入出力データ空間におけるデッドビート最適追従制御*

段 一然[†]・藤崎 泰正[‡]・池田 雅夫[§]

Dead-Beat Optimal Tracking Control in Input-Output Data Space*

Yiran DUAN[†], Yasumasa FUJISAKI[‡] and Masao IKEDA[§]

The system representation in the input-output data space, which was proposed recently, leads to a new control strategy for a linear time-invariant plant. The control input is computed directly from the input-output data of the plant without using any traditional mathematical model, such as transfer function or state space equation. This paper considers a dead-beat tracking problem for arbitrary reference signals in that framework, and presents the optimal control for a quadratic performance index.

1. はじめに

我々が知り得る情報がシステムの入出力データである場合を対象に、筆者らは、伝達関数、状態方程式、kernel representation[1]などを用いない、入出力データ空間におけるシステム表現と制御方式[2-5]を提案してきた。この枠組では、入出力データ空間の基底を用いてシステムのダイナミクスを表現し、直接、望ましい入出力データを構成して入力を決める。つまり、入出力データに基づく従来研究[6-10]とも異なり、入出力データ空間で閉じた新たなシステム制御理論の枠組を提供している。

さて、入出力データ空間におけるシステム表現を用いた一連の研究において、筆者らは最短時間追従制御問題[2-4]や任意の有限時間における最適制御問題[5]を考察した。この参考文献[5]では、システムの初期状態と

終端状態に対応した入出力の時系列、すなわち、システムの次数と同じ長さの初期値系列と最終値系列を定義し、それら系列の双方あるいは片方を固定した最適制御問題の解法を提案した。また、定値への有限整定制御を念頭に、最終値系列としてシステムの望ましい平衡状態を指定したい場合を想定し、それに対応した入出力の定値系列の計算法を与えた。しかし、任意の目標信号に出力を完全に一致させるデッドビート追従制御問題では、出力の目標信号の長さは一般にシステムの次数に一致せず、参考文献[5]の入出力の最終値系列を与える問題には帰着できない。したがって、目標信号をそのまま出力の最終値系列として指定でき、直接解くことができるように、入出力データ空間のアプローチを拡張する必要がある。

そこで本論文では、任意の目標信号に対して出力を有限時間で完全に一致させるデッドビート追従制御問題を、参考文献[5]で提案した枠組を拡張して考察する。まず、次数と相対次数が既知であるとし、入出力データ空間を定義する。つぎに、目標信号に対応する出力最終値系列を定義し、デッドビート追従制御問題に整合する入出力データ空間の構造を明らかにする。そして、入出力データ空間の構造に基づき、ある時刻以降で任意の目標信号に出力が完全に一致するようなシステムの振舞いの中で、2次形式評価関数を最小とするものが、入出力データから直接計算できることを示す。なお、本文中で与えない各定理の証明は、付録にまとめて与えている。

*原稿受付 1999年3月3日

[†]神戸大学 大学院 自然科学研究科 (現在、日本コンピュータ工業(株)) Graduate School of Science and Technology, Kobe University; Rokkodai-cho 1-1, Nada ward, Kobe city, Hyogo 657-8501, JAPAN

[‡]神戸大学 工学部 Faculty of Engineering, Kobe University; Rokkodai-cho 1-1, Nada ward, Kobe city, Hyogo 657-8501, JAPAN

[§]大阪大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University; Yamadaoka 2-1, Suita city, Osaka 565-0871, JAPAN

Key Words: discrete-time system, input-output data space, dead-beat optimal tracking, quadratic performance index, system representation.

