オブザーバ型部分スイッチング制御則による 拘束システムの安定化*

平田 研二[†]・藤田 政之[‡]

Observer Based Partial Switching Control of Systems with State and Control Constraints*

Kenji HIRATA[†] and Masayuki FUJITA[‡]

This paper considers output-feedback switching control of systems with pointwise-in-time state and control constraints. In the case of full state feedback, the ability of switching control laws for resolving a common conflict in the design of state regulators has been proved. Under measurement feedback, previous work of the authors derived the switching control law utilizing a set-valued state estimation technique. However, the online computational burden in constructing the set-valued estimates of the plant state may severely limit its applicability. Proposed methods in this paper alleviate this burden. The main idea is to construct an upper bound of certain quadratic form of unmeasured error signals. The resulting measurement feedback switching control law is then constructed in conjunction with this upper bound as an estimation error, rather than set-valued estimate of the state.

1. はじめに

現実の制御系は、アクチュエータの飽和要素、制御対象の保護のための制限など、多くの拘束条件を有する‘拘束システム’である。拘束条件の存在は、制御性能の劣化、あるいは制御系の不安定化などを引き起こし、実システムの制御における大きな問題となることが知られている [1]。

このような拘束システムの実践的な制御法として、複数の補償器を切り換えながら適用するスイッチング制御が注目されている [2-4,8,9]。近年提案されているスイッチング制御則の特徴として、制御系が拘束条件を破ることなく‘安全に’動作する条件を、状態空間に構成されるある集合の性質として記述し [5-7]、またこの集合がとる領域を利用して、補償器の切り換えルールを与えていることが挙げられる。

しかしながら、状態空間に構成される集合を利用する

ことは、補償器の切り換えを実行するスーパーバイザにより、状態が観測可能でなければならないことを意味する。よってこれらスイッチング制御則は、状態フィードバックの仮定のもとで導出されている。スイッチング制御をより実用的なものとするには、出力の観測のみにもとづいた制御則の提案が望まれる。

このような観点から、set-valued オブザーバ [12] を利用した出力フィードバックスイッチング制御則が提案されている [10]。しかしながら set-valued オブザーバは、スイッチング制御系の実現に適した性質を有する一方、推定値を構成するために多くのオンライン処理を要求する。よって、特に動特性の速い制御対象への実時間での実装は、これまでのところあまり現実的でないと考えられる。

本論文では、制御則により要求されるオンライン処理の軽減を目的とし、1) 各補償器の構造をオブザーバ型に限定、2) 推定誤差の上界を与える楕円体を利用し状態の存在領域を推定することで、set-valued オブザーバを利用しない、新たな出力フィードバックスイッチング制御則を提案する (Fig.1 参照)。

2. では、拘束条件を有する制御系の記述を示す。3. では、制御系が拘束条件を達成するための条件を考察する。4. では、推定誤差の上界を与える楕円体の構成を示す。

* 原稿受付 1999年11月22日

[†] 大阪大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University; 2-1 Yamadaoka, Suita 565-0871, JAPAN

[‡] 金沢大学 工学部 Faculty of Engineering, Kanazawa University; 2-40-20 Kodatsuno, Kanazawa 920-8667, JAPAN

Key Words: systems with state and control constraints, switching control, measurement feedback.

5. では、スイッチング制御系を構成する各補償器の設計手順を示し、6. でこれらを利用したスイッチング制御則を提案する。7. では設計例を示す。なお本論文で使用する主な記号を付録 4. にしめす。

Fig. 1 Switching control systems

2. 拘束システム

つぎの制御対象 Σ_p を考える。

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1a)$$

$$z_1(t) = C_1x(t) \quad (1b)$$

$$y(t) = C_2x(t) \quad (1c)$$

ここで $x \in \mathcal{R}^n$ は状態、 $u \in \mathcal{R}^m$ は制御入力、 $z_1 \in \mathcal{R}^{p_1}$ は被制御量、 $y \in \mathcal{R}^{p_2}$ は観測量である。また A, B, C_1, C_2 は適当な大きさの定数行列とする。

つぎに制御系に存在する拘束条件を表現するため、制御入力および状態に依存した出力 $z_0 \in \mathcal{R}^{p_0}$ を定義する。

$$z_0(t) = C_0x(t) + D_0u(t)$$

このとき制御系は

$$z_0(t) \in Z \quad \forall t \in \mathcal{Z}^+ \quad (2)$$

で表現される拘束条件を有するとする [5–7]。なお $\mathcal{Z}^+$ は非負の整数全体、集合 $Z \subset \mathcal{R}^{p_0}$ は、

$$Z = \{z_0 \in \mathcal{R}^{p_0} \mid M_Z z_0 \leq m_Z\}$$

$$M_Z \in \mathcal{R}^{s_Z \times p_0}, 0 < m_Z \in \mathcal{R}^{s_Z}$$

で定義される有界な凸多面体である。ここで不等式は、いずれもベクトルの各要素ごとに成立するとしている。

拘束条件を上記の形で与えられるものに限定することは、問題の適用範囲を幾分限定することになるが、アクチュエータの性能限界による入力制限や制御対象の保護

のために要求される拘束条件など、現実の制御系が有する多くの拘束条件を表現することが可能である。

スイッチング制御系では、複数の補償器 Σ_{ci} , $i = 0, 1, \dots, k$ が構成され、これらが順次切り換えられながら適用されていく。本論文では、各補償器 Σ_{ci} の構造を

$$u(t) = F_i \hat{x}(t) \quad (3a)$$

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + H(y(t) - C_2\hat{x}(t)) \quad (3b)$$

