拘束システムに対する出力フィードバック スイッチング制御則の構成法*

平田 研二[†]・藤田 政之[‡]

A Measurement Feedback Switching Control of Systems with State and Control Constraints*

Kenji HIRATA[†] and Masayuki FUJITA[‡]

This paper considers measurement feedback switching control of systems with pointwise-in-time state and control constraints. Prior works have proved that switching control strategies have ability to resolve a common conflict in the design of state regulators: meeting performance requirements such as fast response and good disturbance rejection while simultaneously avoiding violation of specified state and control constraints. However, all of such switching control strategies are derived under consideration of full state feedback. In this paper, measurement feedback switching control law is proposed. The main idea is to utilize a set-valued estimation technique which produces a set of possible state vectors consistent with measured output data. Admissibility conditions on the initial state are satisfied, proposed output feedback switching control law is proved to fulfill the constraints and stability requirements. The disadvantage of this approach is that the online computational burden may severely limit its applicability, especially for systems with fast dynamics.

1. はじめに

現実の制御系は、アクチュエータの飽和要素、制御対象の保護のための制限など、多くの拘束条件を有する‘拘束システム’である。拘束条件の存在は、制御性能の劣化、あるいは制御系の不安定化などを引き起こし、実システムの制御における大きな問題となることが知られている [1]。

このような拘束システムの実際的な制御法として、複数の補償器を切り換えながら適用するスイッチング制御が注目されている [2,3,7,8]。近年提案されているスイッチング制御則の特徴として、制御系が拘束条件を破ることなく‘安全に’動作する条件を、状態空間に構成されるある集合の性質として記述し [4,6]、またこの集合がとる領域を利用して、補償器の切り換えルールを与えている

ことが挙げられる。

しかしながら、状態空間に構成される集合を利用することは、補償器の切り換えを実行するスーパーバイザにより、状態が観測可能でなければならないことを意味する (Fig. 1 参照)。また、状態がある集合に含まれるか否かにより適用する補償器を決定するため、推定値が漸近的に真値へ収束する通常のオブザーバを利用して制御則を構成することは困難である。

本論文では、状態の推定機構として set-valued オブザーバを利用し [9]、拘束システムに対する出力フィードバックスイッチング制御則を提案する (Fig. 2 参照)。set-valued オブザーバは、真の状態を含む集合を推定値として与える。この状態の存在領域が確定的に与えられる特徴から、スイッチング制御系を構成することが可能となる。提案する制御則では、状態フィードバックの場合に比較し、初期条件に関する仮定がより限定的となるものの、拘束条件の達成および閉ループ系の安定性が保証される。

* 原稿受付 1999 年 11 月 11 日

[†] 大阪大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University; 2-1 Yamadaoka, Suita 565-0871, JAPAN

[‡] 金沢大学 工学部 Faculty of Engineering, Kanazawa University; 2-40-20 Kodatsuno, Kanazawa 920-8667, JAPAN

Key Words: systems with state and control constraints, switching control, measurement feedback.

Fig. 1 State feedback switching control systems

Fig. 2 Measurement feedback switching control systems

2. 拘束システム

つぎの制御対象 Σ_p を考える.

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$z_1(t) = C_1x(t)$$

$$y(t) = C_2x(t)$$

ここで $x \in \mathcal{R}^n$ は状態, $u \in \mathcal{R}^m$ は制御入力, $z_1 \in \mathcal{R}^{p_1}$ は被制御量, $y \in \mathcal{R}^{p_2}$ は観測量である. また A, B, C_1, C_2 は適当な大きさの定数行列とする.

本論文では, 複数の補償器 Σ_{ci} , $i=0, \dots, k$ を構成し, これらを切り換えながら適用するスイッチング制御則を提案する (Figs. 1, 2 参照). 補償器 Σ_{ci} , $i=0, \dots, k$ として, ここではつぎの線形フィードバック補償器を考える.

$$u(t) = C_{ci}x_{ci}(t) + D_{ci}e(t)$$

$$x_{ci}(t+1) = A_{ci}x_{ci}(t) + B_{ci}e(t) \quad i=0, \dots, k$$

ここで $x_{ci} \in \mathcal{R}^{n_{ci}}$ は各補償器の状態, $e(t) = -y(t)$ であり, $A_{ci}, B_{ci}, C_{ci}, D_{ci}$ は適当な大きさの定数行列とする.