2. 入出力データ空間の構造

本論文では、有限次元線形時不変の1入力1出力離散時間システムを対象とする。このようなシステムは、

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i y_{k-i} = \sum_{i=r}^n \beta_i u_{k-i} \quad (1)$$

なる差分方程式表現をもつ。ここで、 $u_k \in \mathcal{R}$ 、 $y_k \in \mathcal{R}$ はそれぞれ時刻 k での入力値、出力値、 n 、 r はそれぞれシステムの次数、相対次数であり、 $n \geq r$ である。また、 $\alpha_i \in \mathcal{R}$ 、 $\beta_i \in \mathcal{R}$ は定数であり、 $\alpha_0 \neq 0$ 、 $\beta_r \neq 0$ とする。

本論文では、このシステム (1) の伝達関数は既約であり、その次数 n と相対次数 r は既知であると仮定する。一方、定数 α_i 、 β_i の値は未知であるとし、その代わりに、このシステムが生成する入出力データ y_k 、 u_k が十分に入手できるとする。そして、それらデータに直接基づいたシステム表現や制御方式を考察する。なお、相対次数 r が既知であることは、任意の目標信号に出力を一致させる入力が計算できるための必要条件である。

最初に、 ℓ ステップの出力データと $\ell-r$ ステップの入力データを並べた次の入出力データベクトルを考える。

$$z_r = \begin{bmatrix} y_k & y_{k+1} & \cdots & y_{k+\ell-1} \\ u_k & u_{k+1} & \cdots & u_{k+\ell-r-1} \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

ただし、 $\ell > n$ とする。ここで、参考文献 [5] とは異なり、相対次数 r に対応して時刻 $k+\ell-r-1$ までの入力データだけを並べるのは、それ以降の入力データが時刻 $k+\ell-1$ までの出力データに影響を与えないためである。

対象システムが生成しうるすべての z_r の集合は、差分方程式 (1) の線形拘束のもとで、実ベクトル空間 $\mathcal{R}^{2\ell-r}$ の部分空間となる。以下ではこれを入出力データ空間と呼び、 $\mathcal{Z}_r$ で表す。このとき、システム (1) の伝達関数が既約であることより、次の定理を得る。

【定理 1】

$$\dim(\mathcal{Z}_r) = \ell + n - r \quad (3)$$

つまり、任意の入出力データベクトル z_r は $\mathcal{Z}_r$ の $\ell+n-r$ 本の基底ベクトルの線形結合で表すことができるから、これら基底ベクトルを対象システムの表現であると考えてよい。以後、デッドビート追従制御問題を解くことを目的として、この $\mathcal{Z}_r$ の構造を考察していく。

まず、参考文献 [5] と同様に、(2) 式の入出力データの最初の n ステップ分を初期値系列と呼ぶ。そして、

$$z_{rF} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_{k+n} & \cdots & y_{k+\ell-1} \\ 0 & \cdots & 0 & u_{k+n} & \cdots & u_{k+\ell-r-1} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

のような、初期値系列が 0 の入出力データベクトルを考える。ただし、 $\ell > n+r$ とする。対象システムが生成しうるすべての z_{rF} の集合を、可到達データ空間と呼び、 $\mathcal{Z}_{rF}$ で表す。このとき、システム (1) の伝達関数が既約であることと、 $\alpha_0 \neq 0$ より、次の定理を得る。

【定理 2】

$$\dim(\mathcal{Z}_{rF}) = \ell - n - r \quad (5)$$

したがって、入出力データ空間 $\mathcal{Z}_r$ は、

$$\mathcal{Z}_r = \mathcal{Z}_{rI} \oplus \mathcal{Z}_{rF} \quad (6)$$

と分解でき、定理 1 と定理 2 より、この $\mathcal{Z}_{rI}$ の次元は

$$\dim(\mathcal{Z}_{rI}) = 2n \quad (7)$$

となる。つまり、任意の入出力データベクトル z_r は、それと同じ初期値系列をもつ $z_{rI} \in \mathcal{Z}_{rI}$ と可到達データ空間の要素 $z_{rF} \in \mathcal{Z}_{rF}$ を用いて、

$$z_r = z_{rI} + z_{rF} \quad (8)$$

と一意に表せる。

つぎに、適当な自然数 s を定め、(2) 式の出力データの最後の s ステップ分を出力最終値系列と呼ぶ。この出力最終値系列は、デッドビート追従制御問題において、任意に与える目標信号を表し、その長さは、出力を完全に一致させたい時間区間である。このように、出力のみの最終値系列を考える点が、システムの終端状態に対応した入出力の時系列として、システムの次数 n の長さの最終値系列を考えている参考文献 [5] とは異なる。

