) \right. \\ & \quad \left. - \frac{d}{dt} f((k-2j)\Delta + \beta(k, \Delta)\Delta) \right\} \quad (\text{A26}) \end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq \alpha(k, \Delta) \leq 1$ かつ $0 \leq \beta(k, \Delta) \leq 1$ のとき、(2) の場合と同様にして $\frac{d}{dt} f \in C^0[0, T]$ かつ

$$\left\| \frac{d}{dt} f_\Delta - \frac{d}{dt} f \right\|_\infty \rightarrow 0 \text{ より (65) 式が得られる}$$