(注意 1) 本論文の主な目的は, 補償器の切り換え則の提案とそれによる拘束システムの制御にある. そこで各補償器は, 例えばあとの 6. でも示すように, 種々の線形制御理論にもとづきすでに構成されており, かつその系列 $\Sigma_{c0}, \Sigma_{c1}, \dots, \Sigma_{ck}$ は, 制御性能が向上する順に並んでいるとする. したがって Σ_{ck} がもっとも望ましい制御性能を有する (注意 10 参照).

つぎに制御系に存在する拘束条件を表現するため, 制御入力および状態に依存した出力 $z_0 \in \mathcal{R}^{p_0}$ を定義する.

$$z_0(t) = C_0x(t) + D_0u(t)$$

このとき制御系は

$$z_0(t) \in Z \quad \forall t \in \mathcal{Z}^+ \quad (1)$$

で表現される拘束条件を有するとする [4,6]. なお $\mathcal{Z}^+$ は非負の整数全体, 集合 $Z \subset \mathcal{R}^{p_0}$ は,

$$Z = \{z_0 | M_Z z_0 \leq m_Z\}$$

$$M_Z \in \mathcal{R}^{s_Z \times p_0}, 0 < m_Z \in \mathcal{R}^{s_Z}$$

で定義される有界な凸多面体である. ここで不等式は, いずれもベクトルの各要素ごとに成立している.

拘束条件を上記のような形で与えられるものに限定することは, 問題の適用範囲を幾分制限することになるが, アクチュエータの性能限界による入力制限や制御対象の保護のために要求される拘束条件など, 現実の制御系が有する多くの拘束条件を表現することが可能である.

スイッチング制御系では, 制御対象にそれぞれの補償器が順次切り換えられながら適用される. ここで Σ_p に各 Σ_{ci} が適用された場合の閉ループ系 Σ_i , $i=0, \dots, k$ は, それぞれつぎで表現される (Fig.3 参照).

$$x_i(t+1) = A_i x_i(t) \quad (2a)$$

$$z_0(t) = C_{0i} x_i(t) \quad (2b)$$

$$z_1(t) = C_{1i} x_i(t) \quad i=0, 1, \dots, k \quad (2c)$$

ここで $x_i = [x^T (x_{ci})^T]^T \in \mathcal{R}^{n_i}$, $n_i = n + n_{ci}$ であり, 各行列はつぎで与えられる.

$$A_i = \begin{bmatrix} A - BD_{ci}C_2 & BC_{ci} \\ -B_{ci}C_2 & A_{ci} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n_i \times n_i}$$

$$C_{0i} = \begin{bmatrix} C_0 - D_0D_{ci}C_2 & D_0C_{ci} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{p_0 \times n_i}$$

$$C_{1i} = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{p_1 \times n_{ci}} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{p_1 \times n_i}$$

なお各閉ループ系 Σ_i の次数 n_i が共通である必要はない。

Fig. 3 Closed-loop system: Σ_i

近年提案されている拘束システムに対するスイッチング制御則の一つの特徴として、Fig. 3 の Σ_i が、拘束条件を破ることなく安全に動作するための条件をつぎの最大 CPI (Constrained Positively Invariant) 集合により記述し [4,6], またこの集合の性質にもとづいた補償器の切り換えルールを提案していることが挙げられる [2,3,7,8].

【定義 1】 初期状態 $x_i(0)$ に対する Σ_i の応答 (2b) 式を $z_0(t; x_i(0))$ であらわす. Σ_i に対する最大 CPI 集合をつぎのように定義する.

$$O_\infty^i = \{x_i(0) \in \mathcal{R}^{n_i} \mid z_0(t; x_i(0)) \in Z \quad \forall t \in \mathcal{Z}^+\}$$

(注意 2) 最大 CPI 集合の定義から, Σ_i が安全に動作するための必要十分条件は $x_i(0) \in O_\infty^i$ となる. したがって O_∞^i は, 補償器 Σ_{ci} が適用可能となる状態の領域を与える. また O_∞^i は Σ_i の動特性に関して不変な集合, すなわち $x_i(t) \in O_\infty^i \rightarrow x_i(t+1) \in O_\infty^i$ となる [4,6].

(注意 3) 最大 CPI 集合は数値計算により構成され

$$O_\infty^i = \{x_i \in \mathcal{R}^{n_i} \mid M_i x_i \leq m_i\}$$

$$M_i \in \mathcal{R}^{s_i \times n_i}, 0 < m_i \in \mathcal{R}^{s_i}, i = 0, 1, \dots, k$$

で表現される, 原点を内点にもつ凸多面体となる [4,6]. ここで M_i, m_i は, O_∞^i を規定するのに必要な線形拘束式を表現する行列およびベクトルである.