さて、出力最終値系列が 0 の入出力データベクトル

$$z_{rPy} = \begin{bmatrix} y_k & \cdots & y_{k+\ell-s-1} & 0 & \cdots & 0 \\ u_k & u_{k+1} & \cdots & u_{k+\ell-r-1} \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

を考えよう。ただし、 $\ell > s$ とする。対象システムが生成しうるすべての z_{rPy} の集合を、出力可制御データ空間と呼び、 $\mathcal{Z}_{rPy}$ で表す。このとき、システム (1) の伝達関数が既約であることと、 $\beta_r \neq 0$ より、次の定理を得る。

【定理 3】

$$\dim(\mathcal{Z}_{rPy}) = \ell + n - r - s \quad (10)$$

したがって、入出力データ空間 $\mathcal{Z}_r$ は、

$$\mathcal{Z}_r = \mathcal{Z}_{rTy} \oplus \mathcal{Z}_{rPy} \quad (11)$$

と分解でき、定理 1 と定理 3 より、この $\mathcal{Z}_{rTy}$ の次元は

$$\dim(\mathcal{Z}_{rTy}) = s \quad (12)$$

となる。つまり、任意の入出力データベクトル z_r は、それと同じ出力最終値系列をもつ $z_{rTy} \in \mathcal{Z}_{rTy}$ と出力可制御データ空間の要素 $z_{rPy} \in \mathcal{Z}_{rPy}$ を用いて、

$$z_r = z_{rTy} + z_{rPy} \quad (13)$$

のように一意に表すこともできる。

ここで、任意の目標信号に出力を有限時間で完全に一致させるデッドビート追従制御問題が、初期状態に対応した初期値系列と目標信号に対応した出力最終値系列をもつような入出力データベクトルを求める問題となることに注意しよう。任意の初期値系列と任意の出力最終値系列をもつ入出力データベクトルのすべてを $\mathcal{Z}_r$ が含むためには、少なくとも、

$$\dim(\mathcal{Z}_r) \geq \dim(\mathcal{Z}_{rI}) + \dim(\mathcal{Z}_{rTy}) \quad (14)$$

であること、つまり $\ell \geq n+r+s$ である必要がある。そこで、 $\ell \geq n+r+s$ とすれば、システム (1) の伝達関数の既約性と、 $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_r \neq 0$ より、次の定理を得る。

【定理 4】

$$\dim(\mathcal{Z}_{rPy} \cap \mathcal{Z}_{rF}) = \ell - n - r - s \quad (15)$$

したがって、 $\ell \geq n+r+s$ であるときには、

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{Z}_{rPy} + \mathcal{Z}_{rF}) &= \dim(\mathcal{Z}_{rPy}) + \dim(\mathcal{Z}_{rF}) - \dim(\mathcal{Z}_{rPy} \cap \mathcal{Z}_{rF}) \\ &= \dim(\mathcal{Z}_r) \end{aligned} \quad (16)$$

が成り立つ。これは、

$$\mathcal{Z}_r = \mathcal{Z}_{rPy} + \mathcal{Z}_{rF} \quad (17)$$

であることを意味している。そこで、 $\ell \geq n+r+s$ のときの入出力データ空間 $\mathcal{Z}_r$ を

$$\mathcal{Z}_r = \mathcal{Z}_{rIPy} \oplus \mathcal{Z}_{rTyF} \oplus \mathcal{Z}_{rCy} \quad (18)$$