に限定、さらにオブザーバゲイン H は固定、切り換えるのはフィードバックゲイン F_i のみとした、新たな出力フィードバックスイッチング制御則を提案する。

3. 拘束条件の解析

ここでは、オブザーバ型の補償器 Σ_{ci} を利用した出力フィードバック制御系において、拘束条件 (2) 式が達成されるための条件を考察する。また状態フィードバック制御 $u = F_i x$ を施した場合との関連についても示す。これは 5. において重要な役割を果たす。

3.1 出力フィードバック制御

推定誤差を $e = x - \hat{x}$ 、閉ループ系の状態を $x_c = [e^T \hat{x}^T]^T$ とし、制御対象 Σ_p 、補償器 Σ_{ci} および拘束条件 (2) 式を考慮した各閉ループ系 Σ_i , $i = 0, 1, \dots, k$ をつぎであらわす (Fig. 2 参照)。

$$x_c(t+1) = A_{ci}x_c(t) \quad (4a)$$

$$z_0(t) = C_{0ci}x_c(t) \quad (4b)$$

$$z_1(t) = C_{1c}x_c(t) \quad (4c)$$

$$A_{ci} = \begin{bmatrix} A - HC_2 & 0 \\ HC_2 & A + BF_i \end{bmatrix}$$

$$C_{0ci} = \begin{bmatrix} C_0 & C_0 + D_0F_i \end{bmatrix}$$

$$C_{1c} = \begin{bmatrix} C_1 & C_1 \end{bmatrix}$$

Fig. 2 Closed-loop system: Σ_i

近年提案されている拘束システムに対するスイッチング制御則の一つの特徴として、Fig. 2 の Σ_i が、拘束条件を破ることなく安全に動作するための条件をつぎの最大 CPI (Constrained Positively Invariant) 集合により記述し [5–7]、またこの集合の性質にもとづいた補償器の切

り換えルールを提案していることが挙げられる [3,4,8,9]. 閉ループ系 Σ_i が拘束条件 (2) 式を達成するための必要十分条件は, つぎの最大 CPI 集合により表現される.

【定義 1】 初期状態 $x_c(0)$ に対する応答 (4b) 式を $z_0(t; x_c(0))$ であらわす. Σ_i の最大 CPI 集合をつぎのように定義する.

$$O_\infty^i = \{x_c(0) \in \mathcal{R}^{2n} \mid z_0(t; x_c(0)) \in Z \quad \forall t \in \mathcal{Z}^+\}$$

(注意 1) 最大 CPI 集合の定義から, Σ_i が安全に動作するための必要十分条件は $x_c(0) \in O_\infty^i$ となる. したがって O_∞^i は, 補償器 Σ_{ci} が適用可能となる状態の領域を与える. また O_∞^i は Σ_i の動特性に関して不変な集合, すなわち $x_c(t) \in O_\infty^i \rightarrow x_c(t+1) \in O_\infty^i$ となる.

(注意 2) 最大 CPI 集合は数値計算により構成され

$$O_\infty^i = \{x_c \in \mathcal{R}^{2n} \mid \begin{bmatrix} M_e^i & M_x^i \end{bmatrix} x_c \leq m^i\} \quad (5)$$

のように表現される, 原点を内点にもつ凸多面体となる. ここで $M_e^i, M_x^i \in \mathcal{R}^{s_i \times n}$, $0 < m^i \in \mathcal{R}^{s_i}$ は O_∞^i を規定する線形拘束式を表現する行列である [5-7].

一般に制御性能を重視した Σ_{c0} を適用すると, 大きな制御入力が必要とされることなどから, 非常に小さな集合 O_∞^0 がえられる. したがって閉ループ系 Σ_0 の安定性は, この限定された領域でのみ保証される. 逆に制御性能を犠牲にすることにより, 大きな最大 CPI 集合がえられるが, このとき達成される制御性能は当然低いものとなる. 拘束システムの制御問題における最も大きな問題の一つは, この安定性と制御性能のトレードオフにある.

しかしながらここで, 閉ループ系の状態 x_c が観測可能であるならば, まず安定性を重視した Σ_{ck} から, 逆に制御性能を重視した Σ_{c0} までの補償器の系列を与える. つぎに各 O_∞^i の境界を切り換え面とする状態フィードバックスイッチング制御則を利用することが, このトレードオフの問題を回避する一つの方法となる [3,4,8,9].

さらに参考文献 [10] では, set-valued オブザーバ [12] を利用した出力フィードバックスイッチング制御則が提案されている. set-valued オブザーバは, $x(t) \in X(t)$ である集合 $X(t)$ を制御対象の状態の推定値として構成する. この真の状態の存在領域が確定的に与えられる特徴から, スwitching 制御系を構成することが可能となる. しかしながら推定値の構成には, 多くのオンライン処理が要求される. したがって, 特に動特性の速い制御対象への実時間での実装は, これまでのところあまり現実的でないと考えられる. なお推定値が漸近的に真の状態に一致する通常のオブザーバを単純に利用するだけでは, 拘束条件の達成を保証することは困難である.

本論文では, 制御則により要求されるオンライン処理

の軽減を目的とし, 1) 各補償器の構造をオブザーバ型に限定, 2) 推定誤差の上界を与える楕円体を利用し状態の存在領域を推定することで, set-valued オブザーバを利用しない, 新たな出力フィードバックスイッチング制御則を提案する.