一般に制御性能を重視した Σ_{ck} を適用すると, 大きな制御入力が要求されることなどから, 非常に小さな集合 O_∞^k がえられる. したがって閉ループ系 Σ_k の安定性は, この限定された領域 O_∞^k でのみ保証される. 逆に制御性能を犠牲にすることにより, 大きな最大 CPI 集合がえられるが, このとき達成される制御性能は当然低いものとなる. 拘束システムの制御問題における最も大きな問題の一つは, この安定性と制御性能のトレードオフにある.

そこで参考文献 [2,3,7,8] では, 安定性を重視した Σ_{c0} から, 逆に制御性能を重視した Σ_{ck} までの補償器の系列を与え, 各 O_∞^i の境界を補償器の切り換え平面とするスイッチング制御則が提案されている.

しかしながらこのことは, 提案されているスイッチン

グ制御則の実現に, 状態の観測が必要であることを意味している. 本論文では, set-valued オブザーバによる状態の推定値を利用することで, 出力フィードバックによるスイッチング制御系が実現されることを明らかにする.

なお以下でスイッチング制御系を構成するには, 各 Σ_i の次数 n_i が一般に異なるため, O_∞^i の制御対象の状態空間への射影 O_p^i を求めておく必要がある.

$$O_p^i = \{x \in \mathcal{R}^n \mid \exists x_{ci} \in \mathcal{R}^{n_{ci}} \begin{bmatrix} x \\ x_{ci} \end{bmatrix} \in O_\infty^i\}$$

(注意 4) O_p^i は Fourier-Motzkin アルゴリズムを利用して構成される [5]. このアルゴリズムにより O_p^i を求めると, 一般に冗長な拘束条件が生成される. このため, 不必要な拘束条件は, 改めて線形計画法を利用するなどして除去する必要がある. なお各閉ループ系 Σ_i の次数 n_i がすべて等しいならば, このような射影 O_p^i を必ずしも求める必要はない.

3. 状態フィードバックスイッチング制御

ここではスーパーバイザにより制御対象の状態が観測可能とした場合の, 状態フィードバックスイッチング制御則の構成を概説する [3] (Fig. 1 参照).

最大 CPI 集合の定義から, 制御対象の初期状態 $x(0)$ がいずれかの O_p^i に対して $x(0) \in O_p^i$ をみたしていることは, 拘束条件 (1) 式が達成されるための必要条件となる. 制御対象の初期状態に関して, つぎの仮定を設ける.

(仮定 1) Fig. 1 の制御対象 Σ_p の初期状態 $x(0)$ は $x(0) \in \bigcup_{i=0}^k O_p^i$ である.

Fig. 1 のスイッチング制御系において, スーパーバイザの具体的な役割は 1). 適用する補償器を選択し 2). 新たに適用する補償器の初期状態を設定することである. いま時刻 t で観測される状態が $x(t) \in O_p^j$ であったとする. このとき最大 CPI 集合の定義から, 補償器 Σ_{cj} を適用しても, Σ_{cj} の状態 $x_{cj}(t)$ を適当に設定するならば, 閉ループ系は拘束条件を破ることなく動作する.

そこで $I(x(t)) = \{i \mid x(t) \in O_{\infty p}^i\}$ とすると, これは状態 $x(t)$ に対して, 適用可能な補償器のインデックスをすべて集めたものとなる. 補償器の系列は, 順に制御性能が向上するように並んでいるから, $I(x(t))$ の中からもっとも大きな値が選択されることが望ましい. したがってスーパーバイザは, 観測される $x(t)$ にもとづき, つぎのルールで適用する補償器のインデックスを決定する.

$$i(t) = \text{maximize}\{i \mid x(t) \in O_p^i\} \quad (3)$$

なお仮定 1, (3) 式, あとの (4b) 式および最大 CPI 集合が正の不変集合であることから $I(x(t)) \neq \emptyset$ である.