と分解しておこう。ここで、

$$\mathcal{Z}_{rCy} = \mathcal{Z}_{rPy} \cap \mathcal{Z}_{rF} \quad (19)$$

である。また、 $\mathcal{Z}_{rTyF} \subseteq \mathcal{Z}_{rF}$, $\mathcal{Z}_{rIPy} \subseteq \mathcal{Z}_{rPy}$ であり、それらの次元は、定理 2~4 より、

$$\dim(\mathcal{Z}_{rIPy}) = 2n, \quad \dim(\mathcal{Z}_{rTyF}) = s \quad (20)$$

となる。(18) 式より、任意の入出力データベクトル z_r は、それと同じ初期値系列をもつ出力可制御データ空間の要素 $z_{rIPy} \in \mathcal{Z}_{rIPy}$ 、それと同じ出力最終値系列をもつ可到達データ空間の要素 $z_{rTyF} \in \mathcal{Z}_{rTyF}$ 、可到達かつ

出力可制御なデータ空間の要素 $z_{rCy} \in \mathcal{Z}_{rCy}$ を用いて、

$$z_r = z_{rIPy} + z_{rTyF} + z_{rCy} \quad (21)$$

と一意に表せる。これを用いれば、3. で述べるように、入出力データ空間におけるシステム表現を用いて、デッドビート最適追従制御問題を解くことができる。

3. 入出力データ空間における追従制御

それでは、以上のような入出力データ空間の構造に基づき、任意の目標信号に対して出力を有限時間で完全に一致させるデッドビート追従制御問題を、有限時間の最適制御問題として考察しよう。そのために、まず、次の評価関数を導入する。

$$J_r = (z_{rR} - z_r)^T Q_r (z_{rR} - z_r) \quad (22)$$

ここで、 $z_r \in \mathcal{Z}_r$ は対象システムの生成する入出力データベクトル、 $z_{rR} \in \mathcal{R}^{2\ell-r}$ はある参照データベクトルである。また、正定行列 $Q_r \in \mathcal{R}^{(2\ell-r) \times (2\ell-r)}$ は重みである。

以下では、 $\ell \geq n+r+s$ であるとする。まず、制御開始時刻を $k+n$ とし、それより前の入出力データが既知、すなわち初期値系列が決まっているとする。そして、時刻 $k+\ell-s$ から $k+\ell-1$ までの出力をその目標信号、つまり出力最終値系列に一致させることを考える。2. での議論より、与えられる初期値系列をもち出力最終値系列が 0 の $\hat{z}_{rIPy} \in \mathcal{Z}_{rIPy}$ と、与えられる出力最終値系列をもち初期値系列が 0 の $\hat{z}_{rTyF} \in \mathcal{Z}_{rTyF}$ は、それぞれ一意に定まる。したがって、デッドビート最適追従制御問題は次のように定式化できる。

【問題】 $z_{rR} \in \mathcal{R}^{2\ell-r}$, $\hat{z}_{rIPy} \in \mathcal{Z}_{rIPy}$, $\hat{z}_{rTyF} \in \mathcal{Z}_{rTyF}$ が与えられるとき、

$$z_r = \hat{z}_{rIPy} + \hat{z}_{rTyF} + z_{rCy} \quad (23)$$

と置き、 $z_{rCy} \in \mathcal{Z}_{rCy}$ を適当に決めて、(22) 式の評価関数 J_r を最小とする $z_{ropt} \in \mathcal{Z}_r$ を求めよ。

このとき、(22) 式の J_r を最小化する $z_{rCyopt} \in \mathcal{Z}_{rCy}$ は、 $\mathcal{R}^{2\ell-r}$ における $\mathcal{Z}_{rCy}$ 上への Q_r -正射影行列 [11]