以下では, 閉ループ系 Σ_i が拘束条件 (2) 式を達成するための条件についてさらに考察をおこなう. まず (5) 式より, 最大 CPI 集合は e, x に関して具体的に表現される (Fig. 3 参照) ¹.

$$O_\infty^i = \left\{ \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{2n} \mid \begin{bmatrix} M_e^i - M_x^i & M_x^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix} \leq m^i \right\} \quad (6)$$

Fig. 3 Geometrical representation of maximal CPI set

つぎに拘束条件 (2) 式が達成されるための条件に関連して, いくつかの記号を定義する. まず (5), (6) 式の $\hat{x}$, x および e の空間への射影を考える (Fig. 3 参照).

$$\begin{aligned} O_{\hat{x}}^i &= \{\hat{x} \in \mathcal{R}^n \mid \exists e \in \mathcal{R}^n \quad x_c \in O_\infty^i\} \\ O_x^i &= \{x \in \mathcal{R}^n \mid \exists e \in \mathcal{R}^n \quad \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix} \in O_\infty^i\} \\ O_e^i &= \{e \in \mathcal{R}^n \mid \exists \hat{x} \in \mathcal{R}^n \quad x_c \in O_\infty^i\} \end{aligned}$$

(注意 3) 閉ループ系 Σ_i が拘束条件 (2) 式を達成するための必要条件は, $x(0) \in O_x^i$ である. すなわち必要条件として, 制御対象の初期状態が $x(0) \in O_x^i$ であるとする. このときさらに $x_c(0) = [x^T(0) - \hat{x}^T(0) \quad \hat{x}^T(0)]^T \in O_\infty^i$ が成立するよう補償器 Σ_{ci} の初期状態 $\hat{x}(0)$ が設定されるならば, 閉ループ系 Σ_i は拘束条件 (2) 式を達成する.

つぎに状態 $\hat{x}$ あるいは推定誤差 e を特定の値に制限することでえられる集合を定義しておく ².

¹(5), (6) 式は異なる空間における集合を表現している. 例えば $O_{\infty e \hat{x}}^i, O_{\infty e x}^i$ のように記号を区別すべきであるが, 複雑であるので同一の記号 O_∞^i を用いる.

²(7a), (7c) 式は, (5) 式にもとづき構成される. 一方 (7b) 式は, (6) 式にもとづき構成される.

$$O_x^i(e) = \{\hat{x} \in \mathcal{R}^n \mid \begin{bmatrix} e \\ \hat{x} \end{bmatrix} \in O_\infty^i\} \quad (7a)$$

$$O_x^i(e) = \{x \in \mathcal{R}^n \mid \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix} \in O_\infty^i\} \quad (7b)$$

$$O_e^i(\hat{x}) = \{e \in \mathcal{R}^n \mid \begin{bmatrix} e \\ \hat{x} \end{bmatrix} \in O_\infty^i\} \quad (7c)$$

とくに $e=0$ とした $O_x^i(0)$ は、つぎの状態フィードバック制御の場合との関連および 5. において重要な役割を果たす (Fig. 3 参照).

(注意 4) 初期推定誤差が $e(0)=0$ である場合 $e(t)=0$ である. このとき拘束条件 (2) 式が達成されるための必要十分条件は $x(0) \in O_x^i(0)$ となる. $e(0)=0$ において許容される $x, \hat{x}$ の領域は (7a), (7b) 式および (5), (6) 式より $O_x^i(0) = O_\infty^i(0) = \{x \in \mathcal{R}^n \mid M_x^i x \leq m^i\}$ で与えられる.

(注意 5) 定義より $O_x^i(0) \subset O_x^i$ であることに注意する (Fig. 3 参照). オブザーバ型の補償器 Σ_{ci} を利用する場合, $e(0)=0$ は制御側にとって最も望ましい状況であると考えられる. しかしながら拘束条件の達成を考えた場合, 許容される状態の領域は $O_x^i(0)$ に限定される. 一方, 初期誤差 $e(0)$ をうまく設定することができるならば, 許容される制御対象の状態の領域が O_x^i まで拡大される.

3.2 状態フィードバック制御

$e(0)=0$ の場合, 閉ループ系 Σ_i の動特性は

$$x(t+1) = (A + BF_i)x(t) \quad (8a)$$

$$z_0(t) = (C_0 + D_0 F_i)x(t) \quad (8b)$$

となる. 状態フィードバック系 (8) 式の拘束条件 (2) 式に関する最大 CPI 集合を定義 1 と同様に定義する.

$$\tilde{O}_\infty^i = \{x(0) \in \mathcal{R}^n \mid z_0(t; x(0)) \in Z \quad \forall t \in \mathcal{Z}^+\}$$

ただしここで $z_0(t; x(0))$ は (8b) 式に対応する出力である.

【補題 1】 拘束条件

$$\begin{bmatrix} C_e e(t) \\ z_0(t) \end{bmatrix} \in Z_e \times Z \quad \forall t \in \mathcal{Z}^+$$

に関する閉ループ系 Σ_i の最大 CPI 集合

$$\tilde{O}_\infty^i = \{x_c(0) \in \mathcal{R}^{2n} \mid \begin{bmatrix} C_e e \\ z_0 \end{bmatrix}(t; x_c(0)) \in Z_e \times Z \quad \forall t \in \mathcal{Z}^+\}$$

および (7b) 式と同様にその制限 $\tilde{O}_x^i(e)$ を考える. ここで行列 C_e は推定誤差に関する拘束を規定する適当な大きさの行列, 集合 Z_e は原点を内点に含む凸多面体とする. このとき $\tilde{O}_x^i(0)$ は (8a) 式に関する正の不変集合で

あり $\tilde{O}_\infty^i = \tilde{O}_x^i(0)$ である.