(3) 式において $i(\tau-1) \neq i(\tau)$ が成立した時刻 τ (および $\tau=0$) では, 実際に補償器が切り換えられ, スーパーバイザは, 新たに適用する補償器 $\Sigma_{ci(\tau)}$ の初期状態 $x_{ci(\tau)}(\tau)$ を設定する. この初期状態 $x_{ci(\tau)}(\tau)$ が最低限満たすべき条件は

$$\begin{bmatrix} x(\tau) \\ x_{ci(\tau)}(\tau) \end{bmatrix} \in O_{\infty}^{i(\tau)}$$

のように, 制御対象の状態 $x(\tau)$ と併せて $O_{\infty}^{i(\tau)}$ に含まれることである. 本論文での制御目的は安定化であり, 制御系の状態は時間とともにすみやかに原点へ収束することが要求される. ここでは, 補償器の状態がなるべく原点に近くなるという意味で, つぎの 2 次計画問題の解として $x_{ci(\tau)}(\tau)$ を決定する.

$$\text{minimize } \|x_{ci(\tau)}(\tau)\|^2 \quad (4a)$$

$$\text{subject to } \begin{bmatrix} x(\tau) \\ x_{ci(\tau)}(\tau) \end{bmatrix} \in O_{\infty}^{i(\tau)} \quad (4b)$$

ここで $\|a\|^2 = a^T a$ とする.

(注意 5) 一般に $[x^T(\tau) \ x_{ci(\tau)}^T(\tau)]^T \in O_{\infty}^{i(\tau)}$ をみたす $x_{ci(\tau)}(\tau)$ は複数存在し, またこの選択がスイッチング制御系全体の応答に大きな影響を与えることは明らかである. 残念ながら現在までのところ, スwitching 制御系全体としての応答を考慮できるような, 初期状態 $x_{ci(\tau)}(\tau)$ の有力な決定法は提案されていない. なお最大 CPI 集合を規定する線形拘束式の数が増大する場合, (4) 式を短時間で解くことが困難になると考えられる. この問題を回避するためにも, 最大 CPI 集合をより少ない線形拘束式で規定される凸多面体で近似する効率のよい手順は, 検討が必要な課題となっている [7].

【定理 1】 仮定 1 が成立しているとする. このとき (3), (4) 式のスイッチング制御則により構成される閉ループ系は漸近的に安定であり, かつ拘束条件 (1) 式はすべての時刻において達成される.

(証明) 定理 3 の証明 (付録 1. 参照) とほぼ同様に示されるので省略する. $\square$

4. Set-valued オブザーバ

制御対象の状態が観測可能な場合, Fig. 1 の状態フィードバックスイッチング制御系を構成することで, 拘束システムを広い動作範囲で安定化しかつ制御性能の劣化を抑制することが可能となる [2,3,7,8].

しかしながら状態が常に観測可能とは限らない. このため状態の推定値を利用し, これにもとづいた出力フィードバックスイッチング制御系を実現することが望まれる. しかしながらスイッチング制御系におけるスーパーバイ

ザは, (3) 式のように, 状態がある集合に含まれるか否かにより適用する補償器を決定する. このため, 推定値が漸近的に真の状態へ収束する通常のオブザーバを利用する場合, 拘束条件の達成を保証することが困難である.

本論文では, 状態の推定機構として set-valued オブザーバを利用し, 出力フィードバックスイッチング制御系を構成する. set-valued オブザーバは, 制御対象の動特性および観測される出力に適合する状態の集合 $X(t)$ を生成する推定機構である (Fig. 4 参照). したがって $x(t) \in X(t)$ のように, 真の状態 x の存在領域が確定的に与えられる特徴から, スwitching 制御系の構成が可能となる.

Fig. 4 Set-valued observer

なお参考文献 [9] では, 観測ノイズまでを考慮したうえで set-valued オブザーバの構成法および ℓ^∞ 誘導ノルムの意味での最適推定が考察されている. 本節で示す set-valued オブザーバの構成アルゴリズムは, 参考文献 [9] の方法の特別な場合である. 一方本論文では, 誘導ノルムの意味での最適性ではなく, 推定値からなる集合全体に注目する. したがってまた定理 2 に示す結果は, スwitching 制御系構成において重要となる新規なものである.

制御対象 Σ_p に関してつぎの仮定を設ける.

(仮定 2) (C_2, A) は可観測.

(注意 6) set-valued オブザーバの状態推定則は, (C_2, A) の可観測, 不可観測性にかかわらず実行可能である. しかしながら定理 2 (2) に示す結果は (C_2, A) が可観測対である場合にのみ成立する.

制御対象の初期状態に関してつぎの仮定を設ける.