$$P_{rCy} = H_{rCy} (H_{rCy}^T Q_r H_{rCy})^{-1} H_{rCy}^T Q_r \quad (24)$$

を用いて、

$$z_{rCyopt} = P_{rCy} (z_{rR} - \hat{z}_{rIPy} - \hat{z}_{rTyF}) \quad (25)$$

と表せる。ここで、 H_{rCy} は $\mathcal{Z}_{rCy}$ の基底ベクトルをすべて並べたものである。したがって、次の定理を得る。

【定理 5】 $z_{rR} \in \mathcal{R}^{2\ell-r}$, $\hat{z}_{rIPy} \in \mathcal{Z}_{rIPy}$, $\hat{z}_{rTyF} \in \mathcal{Z}_{rTyF}$ が与えられるとき、(22) 式の評価関数 J_r を (23) 式の拘束のもとで最小化する $z_{ropt} \in \mathcal{Z}_r$ は

$$z_{ropt} = (I - P_{rCy})(\hat{z}_{rIPy} + \hat{z}_{rTyF}) + P_{rCy}z_{rR} \quad (26)$$

で与えられ、それは一意である。

つまり、この z_{ropt} の $u_{k+n}, u_{k+n+1}, \dots, u_{k+\ell-r-1}$ に対応する要素が、時刻 $k+n, k+n+1, \dots, k+\ell-r-1$ で加えるべき入力である。

具体的に z_{ropt} を求めるためには、各データ空間 $\mathcal{Z}_{rIPy}$, $\mathcal{Z}_{rTyF}$, $\mathcal{Z}_{rCy}$ の基底ベクトルが必要である。それらを既に得られている入出力データ y_i, u_i から求めるために、ブロックハンケル行列

$$H = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_i & \cdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{i+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ -\frac{y_{\ell-1}}{u_0} & -\frac{y_{\ell}}{u_1} & \cdots & -\frac{y_{i+\ell-1}}{u_i} & \cdots \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{i+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ u_{\ell-r-1} & u_{\ell-r} & \cdots & u_{i+\ell-r-1} & \cdots \end{bmatrix} \quad (27)$$

を構成する。十分多くの入出力データが得られている場合、定理 1 より、 H は $\ell+n-r$ 本の独立な列をもつ。それらを並べた行列を H_Z とすれば、次の定理を得る。

【定理 6】 H_Z を基本列変換すれば、

$$\begin{bmatrix} H_{rIPy} & H_{rTyF} & H_{rCy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ * & * & * \\ 0 & 0 & I_s \\ 0 & I_n & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad (28)$$

とできる。ここで、 H_{rIPy} , H_{rTyF} と H_{rCy} はそれぞれ $\mathcal{Z}_{rIPy}$, $\mathcal{Z}_{rTyF}$, $\mathcal{Z}_{rCy}$ の基底を並べたものである。

この定理を用いれば、 P_{rCy} が具体的に構成できる。また、時刻 $k+n$ より前に得られた入出力データより、初期値系列ベクトル

$$x_I = \begin{bmatrix} y_k & y_{k+1} & \cdots & y_{k+n-1} \\ u_k & u_{k+1} & \cdots & u_{k+n-1} \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

を定義すれば、与えるべき $\hat{z}_{rIPy} \in \mathcal{Z}_{rIPy}$ は

$$\hat{z}_{rIPy} = H_{rIPy} x_I \quad (30)$$

と定まる。一方、出力最終値系列ベクトルとして、出力の目標信号

$$x_{Ty} = \begin{bmatrix} y_{k+\ell-s} & y_{k+\ell-s+1} & \cdots & y_{k+\ell-1} \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

が指定されるとすれば、与えるべき $\hat{z}_{rTyF} \in \mathcal{Z}_{rTyF}$ は

$$\hat{z}_{rTyF} = H_{rTyF} x_{Ty} \quad (32)$$

と定まる。これらと参照データベクトル z_{rR} より、定理 5 に従って、 z_{ropt} を求めることができる。

なお、 $\ell = n+r+s$ とすれば、 $\mathcal{Z}_{rCy} = \emptyset$ となるので、(23) 式の z_r は一意に決まり、最短ステップで目標信号にデッドビート追従する振舞いとなる。このとき、 $s=1$ 、つまり $\ell = n+r+1$ と決めて各時刻において入力を逐次計算するものが、参考文献 [2,3] で提案している最短ステップデッドビート追従制御アルゴリズムの本研究の枠組における表現となる。この場合、無限時間での制御を行うのなら、入力の系列が発散しないためには、制御対象が最小位相系である必要がある [2,3]。