(証明) 付録 2. 参照. $\square$

(注意 6) 補題 1 における C_e は任意でよい. したがって $C_e=0$ とすると, 補題 1 は, Fig. 3 において Fig. 4 に示す $\tilde{O}_\infty^i = \tilde{O}_x^i(0) = O_x^i(0) = \{x \in \mathcal{R}^n \mid M_x^i x \leq m^i\}$ の成立を意味している. あとの定理 1 は, この事実から導出される (付録 2., 定理 1 の証明参照).

Fig. 4 Geometrical interpretation of Lemma 1

4. 推定誤差の存在領域

最大 CPI 集合は, 補償器 Σ_{ci} が適用可能となる状態の領域を与える. したがって閉ループ系 Σ_i の状態 x_c が観測可能ならば, 観測される状態と最大 CPI 集合が与える領域にもとづいたスイッチング制御則がえられる [3,4,8,9].

しかしながら $e = x - \hat{x}$ の観測は不可能である. よってこれに対する何らかの推定則を利用することが必要となる. また状態空間に構成される領域にもとづいたスイッチング制御則では, 状態がある集合に含まれるか否かにより適用するコントローラを決定する. このことから, 推定誤差が漸近的に真値に一致する通常のオブザーバを単に利用するだけでは, 制御則の実現は困難である.

本論文では, 推定誤差の存在領域を確定的に与える機構として, 楕円体をもちいた推定誤差の上界を利用する.

閉ループ系 Σ_i が拘束条件 (2) 式を達成するための必要条件は $e(0) \in O_e^i$ である. O_e^i に関してつぎが示される.

【補題 2】 O_e^i は推定誤差の動特性 $e(t+1) = (A - HC_2)e(t)$ に関する正の不変集合, すなわち $e(t) \in O_e^i \rightarrow e(t+1) \in O_e^i$ である.

(証明) 付録 2. 参照. $\square$

(注意 7) 補題 2 は, オブザーバゲイン H が各補償器に共通であることから, O_e^i が Σ_{ci} とは異なる補償器 Σ_{cj} を適用する場合でも, 推定誤差の動特性に関する正の不変集合となることを意味している. また推定誤差の動特性のみに依存する結果であるから $x_c(0) = [e^T(0) \quad \hat{x}^T(0)]^T \notin O_\infty^i$ の場合であっても $e(0) \in O_e^i$ であるならば $e(t)$ が常に O_e^i の内部に留まることを保証する.

推定誤差 $e(t)$ の存在領域を与えるため, 付録 1. の (A1), (A2) 式と同様の手順により

$$O_e^i \subset E(S_e^i, \rho_e^i) = \{e \in \mathcal{R}^n \mid e^T S_e^i e \leq \rho_e^i\}$$

のように凸多面体 O_e^i の楕円体 $E(S_e^i, \rho_e^i)$ による近似を与える。なお本論文では $E(P, \rho)$ により、行列 $P > 0$ および $\rho > 0$ で定義される楕円体 $E(P, \rho) = \{y \mid y^T P y \leq \rho\}$ をあらわす。閉ループ系 Σ_i が拘束条件 (2) 式を達成するための必要条件 $e(0) \in O_e^i$ を仮定すると $e^T(0) S_e^i e(0) \leq \rho_e^i$ である。ここで $\bar{e} = (S_e^i)^{1/2} e$ を考えると $\bar{e}(t+1) = (S_e^i)^{1/2} (A - HC_2) (S_e^i)^{-1/2} \bar{e}(t)$ であるが $(A - HC_2)$ は安定であるので

$$\|\bar{e}(t)\|^2 = e^T(t) S_e^i e(t) \leq m \gamma^t \|\bar{e}(0)\|^2 \leq m \gamma^t \rho_e^i \quad (9)$$

なる $m \geq 1, \gamma < 1$ が存在する。したがって $\rho_e^i(t) = m \gamma^t \rho_e^i$ とおくと、楕円体

$$E(S_e^i, \rho_e^i(t)) = \{e \in \mathcal{R}^n \mid e^T S_e^i e \leq \rho_e^i(t)\}$$

は推定誤差の存在領域の上界を与える。なお Fig. 1 における predictor のブロックは $\rho_e^i(t)$ を与える機構をあらわしている ((13) 式 参照)。

5. 補償器の構成

F_{i-1} すなわち補償器 $\Sigma_{ci(i-1)}$ が与えられ O_{∞}^{i-1} が構成されているとする。ここでは O_{∞}^{i-1} が与える情報にもとづいた F_i の設計法を提案する。

5.1 フィードバックゲインの構成手順

本論文で考える拘束システムの安定化の場合、スイッチング制御を利用する大きな目的の一つは、安定性を保証できる状態空間の領域を拡大することにある [3,4,8,9]。したがって F_i が達成すべき条件は

$$O_x^{i-1} \subset O_x^i$$

のように許容される制御対象の状態の領域を拡大することとする (Fig. 5 参照)。

設計の基本的なアイデアはつぎのとおりである。まず対象として完全な状態フィードバック系 (8) 式を考える。ここで楕円体 $E(P_i, \rho_i^-)$ が

$$O_x^{i-1} \subset E(P_i, \rho_i^-) \subset X_i \quad (10)$$

をみたしかつ (8a) 式に関する正の不変集合となるように F_i の設計をおこなう (Fig. 6 参照)。なお X_i は

$$X_i = \{x \in \mathcal{R}^n \mid z_0 = (C_0 + D_0 F_i)x \in Z\}$$

で定義される状態拘束集合であり、 $x(0) \in X_i$ は状態フィードバック系 (8) 式が拘束条件 (2) 式を達成するための必要条件である [5,7]。