(仮定 3) $X_{ini} \subset \mathcal{R}^n$ をつぎで与えられる, 必ずしも有界とは限らない凸多面体, もしくは $\mathcal{R}^n$ 全体とする,

$$X_{ini} = \{x \in \mathcal{R}^n \mid M_{ini}x \leq m_{ini}\} \\ M_{ini} \in \mathcal{R}^{s_{ini} \times n}, m_{ini} \in \mathcal{R}^{s_{ini}}$$

このとき Σ_p の初期状態は $x(0) \in X_{ini}$ をみたしている.

(注意 7) X_{ini} は set-valued オブザーバが与える推定値の初期条件を与える. $X_{ini} = \mathcal{R}^n$ とできることからわかるように, この限定は set-valued オブザーバの推定則にとって重要ではない. しかしながらスイッチング制御を考える場合, 仮定 1, 4 のように制御対象の初期状態を限定する必要がある. このため推定値の初期値に仮定 3 のように制限を設ける方が自然である.

時刻 $t=0$ では、仮定 3 より $x(0) \in X_{\text{ini}}$ であり、また $y(0) = C_2 x(0)$ である。これより、推定値 $X(0)$ はつぎで与えられる。

$$X(0) = \{x \in \mathcal{R}^n \mid M(0)x \leq m(0)\} \quad (5a)$$

$$M(0) = \begin{bmatrix} M_{C_2} \\ M_{\text{ini}} \end{bmatrix}, m(0) = \begin{bmatrix} \tilde{m}(0) \\ m_{\text{ini}} \end{bmatrix} \quad (5b)$$

$$M_{C_2} = \begin{bmatrix} -C_2 \\ C_2 \end{bmatrix}, \tilde{m}(t) = \begin{bmatrix} -y(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (5c)$$

一般の時刻 t では、 $x(t) = A\hat{x}(t-1) + Bu(t-1)$ ただし $\hat{x}(t-1) \in X(t-1)$ 。さらに $y(t) = C_2 x(t)$ であるので、推定値 $X(t)$ はつぎの更新則で与えられる。

$$X(t) = \{x \in \mathcal{R}^n \mid M(t)x \leq m(t)\} \quad t \geq 1 \quad (6a)$$

$$M(t) = \begin{bmatrix} M_{C_2} \\ M(t-1)A^{-1} \end{bmatrix} \quad (6b)$$

$$m(t) = \begin{bmatrix} \tilde{m}(t) \\ m(t-1) + M(t-1)A^{-1}Bu(t-1) \end{bmatrix} \quad (6c)$$

なお上の更新則では A が正則であるとしているが、正則ではない場合へも推定則は拡張される (付録 2. 参照)。

【定理 2】 推定値 $X(t)$ に対して、つぎが成立する。

- (1) $x(t) \in X(t) \quad \forall t \in \mathcal{Z}^+$.
- (2) $X(\tau)$, $\tau \geq n-1$ は、一つの要素 $\hat{x}(\tau)$ からなる集合であり、 $\hat{x}(\tau) = x(\tau)$ である。

(証明) 付録 1. 参照。 $\square$

set-valued オブザーバの更新則 (5), (6) 式は冗長な拘束式を生成するが、これらを取り除く問題は線形計画問題へと帰着される。しかしながらオンラインでの処理が要求されるこの操作のため、set-valued オブザーバの動特性の速い制御対象への実装は、現在までのところ、現実的ではないと予想される。

5. 出力フィードバックスイッチング制御則

ここでは set-valued オブザーバが与える推定値にもとづいた出力フィードバックスイッチング制御則を提案する (Fig. 2 参照)。補償器の選択手順については、(3) 式の状態フィードバックの場合とほぼ同様である ((7a) 式参照)。しかしながら、選択された補償器の初期化の手順は、状態フィードバックの場合に比較し、複雑になる。また制御対象の初期状態に関する仮定についても、仮定 1 に比較し、より限定的なものとなる。

制御対象の初期状態に関してつぎを仮定する。

(仮定 4) Fig. 2 における制御対象 Σ_p の初期状態は $x(0) \in O_p^{i_0}$ であり、かつこのとき初期インデックス $i(0) = i_0$, $0 \leq i_0 \leq k$ は既知である。