4. 数値例

それでは、提案した入出力データ空間におけるデッドビート最適追従制御アルゴリズムを確認するため、具体的な数値例を示そう。ここでは、次数が $n=2$ 、相対次数が $r=1$ である対象システム

$$y_k + 0.7y_{k-1} + 0.1y_{k-2} = u_{k-1} - 0.5u_{k-2} \quad (33)$$

を考える。そして、この対象システムのパラメータが未知であるとし、その動作データから、直接、デッドビート最適追従制御のための入力を計算する手順を示す。なお、以下では、入出力データベクトルで考慮するステップ数を $\ell=7$ 、出力最終値系列のステップ数を $s=2$ とした場合を考える。

まず、対象システムに加えた入力の時系列

$$\begin{aligned} u_0 &= -1, & u_1 &= 1, & u_2 &= -1, & u_3 &= 1, \\ u_4 &= 1, & u_5 &= -1, & u_6 &= -1, & u_7 &= 1, \\ u_8 &= -1, & u_9 &= -1, & u_{10} &= -1, & u_{11} &= 1, \\ u_{12} &= 1, & u_{13} &= 1, & u_{14} &= 1 \end{aligned}$$

とそれにより発生した出力の時系列

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, & y_1 &= -1.00, & y_2 &= 2.20, \\ y_3 &= -2.94, & y_4 &= 3.34, & y_5 &= -1.54, \\ y_6 &= -0.75, & y_7 &= 0.18, & y_8 &= 1.45, \\ y_9 &= -2.53, & y_{10} &= 1.13, & y_{11} &= -1.04, \\ y_{12} &= 2.11, & y_{13} &= -0.88, & y_{14} &= 0.90 \end{aligned}$$

の組が与えられたとする。これらのうち、時刻 14 までの出力データと時刻 13 までの入力データを、 $\ell=7$ とした (27) 式の行列 H に代入する。このとき、 H は 13×8 の列フルランクの行列となるので、その行列を H_Z とすることができる。したがって、定理 6 より、 H_Z を

$$\begin{bmatrix} H_{rIPy} & H_{rTyF} & H_{rCy} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.10 & -0.70 & -0.50 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.07 & -0.39 & -0.35 & 1.20 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.05 & -0.27 & -0.22 & 0.70 & 0 & 0 & 1.20 & 1 \\ -0.02 & -0.13 & -0.11 & 0.35 & 1 & 0 & 0.70 & 1.20 \\ -0.01 & -0.07 & -0.06 & 0.17 & 1.20 & 1 & 0.35 & 0.70 \end{bmatrix} \quad (34)$$

に変換することができる。そこで、評価関数の重み行列を

$$Q_r = \text{blockdiag}\{I_\ell, 2I_{\ell-r}\} \quad (35)$$

と選ぶと、 Q_r -正射影行列 P_{rCy} は、(24) 式より、

$$P_{rCy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & -0.16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.16 & 0.26 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & -0.16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0.06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0.19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.03 & 0.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.49 & 0.26 & -0.05 & -0.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.33 & 0.12 & 0.38 & 0.24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.49 & 0.26 & -0.05 & -0.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.26 & 0.43 & 0.32 & 0.17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.05 & 0.32 & 0.42 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.06 & 0.17 & 0.25 & 0.15 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

となる。

さて、参照データベクトルを

$$z_{rR} = [-1 \ -0.5 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 0.5 \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (37)$$