上記の手順でえられる F_i に関して、つぎが示される。

Fig. 5 Geometrical representation of controller design objective

Fig. 6 Geometrical representation of controller design procedures

【定理 1】 楕円体 $E(P_i, \rho_i^-)$ が (10) 式をみたしかつ (8a) 式に関する正の不変集合となる F_i がえられているとする。 F_i を利用したオブザーバ型の補償器 Σ_{ci} により構成される閉ループ系 Σ_i において $O_x^{i-1} \subset O_x^i$ が成立する。

(証明) 付録 2. 参照。 □

(注意 8) 定理 1 より、各フィードバックゲインの構成では、状態フィードバック系 (8) 式を想定すればよく、これによりオブザーバ型の補償器 Σ_{ci} を利用した閉ループ系 Σ_i で $O_x^{i-1} \subset O_x^i$ が実現される。なおこのような F_i の具体的な構成手順は参考文献 [8,9] で提案されている。ここでは参考文献 [8] の手法を改良した手順を付録 1. にまとめる。

5.2 仮想的拘束条件を付加した最大 CPI 集合の構成

5.1 より構成される新たな補償器 Σ_{ci} が適用可能となる状態空間の領域は O_{∞}^i で与えられる。拘束条件 (2) 式に関して単純に O_{∞}^i を構成する場合、制御対象の状態空間 x および推定誤差の空間 e の両方向へ集合が拡大される ((6) 式 参照)。推定誤差 e の空間方向への集合の拡

大は、あとの仮定 1 の達成がより容易になることを意味する (注意 10 参照)。しかしながらスイッチング制御を利用する目的には、5.1 の設計仕様にもおいたように、許容される制御対象の状態空間の拡大 $O_x^{i-1} \subset O_x^i$ がある。 O_∞^i が e の空間方向へ極端に拡大されてしまう場合、この拡大を拘束することで、制御対象の状態空間 x の方向へ集合をより拡大できる場合がある。このような拘束条件の設定として、たとえば

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ z_0(t) \end{bmatrix} \in O_e^{i-1} \times Z \quad \forall t \in Z^+ \quad (11)$$

が考えられる。なおこの場合でも 定理 1 と同様の結果が成立する。

【系 1】 定理 1 と同様にフィードバックゲイン F_i を設計する。拘束条件 (11) 式に関する閉ループ系 Σ_i の最大 CPI 集合

$$O_\infty^i = \{x_c(0) \in \mathcal{R}^{2n} \mid \begin{bmatrix} e \\ z_0 \end{bmatrix}(t; x_c(0)) \in O_e^{i-1} \times Z \quad \forall t \in Z^+\}$$

およびその制御対象の状態空間への射影 O_x^i を構成する。このとき $O_x^{i-1} \subset O_x^i$ である。

(注意 9) 系 1 より、拘束条件を (11) 式のように拡張して O_∞^i を構成しても、許容される制御対象の状態の領域の拡張 $O_x^{i-1} \subset O_x^i$ には影響を与えない。なおこの場合、それぞれつぎの包含関係が成立する。

$$O_x^0 \subset O_x^1 \subset O_x^2 \subset \dots \subset O_x^k \\ O_e^0 \supset O_e^1 \supset O_e^2 \supset \dots \supset O_e^k$$

なお 7. では、この手法により O_∞^1, O_∞^2 を構成した。この結果、例題では $O_e^0 = O_e^1 = O_e^2$ となっている。

6. スwitching 制御則

提案手法により、補償器 Σ_{ci} , $i=0,1,\dots,k$ および対応する最大 CPI 集合が構成されているとする。制御系の初期状態に関して、つぎの仮定を設ける。

(仮定 1) 初期状態は $x_c(0) \in O_\infty^{i_0}$ を満たしており、かつこのときの初期インデックス $i(0) = i_0$ は既知である。

(注意 10) 制御対象の初期状態 $x(0)$ に対して、許容される初期推定誤差は $O_e^{i_0}(x(0))$ で与えられる。仮定 1 は、特定できない初期状態 $x(0)$ に対して、オブザーバの初期状態 $\hat{x}(0)$ を $e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \in O_e^{i_0}(x(0))$ をみたす程度の誤差で設定することを要求している。

Fig. 1 におけるスーパーバイザが果たす役割は、適用する補償器のインデックス $i=i(t)$ の決定である。このとき $i(t)$ が最低限満たすべき条件は

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \in O_\infty^{i(t)} \quad (12)$$

のように閉ループ系 $\Sigma_{i(t)}$ の状態が $O_\infty^{i(t)}$ に含まれていることである。しかしながら推定誤差 $e(t)$ は観測できない。そこでインデックス $i(t)$ の決定を $\hat{x}(t)$ の観測および 4. で与えた $e(t)$ の上界 $E(S_e^{i_0}, \rho_e^{i_0}(t))$ にもとづいて実行する。