仮定 4 より、仮定 3 における set-valued オブザーバ

が与える推定値の初期条件を $X_{\text{ini}} = O_p^{i_0}$ とする。これにより時刻 0 における推定値 $X(0)$ が set-valued オブザーバにより与えられる。つぎに推定値 $X(0)$ にもとづき Fig. 2 のスーパーバイザは補償器 Σ_{ci_0} の初期条件を設定する。しかしながらここで (4) 式に対応する最適化問題の可解性が問題となる。すなわち、つぎの条件を満足する Σ_{ci_0} の状態 x_{ci_0} が存在するならば、(4) 式に対応する最適化問題により初期条件 $x_{ci_0}(0)$ を決定することができる。

$$\forall \hat{x} \in X(0) \quad \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_{ci_0} \end{bmatrix} \in O_\infty^{i_0}$$

初期条件の決定可能性の条件を明確にあらわすため、つぎの記号を定義しておく

$$X_c(t) = \{x_c \in \mathcal{R}^{n_{ci}(t)} \mid \forall \hat{x} \in X(t) \quad \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_c \end{bmatrix} \in O_\infty^{i(t)}\}$$

ここで $i(t)$ および $X(t)$ は時刻 t において与えられる補償器のインデックスおよび状態の推定値である。したがって $X_c(t)$ は、推定値 $X(t)$ にもとづき決定される、設定可能な初期状態全体を与える。

初期条件に関する仮定として、さらにつぎを設ける。

(仮定 5) $X_c(0) \neq \emptyset$.

(注意 8) 集合 $X_c(t)$ の線形拘束式による表現は、線形計画問題を解くことでえられる。

仮定 4, 5 のもとで、拘束システムに対する出力フィードバックスイッチング制御則をつぎのように与える。

$$i(t) := \text{maximize} \{i \mid X(t) \subset O_p^i\} \quad (7a)$$

$$\text{if } i(t) < i(t-1) \quad (7b)$$

$$\text{if } X_c(t) \neq \emptyset \quad (7c)$$

$$\text{initialize } \Sigma_{ci(t)} \text{ as } \quad (7d)$$

$$\text{minimize } \|x_{ci(t)}(t)\|^2 \quad (7e)$$

$$\text{subject to } x_{ci(t)}(t) \in X_c(t) \quad (7f)$$

$$\text{else } i(t) := i(t-1) \quad (7g)$$

$$\text{else } i(t) := i(t-1) \quad (7h)$$

なお時刻 $t=0$ では、初期インデックス $i(0) = i_0$ が既知である仮定から、 Σ_{ci_0} を適用し、その初期状態は (7e), (7f) 式により設定する。

(注意 9) (7a) 式により与えられるインデックス $i(t)$ および set-valued オブザーバが与える推定値 $X(t)$ に対して $X_c(t) = \emptyset$ なる状況がこりえる。この場合 (7c) 式から (7g) 式のようにインデックスを更新することはできない。しかしながら定理 2 (2) に示すように、set-valued オブザーバによる推定値は、 n ステップ以内に真の状態 x へと収束する。これより $X_c(\tau) \neq \emptyset$ なる $\tau > t$ が存在し、

補償器の切り換えが実行される。

【定理 3】 仮定 4, 5 が成立しているとする。このとき (7) 式のスイッチング制御則により構成される Fig. 2 の閉ループ系は漸近的に安定であり、かつ拘束条件 (1) 式はすべての時刻において達成される。

(証明) 付録 1. 参照。 $\square$

6. 設計例

つぎの制御対象 Σ_p を考える。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^2 \end{bmatrix} u(t) \\ z_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad \omega = 0.1, \zeta = 0.2\end{aligned}$$

ただし $|u| \leq 2$ の入力制限が存在するとする。ここでは制御対象 Σ_p に対して、五つの補償器 Σ_{ci} , $i = 0, 1, \dots, 4$ を設計した。 Σ_{c0} は $u(t) = K_0 e(t)$ の静的な補償器とし、 Σ_{ci} , $i = 1, 2, 3, 4$ はつぎの動的な補償器とする。

$$\begin{aligned}\dot{x}_{ci}(t) &= -\frac{1}{\alpha_i T_i} x_{ci}(t) + \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i^2 T_i} e(t) \\ u(t) &= K_i x_{ci}(t) + \frac{K_i}{\alpha_i} e(t)\end{aligned}$$

各補償器のパラメータの値を Table 1 に、閉ループ系 Σ_i の開ループ特性を Fig. 5 に示す。

Table 1 K_i, α_i, T_i					
	0	1	2	3	4
K_i	1	5/2	5	15	45
α_i	–	1/3	1/3	0.217	0.217
T_i	–	8.66	5.77	2.68	2.14