とする。これは、三角波状の目標信号に、なるべく小さい入力で追従する制御問題を考えることを意味する。いま、時刻 14 までの入出力データが与えられているので、時刻 13 と 14 の入出力データを初期値系列とし、時刻 15 から制御を開始することを考える。つまり、

$$x_I = [-0.88 \ 0.90 \ 1 \ 1]^T \quad (38)$$

である。また、出力最終値系列は、 $\ell=7$, $s=2$ であるので、 z_{rR} に含まれる目標信号の時系列から、

$$x_{Ty} = [0.5 \ 0]^T \quad (39)$$

である。これらを用いれば、定理 5 により、デッドビート最適追従制御問題の解 z_{ropt} は、

$$z_{ropt} = \begin{bmatrix} -0.88 & 0.90 & -0.04 & -0.32 & -0.08 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 0.24 & -0.19 & 0.32 & 0.50 \end{bmatrix}^T \quad (40)$$

と求まる。つまり、

$$u_{15} = 0.24, \quad u_{16} = -0.19, \quad u_{17} = 0.32, \\ u_{18} = 0.50$$

が最適入力である。

5. おわりに

本論文では、入出力データ空間におけるシステム表現を用いて、任意の目標信号に対するデッドビート最適追従問題を解くことができることを示した。

まず、参考文献 [5] では対象システムの次数のみが既知であると仮定しているのに対して、ここでは対象システムの次数と相対次数が既知であると仮定した。そして、この事前情報に合う入出力データ空間を考えた。また、参考文献 [5] では入出力を共に目標信号に有限時間で一致させる問題を考えているのに対して、ここではある時刻以降で出力を任意の目標信号に完全に一致させる問題を考えた。そして、この制御問題と整合するような入出力データ空間の構造（各部分空間）について考察した。このように、入出力データ空間におけるシステム表現の枠組では、対象システムに関する事前情報や考える制御問題に対応して、適切に入出力データ空間とその構造を考えることにより、種々の制御問題を解くことができる。

終りに、本研究に対して有益なコメントをいただいた査読者に心より感謝します。また、本研究の一部は、平成 10～11 年度科学研究費補助金（奨励研究（A））、課題

番号 10750344) より援助を受けました。ここに謝意を表します。

参考文献

- [1] J. C. Willems: Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 36, No. 3, pp. 259–294 (1991)
- [2] 池田, 林: 入出力データ蓄積によるディジタル制御; 第 16 回制御理論シンポジウム, pp. 47–50 (1987)
- [3] 池田, 林, 藤崎: 入出力データ蓄積によるモデルレス追従制御アルゴリズム; 計測自動制御学会論文集, Vol. 34, No. 6, pp. 639–641 (1998)
- [4] 藤崎, 段, 池田: 入出力データ配列に基づくシステム表現と制御方式; システム制御情報学会論文誌, Vol. 11, No. 11, pp. 630–637 (1998)
- [5] 藤崎, 段, 池田, 福田: 入出力データ空間におけるシステム表現と最適制御; 計測自動制御学会論文集, Vol. 34, No. 12, pp. 1845–1853 (1998)
- [6] 河村: 入出力データから最適レギュレータを構成する基礎的アルゴリズム; 計測自動制御学会論文集, Vol. 24, No. 11, pp. 1216–1218 (1988)
- [7] K. Furuta and M. Wongsaisuan: Discrete-time LQG dynamic controller design using plant Markov parameters; *Automatica*, Vol. 31, No. 9, pp. 1317–1324 (1995)
- [8] R. E. Skelton and G. Shi: The data-based LQG control problem; *Proc. of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1447–1452 (1994)
- [9] J. T. H. Chan: Data based synthesis of a multivariable linear quadratic regulator; *Automatica*, Vol. 32, No. 3, pp. 403–407 (1996)
- [10] 杉江, 浜本: 入出力データに基づく最適制御入力決定法—凸計画法によるアプローチ; システム制御情報学会論文誌, Vol. 11, No. 2, pp. 86–92 (1998)
- [11] 伊理, 韓: 線形代数—行列とその標準形, 教育出版, p. 230 (1977)