時刻 τ で観測される $\hat{x}(\tau)$ にもとづき、このとき許容される推定誤差の領域は $O_e^i(\hat{x}(\tau))$ となる。したがって

$$E(S_e^{i_0}, \rho_e^{i_0}(\tau)) \subset O_e^i(\hat{x}(\tau))$$

は、(12) 式の成立を意味する。オブザーバの状態 $\hat{x}(t)$ の観測および推定誤差の上界を与える $\rho_e^{i_0}(t)$ の値にもとづき、各時刻で適用する補償器のインデックス $i(t)$ をつぎで決定する (付録 3. 参照)。ただし、仮定 1 より、 $i(0) = i_0$ とする。

$$i = \text{minimize}\{i \mid \hat{x}(t) \in O_\infty^i\} \quad (13a)$$

$$\text{if } i \neq i(t-1) \quad (13b)$$

$$i(t) := i(t-1) \quad (13c)$$

$$\text{for } (j = i(t-1) - 1; j \geq i; j = j-1) \quad (13d)$$

$$\text{if } E(S_e^{i_0}, \rho_e^{i_0}(t)) \subset O_e^j(\hat{x}(t)) \quad (13e)$$

$$i(t) := j \quad (13f)$$

$$\text{else } i(t) := i(t-1) \quad (13g)$$

【定理 2】 制御対象 Σ_p および (13) 式のスイッチング制御則により構成される閉ループ系は安定でありかつ $i(t) \rightarrow 0$ 。またすべての時刻において拘束条件 (2) 式は達成される。

(証明) 付録 2. 参照。 $\square$

(注意 11) $O_e^{i_0}$ は、任意の補償器 Σ_{ci} を適用した場合に、推定誤差の動特性に関する正の不変集合となる (補題 2)。したがってまた (13e) 式において推定誤差の上界を与える $E(S_e^{i_0}, \rho_e^{i_0})$ のインデックス i_0 は、切り換えをおこなわない。

7. 設計例

つぎの制御対象 Σ_p を考える。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (14)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

ただし $-3 \leq u \leq 3$ の入力制限が存在するとする。制御則は、サンプリング時間 0.1 [s] の零次ホールドでえられる離散時間系に対して導出した、オブザーバゲインを

$H = [0.47 \quad -0.053]$, 補償器 Σ_{c0} のフィードバックゲインを $F_0 = [-7 \quad -11]$ とし, 提案手法により補償器 Σ_{ci} , $i=1,2$ を設計した. 各最大 CPI 集合 O_∞^i の制御対象の状態空間への射影 O_x^i , $i=0,1,2$ およびフィードバックゲイン設計時に構成される楕円体 $E(P_i, \rho_-^i)$, $i=1,2$ を Fig. 7 に示す. なお O_∞^i , $i=1,2$ を構成する際には, 5.2 の手法を採用した. この結果, 例題では $O_e^0 = O_e^1 = O_e^2$ となっている.

Fig. 7 Projection of the maximal CPI sets for the simulation model

制御対象, オブザーバの初期状態をそれぞれ $x(0) = [-1.0 \quad -3.0]^T$, $\hat{x}(0) = [-1.5 \quad -2.0]^T$, 仮定 1 において $i(0) = i_0 = 2$ さらに (9) 式において, 推定誤差の動特性に関するシミュレーションから, $m=1$, $\gamma=0.8$ と選択したときの応答を Figs. 8, 9 に示す. Figs. 8, 9 は, それぞれ提案手法による出力フィードバックスイッチング制御と Σ_{c2} の固定補償器による制御, Fig. 1 のスーパーバイザが状態を観測可能であるとした場合の状態フィードバックスイッチング制御との比較となっている. なお Figs. 8, 9 の出力フィードバックスイッチング制御系のシミュレーションには Sun Ultra 5 Model 333 上の MATLAB を使用し, 所要時間は 0.5 [s] 以下, 各サンプリング間隔ごとの実時間処理が要求されるインデックス $i(t)$ の決定 ((13) 式) は, 最長の場合で 0.07 [s] 以下であった.

Fig. 8(a) より, スイッチング制御により応答が改善されている様子がわかる. また Fig. 8(b) からは, スイッチング制御則により, 入力制限を破らない範囲で大きな制御入力が要求されていることがわかる. なお補償器の切り換え時刻は, このときそれぞれ 1.5 [s] ($\Sigma_{c2} \rightarrow \Sigma_{c1}$), 3.2 [s] ($\Sigma_{c1} \rightarrow \Sigma_{c0}$) となっている. また Fig. 9 の状態フィードバックスイッチング制御では, 補償器の切り換え時刻がそれぞれ 1.1 [s] ($\Sigma_{c2} \rightarrow \Sigma_{c1}$), 3.1 [s] ($\Sigma_{c1} \rightarrow \Sigma_{c0}$) であり, 補償器の切り換え時刻の遅れという形で, 提案手法による制御則の出力フィードバック化の保守性があらわれる.

(a) Output signal, y , versus time for the simulation model

(b) Actuator control signal, u , versus time for the simulation model

Fig. 8 Comparison of proposed output-feedback switching control and fixed gain, F_2 , control

(a) Output signal, y , versus time for the simulation model

(b) Actuator control signal, u , versus time for the simulation model

Fig. 9 Comparison of proposed output-feedback switching control and state-feedback switching control

8. おわりに

本論文では、出力フィードバックにもとづくスイッチング制御系の構成法を提案した。出力フィードバックスイッチング制御則としては、これまでに set-valued オブザーバを利用したものが提案されていた。set-valued オブザーバは、スイッチング制御系構成に適したいくつかの性質を有する。しかしながら、推定値を構成するために要求されるオンライン処理の多さから、特に動特性の速い制御対象への実装は、これまでのところあまり現実的でないと考えられる。本論文では、オンラインで要求される処理の軽減を目的とし、各補償器の構造をオブザーバ型に限定、推定誤差の上界を与える楕円体を利用し状態の存在領域を推定することで、新たな出力フィードバックスイッチング制御則を提案した。