サンプリング時間 $T_s = 0.5$ [s] の零次ホールドにより Σ_p , Σ_{ci} をそれぞれ離散化する。えられた離散時間の各 Σ_i において、初期状態を $x(0) = [2 \ 0]^T$, $x_{ci}(0) = 0$ とした場合の応答を Figs. 6, 7 に示す。なおサンプリング時間 T_s は、連続時間系、離散時間系の初期値応答を比較し、これらが大きく異なる範囲で決定した。

Fig. 6 の応答から、補償器の系列は順に収束が速くなるように構成されており、 Σ_{c4} が最も優れた制御性能を有している。しかしながらこのとき、対応する Fig. 7 の制御入力 u は、 Σ_0 を除いて、非常に大きな値となっており拘束条件 $|u| \leq 2$ を大きく破っている。

(注意 10) スwitchング制御系を構成する補償器の系列を具体的にどう設計するかについては、状態フィードバックなど一部の例外を除いて [2, 7, 8], 有力な指針が示されていない。しかしながら各 Σ_{ci} を設計する段階では、

Fig. 5 Bode diagram of Σ_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$

Fig. 6 Initial response: z_1

Fig. 7 Initial response: u

拘束条件 (1) 式を陽に考慮する必要はない。このため、豊富な線形制御理論の結果により、個々の補償器を設計することができる。

つぎに各最大 CPI 集合 O_{∞}^i を構成し、さらにこれを制御対象の状態空間へ射影した O_p^i を Fig. 8 に示す。

Fig. 8 $O_p^i, i=0,1,2,3,4$

Fig. 8 から、補償器の制御性能が向上するにつれ、 O_p^i が縮小する傾向にあることがわかる。逆に Fig. 6 において最も収束が遅い Σ_0 に対しては、非常に大きな O_p^0 がえられており、この広い領域で制御系が拘束条件をみたし、閉ループ系の安定性が保証される。

4. の set-valued オブザーバおよび (7) 式 により出力フィードバックスイッチング制御則を構成する。初期状態を Figs. 6, 7 の場合と同じく $x(0)=[2 \ 0]^T$, 仮定 4 における i_0 を $i(0)=i_0=0$ としたときの応答を Figs. 9, 10 に示す。

Fig. 9 Output feedback switching control: z_1

Fig. 10 Output feedback switching control: u

定理 2 から、 $t=n-1=2-1=1$ 時点 (0.5 [s]) 以降では、set-valued オブザーバの推定値 $X(t)$ が状態の真値 $x(t)$ に一致する。このように状態の推定値の収束が、最初の補償器の切り換え時刻 ($t=4, (2.0 [s])$) より早いいため、この例題では出力フィードバック化による制御性能の劣化がない。なお Fig. 11 に状態 x_2 の推定値の上限、下限を示す。

Fig. 11 SVO error bounds: x_2

7. おわりに

本論文では、出力フィードバックにもとづくスイッチング制御系の構成法を提案した。set-valued オブザーバは、真の状態を含む集合を推定値として与える。この状態の存在領域が確定的に与えられる特徴から、スイッチング制御系を構成することが可能となる。提案した制御則では、初期状態に関する仮定が、状態フィードバックの場合に比較し、より限定的となるものの、閉ループ系の安定性および拘束条件の達成が保証される。なお提案手法では、set-valued オブザーバ実現のために要求されるオンライン処理の多さから、動特性の速い制御対象への実装が現実的ではなくなると予想される。

参考文献

- [1] E. G. Gilbert: Linear control systems with pointwise-in-time constraints: What do we do about them?; plenary address, *Proceedings of the 1992 American Control Conference*, p. 2565 (1992)
- [2] G. F. Wredenhagen and P. R. Bélanger: Piecewise-linear LQ control for systems with input constraints; *Automatica*, Vol. 30, No. 3, pp. 403-416 (1994)
- [3] I. Kolmanovsky and E. G. Gilbert: Multimode regulators for systems with state & control constraints and disturbance inputs; *Control using logic-based switching, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 222, pp. 104-117, Springer (1997)
- [4] E. G. Gilbert and K. T. Tan: Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 36, No. 9, pp. 1008-1020 (1991)