付 録

付録 1. 定理 1~4 の証明

最初に, $\ell > n$ であることに注意して, 対象システムが満たすべき差分方程式 (1) の係数を用いて, $(\ell - n) \times (2\ell - r)$ の行列

$$\Theta_r = \begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \alpha_n & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_0 \\ -\beta_n & -\beta_{n-1} & \cdots & -\beta_r & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & -\beta_n & -\beta_{n-1} & \cdots & -\beta_r \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

を定義すると, 任意の入出力データベクトル z_r に対して

$$\Theta_r z_r = 0 \quad (\text{A2})$$

が成り立つ. 対象システムの伝達関数の既約性より, 差

分方程式 (1) 以外に, 入出力に関する拘束条件が存在しないので, (A2) 式は, 入出力データベクトル z_r に対するすべての拘束条件を表している. したがって,

$$\mathcal{Z}_r = \text{Ker} \Theta_r \quad (\text{A3})$$

が言える. さらに, ℓ の長さが適当であるとき, (4) 式と (9) 式に対応して

$$J_{rF} = \text{block diag}\{I_n, 0_{\ell-n}, I_n, 0_{\ell-n-r}\} \quad (\text{A4})$$

$$J_{rPy} = \text{block diag}\{0_{\ell-s}, I_s, 0_{\ell-r}\} \quad (\text{A5})$$

を定義すると, 初期値系列や出力最終値系列が 0 系列であるという拘束は,

$$J_{rF} z_{rF} = 0, \quad J_{rPy} z_{rPy} = 0 \quad (\text{A6})$$

と書けるから,

$$\mathcal{Z}_{rF} = \text{Ker} \Theta_r \cap \text{Ker} J_{rF} \quad (\text{A7})$$

$$\mathcal{Z}_{rPy} = \text{Ker} \Theta_r \cap \text{Ker} J_{rPy} \quad (\text{A8})$$

$$\mathcal{Z}_{rCy} = \text{Ker} \Theta_r \cap \text{Ker} J_{rPy} \cap \text{Ker} J_{rF} \quad (\text{A9})$$

が言える. ここで, $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_r \neq 0$ に注目すれば,

$$\Theta_r, \quad \begin{bmatrix} \Theta_r \\ J_{rF} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Theta_r \\ J_{rPy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Theta_r \\ J_{rF} \\ J_{rPy} \end{bmatrix} \quad (\text{A10})$$

の各行列のランクがそれぞれ $\ell - n$, $\ell + n$, $\ell - n + s$, $\ell + n + s$ であることがわかる. したがって,

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{Z}_r) &= \dim(\text{Ker} \Theta_r) \\ &= 2\ell - r - \text{rank} \Theta_r \\ &= \ell + n - r \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

$$\dim(\mathcal{Z}_{rF}) = \ell - n - r \quad (\text{A12})$$

$$\dim(\mathcal{Z}_{rPy}) = \ell + n - r - s \quad (\text{A13})$$

$$\dim(\mathcal{Z}_{rCy}) = \ell - n - r - s \quad (\text{A14})$$

であることがわかる.

付録 2. 定理 6 の証明

最初に, $H_Z \in \mathcal{R}^{(2\ell-r) \times (\ell+n-r)}$ の行を適当に入れ換えて, 初期値系列と出力最終値系列に対応する要素を上 の $2n+s$ 行にまとめた行列 $\hat{H}_Z$ をつくる. 定理 4 より $\mathcal{Z}_{rCy}$ の次元は $\ell - n - r - s$ なので, $\hat{H}_Z$ を適当に基本列変換すれば,

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & 0 \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A15})$$

とできる. 明らかに $\hat{H}_{11} \in \mathcal{R}^{(2n+s) \times (2n+s)}$ は正則行列

である．正則行列は基本列変換によって単位行列にすることができ，最後に， H_Z を $\hat{H}_Z$ に変形したときに入れ換えた行をもとの位置に戻せば，(28) 式の行列を得る．