参考文献

- [1] E. G. Gilbert: Linear control systems with pointwise-in-time constraints: What do we do about them?, plenary address; *Proceedings of the 1992 American Control Conference*, p. 2565 (1992)
- [2] A. S. Morse (Ed.): *Control using logic-based switching*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 222, Springer (1997)
- [3] G. F. Wredenhagen and P. R. Bélanger: Piecewise-linear LQ control for systems with input constraints; *Automatica*, Vol. 30, No. -3, pp. 403-416 (1994)
- [4] I. Kolmanovsky and E. G. Gilbert: Multimode regulators for systems with state & control constraints and disturbance inputs; *Control using logic-based switching*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 222, pp. 104-117, Springer (1997)
- [5] E. G. Gilbert and K. T. Tan: Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 9, pp. 1008-1020 (1991)
- [6] I. Kolmanovsky and E. G. Gilbert: Maximal output admissible sets for discrete-time systems with disturbance inputs; *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, pp. 1995-1999 (1995)
- [7] 平田, 藤田: 外部入力をもつ線形離散時間システムに対する拘束条件の解析; 電気学会論文誌 C, Vol. 118, No. 3, pp. 384-390 (1998)
- [8] 平田, 藤田: 入力に制限を有する線形離散時間システムに対するスイッチング状態フィードバック制御則の構成法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 11, No. 6, pp. 316-323 (1998)
- [9] 平田, 藤田: 外部入力をもつ拘束システムに対するスイッチング状態フィードバック制御則の構成法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 12, No. 7, pp. 437-443 (1999)
- [10] 平田, 藤田: 拘束システムに対する出力フィードバックスイッチング制御則; 第43回システム制御情報学会研究発表講演会, pp. 573-574 (1999)
- [11] S. -P. Wu and S. Boyd: *sdpso: A parser/solver for semidefinite programming and determinant maximization problems with matrix structure*. User's guide, Version Beta, Stanford University (1996)

- [12] J. S. Shamma and E. Tu: Optimality of set-valued observers for linear systems; *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2081-2086 (1995)

付 録

付録 1. 補償器の設計手順

楕円体 $E(P_i, \rho_-^i)$ が $O_x^{i-1} \subset E(P_i, \rho_-^i) \subset X_i$ を満たしかつ (8a) 式に関する正の不変集合となる F_i の設計手順をまとめる。 O_x^{i-1} の楕円体 $E(S_{i-1}, \rho_+^{i-1})$ による近似を与えるため

$$S_{i-1}^{-1} = \arg \max \{ \log \det S^{-1} \mid E(S, 1) \subset O_x^{i-1} \} \quad (A1)$$

により $S_{i-1} > 0$ を構成し、 O_x^{i-1} に包含される楕円体で最も体積の大きいものを求める。この問題は凸最適化問題であり、適切なアルゴリズムを用いることにより解を求めることができる [11]。つぎに

$$\rho_+^{i-1} = \minimize \{ \rho \in \mathcal{R} \mid O_x^{i-1} \subset E(S_{i-1}, \rho) \} \quad (A2)$$

のように楕円体の半径を $(\rho_+^{i-1})^{1/2}$ まで広げ O_x^{i-1} を包含する。この問題は 2 次計画問題として解くことができる [8]。 F_i, P_i, ρ_-^i に課す条件としてつぎを考える。

$$\text{条件 1} \quad (A + BF_i)^T P_i (A - BF_i) - P_i + C_1^T C_1 \leq 0$$

$$\text{条件 2} \quad E(S_{i-1}, \rho_+^{i-1}) \subset E(P_i, \rho_-^i) \subset X_i$$

P_i がリアプノフ不等式の解であるので $E(P_i, \rho_-^i)$ は正の不変集合となる [3, 8]。また $O_x^{i-1} \subset E(S_{i-1}, \rho_+^{i-1}) \subset E(P_i, \rho_-^i) \subset X_i$ であるので設計の条件は達成される。なお条件 1, 2 は線形行列不等式条件により記述され、フィードバックゲイン F_i は凸最適化問題の解として得られることが参考文献 [8] とほぼ同様の手順により示される。具体的な条件の記述は省略する。

付録 2. 補題・定理の証明

(証明) 【補題 1】 $x_0 \in \tilde{O}_x^i(0)$ とする。初期状態 $[0 \ x_0^T]^T \in \tilde{O}_\infty^i$ を考える。 $e(t) = 0, x(t) = \hat{x}(t)$ より、(4) 式の動特性は (8) 式で与えられる。 $[e^T(t) \ x^T(t)]^T = [0 \ x^T(t)]^T \in \tilde{O}_\infty^i$ より $x(t) \in \tilde{O}_x^i(0)$ 。したがって $\tilde{O}_x^i(0)$ は (8) 式に関する正の不変集合でありかつ $z_0(t) \in Z$ 。 $\tilde{O}_\infty^i$ は $z_0(t) \in Z$ を達成する任意の正の不変集合をその内部に含むから $\tilde{O}_x^i(0) \subset \tilde{O}_\infty^i$ となる。