- [5] S. S. Keerthi and E. G. Gilbert: Computation of minimum-time feedback control laws for discrete-time systems with state-control constraints; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 32, No. 5, pp. 432-435 (1987)
- [6] 平田, 藤田: 外部入力をも有する線形離散時間システムに対する拘束条件の解析; 電気学会論文誌 C, Vol. 118, No. 3, pp. 384-390 (1998)
- [7] 平田, 藤田: 入力に制限を有する線形離散時間システムに対するスイッチング状態フィードバック制御則の構成法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 11, No. 6, pp. 316-323 (1998)
- [8] 平田, 藤田: 外部入力をも有する拘束システムに対するスイッチング状態フィードバック制御則の構成法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 12, No. 7, pp. 437-443 (1999)
- [9] J. S. Shamma and E. Tu: Optimality of set-valued observers for linear systems; *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2081-2086 (1995)

付 録

付録 1. 定理の証明

(証明) 【定理 2】 定理 2 (2) を示す. 時刻 $n-1$ の推定値 $X(n-1) = \{x \in \mathcal{R}^n | M(n-1)x \leq m(n-1)\}$ を規定する線形拘束式をすべて書き出す. これにより, つぎの等式および不等式条件がえられる.

$$CA^{-(n-1-q)}x = y(q) + CA^{-(n-1-q)} \sum_{k=q}^{n-2} A^{n-2-k} Bu(k) \\ q=0, \dots, n-1$$

$$M_{\text{ini}} A^{-(n-1)}x \leq m_{\text{ini}} + M_{\text{ini}} A^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{n-2} A^{n-2-k} Bu(k)$$

ここで等式条件は $OA^{-(n-1)}x = \eta$ と表現される. ただし

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} CA^{n-1} \\ \vdots \\ CA \\ C \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta(n-1) \\ \vdots \\ \eta(1) \\ \eta(0) \end{bmatrix}$$

$$\eta(q) = y(q) + CA^{-(n-1-q)} \sum_{k=q}^{n-2} A^{n-2-k} Bu(k)$$

である. 仮定 2 より $\text{rank } \mathcal{O} = n$ であるので, 時刻 $n-1$ における推定値 x は $x = A^{n-1}(\mathcal{O}^T \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^T \eta$ と一意に決定される. また不等式条件は, 仮定 3 における条件 $x(0) \in X_{\text{ini}}$ をあらわしており, 常に成立している. 行列 A が正則でない場合もほぼ同様に示される. $\square$

(証明) 【定理 3】 仮定 5 および (7e), (7f) 式より

$$\forall \hat{x} \in X(0) \subset \mathcal{O}_p^{i_0} \quad \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_{ci_0}(0) \end{bmatrix} \in \mathcal{O}_\infty^{i_0}$$

であり, また $x(0) \in X(0)$ より, 閉ループ系 Σ_{i_0} は, 拘束条件を達成したうえで動作する. 各閉ループ系は安定であるので, コントローラのインデックスに関係なく $x(t) \rightarrow 0$ となる. さらに 定理 2 (2) より, (7a) 式において $i(t_1) > i_0$ なる $t_1 > 0$ が存在する. 同様に 定理 2 (2) より, (7c) において $X(t_2) \neq \emptyset$ なる $t_2 \geq t_1 > 0$ が存在し, コントローラの切り換えが実行される. このとき

$$\forall \hat{x} \in X(t_2) \quad \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_{ci(t_2)}(t_2) \end{bmatrix} \in \mathcal{O}_\infty^{i(t_2)}$$

であり, また $x(t_2) \in X(t_2)$ より, 閉ループ系 $\Sigma_{i(t_2)}$ は, 拘束条件を達成したうえで動作する. 同様の議論により $i(t) \rightarrow k$, $x(t) \rightarrow 0$ であり, また拘束条件はすべての時刻において達成される. $\square$

付録 2. 行列 A が正則でない場合の更新則

行列 A が正則でない場合, (6) 式に対応する, $X(t)$ を規定する線形拘束式は

$$X(t) = \{x \in \mathcal{R}^n | \exists \hat{x} \in X(t-1) \\ \begin{bmatrix} M_{C_2} & 0_{n \times n} \\ -I_n & A \\ I_n & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \tilde{m}(t) \\ -Bu(t-1) \\ Bu(t-1) \end{bmatrix} \}$$

となる. ここで M_{C_2} , $\tilde{m}(t)$ は, (5c) 式で定義される. これに Fourier-Motzkin アルゴリズム (注意 4 参照) を適用することにより (6a) 式と同様の表現がえられる.