$x_0 \in \tilde{O}_\infty^i, x_0 \notin \tilde{O}_x^i(0)$ とする。初期状態 $[0 \ x_0^T]^T \notin \tilde{O}_\infty^i$ とすると $e(t) = 0, x(t) = \hat{x}(t)$ より (4) 式の特性は (8) 式で与えられる。さらに $\tilde{O}_\infty^i$ の定義と $[0 \ x_0^T]^T \notin \tilde{O}_\infty^i$ の仮定から $z_0(\tau) \notin Z$ なる $\tau \in \mathcal{Z}^+$ が存在する。一方 $x_0 \in \tilde{O}_\infty^i$ の仮定より (8) 式に関して $z_0(t) \in Z \ \forall t \in \mathcal{Z}^+$ が成立する。これは上の結果に矛盾するので $\tilde{O}_\infty^i \subset \tilde{O}_x^i(0)$ であり $\tilde{O}_\infty^i = \tilde{O}_x^i(0)$ 。 $\square$

(証明) 【補題 2】 $e(t) \in O_e^i$ より $[e^T(t) \quad \hat{x}^T(t)]^T \in O_\infty^i$ なる $\hat{x}(t)$ が存在する. O_∞^i は正の不変集合であるから $[e^T(t+1) \quad \hat{x}^T(t+1)]^T \in O_\infty^i$ より $e(t+1) \in O_e^i$. よって O_e^i は $e(t+1) = (A - HC_2)e(t)$ に関する正の不変集合である.

一方 $[e^T(t) \quad \hat{x}^T(t)]^T \notin O_\infty^i$ のように $\hat{x}(t)$ を選んだ場合にも, 推定誤差は $e(t+1) = (A - HC_2)e(t)$ により, 状態 $\hat{x}$ とは独立に決定される. したがってこの場合も O_e^i は正の不変集合である. $\square$

(証明) 【定理 1】 F_i の設計条件と 補題 1 で $C_e = 0$ と置くと $O_x^{i-1} \subset E(P_i, \rho_-^i) \subset \bar{O}_\infty^i = O_x^i(0) \subset O_x^i$. $\square$

(証明) 【定理 2】 (13a) 式で決定されるインデックスを $i'(t) (\leq i(t-1))$ とする. 各閉ループ系は安定であるので, コントローラの切り換えとは無関係に $\hat{x}(t) \rightarrow 0$ である. したがって $O_e^{i'(t)}(\hat{x}(t))$ は $O_e^{i'(t)}(0)$ へ漸近する. このとき $i'(t)$ の値にかかわらず $0 \in \text{int} O_e^{i'(t)}(0)$ である. 一方コントローラの切り換えにかかわらず $\rho_e^{i_0}(t) \rightarrow 0$ であるので $E(S_e^{i_0}, \rho_e^{i_0}(t)) \rightarrow \{0\}$. したがって $E(S_e^{i_0}, \rho_e^{i_0}(\tau)) \subset O_e^{i(\tau)}(\hat{x}(\tau))$ なる時刻 τ が存在する. また $\hat{x}(t) \rightarrow 0$ より $i'(t) \rightarrow 0$ であることから $i(t) \rightarrow 0$. 切り換えの条件 (13e) 式が成立する場合 $[e^T(\tau) \quad \hat{x}^T(\tau)]^T \in O_\infty^{i(\tau)}$ より拘束条件は達成される. また各最大 CPI 集合が正の不変集合であることから, 切り換えの影響により系が不安定化されることはない. $\square$

付録 3. (13e) 式の判定について

(13e) 式の成立の判定手順をまとめておく. 変数 $\bar{e} = (S_e^{i_0})^{1/2}e$ を導入すると $O_e^i(\hat{x})(t)$ を規定する各平面 $(M_e^i)_{(j,:)}(S_e^{i_0})^{-1/2}\bar{e} = (m_e^i)_j - (M_{\hat{x}}^i)_{(j,:)}\hat{x}(t)$ から原点までの距離は $d_j = \frac{|(m_e^i)_j - (M_{\hat{x}}^i)_{(j,:)}\hat{x}(t)|}{((M_e^i)^T (S_e^{i_0})^{-1} M_e^i)_{(j,j)}^{1/2}}$ で与えられる. 一方, 楕円体の半径は $(\rho_e^{i_0}(t))^{1/2}$ であるので $E(S_e^{i_0}, \rho_e^{i_0}(t)) \subset O_e^i(\hat{x}(t))$ の成立は

$$\min_{j=1, \dots, s_i} \frac{((m_e^i)_j - (M_{\hat{x}}^i)_{(j,:)}\hat{x}(t))^2}{((M_e^i)^T (S_e^{i_0})^{-1} M_e^i)_{(j,j)}} \geq \rho_e^{i_0}(t)$$

が確認できればよい.

付録 4. 主な記号一覧

本論文で使用する主な記号を以下に示す.

Σ_p	(1) 式で定義される制御対象
Σ_{ci}	(3) 式で定義される補償器
Σ_i	Σ_p, Σ_{ci} で構成される閉ループ系 ((4) 式)
O_∞	Σ_i の最大 CPI 集合 (定義 1)
O_x^i	O_∞^i のオブザーバの状態空間への射影
O_x^i	O_∞^i の制御対象の状態空間への射影
O_e^i	O_∞^i の推定誤差の空間への射影
$O_x^i(e)$	推定誤差を e に制限してえられる集合 ((7a) 式)
$O_x^i(e)$	推定誤差を e に制限してえられる集合 ((7b) 式)
$O_e^i(\hat{x})$	オブザーバの状態を $\hat{x}$ に制限してえられる集合 ((7c) 式)
$\bar{O}_\infty^i$	状態フィードバック系 (8) 式の最大 CPI 集合
$\bar{O}_\infty^i$	拘束条件を付加してえられる Σ_i の最大 CPI 集合 (補題 1)
$E(P, \rho)$	楕円体 $\{y y^T P y \leq \rho\}$