最小次元観測器に基づく安定化制御器の導出と 周波数整形 ILQ サーボ系設計への応用*

中村 恵子[†]・酒井 雅也[‡]・中島 健一[§]・藤井 隆雄[‡]

Derivation of Stabilizing Controller Based on Minimal-Order Observer and Application to Design of Frequency-Shaping ILQ Servo System*

Keiko NAKAMURA[†], Masaya SAKAI[‡], Ken'ichi NAKASHIMA[§] and Takao FUJII[‡]

In our preceding paper, a design method for an ILQ robust servo system with a full-order observer and a free parameter was proposed. In this paper, we propose a similar method for an ILQ servo system with a *minimal-order* observer and a free parameter. First, we derive a stabilizing controller based on a minimal-order observer from a full-order observer-based stabilizing controller by equivalent transformation. Then we apply it to design a frequency-shaping ILQ servo system. Finally, we show a design example for a magnetic levitation system.

1. はじめに

全次元観測器 (全次元オブザーバ) と状態フィードバックを使った構成に自由度を付加すると安定化制御器の一般形を表現できることはよく知られている [1]. 参考文献 [2] ではその構成を ILQ サーボ系 [3] に応用し, 目標値追従特性と観測ノイズ抑制特性を同時に整形する設計法を提案している. その設計法では, 希望の観測ノイズ抑制特性を指定し, それを実現する全次元オブザーバと自由度を同時に求めている. しかし, まず全次元オブザーバと状態フィードバックだけでノミナル性能を達成し, その後に自由度を活用してロバスト性を高める, という段階的な設計ができると便利である. さらに, 全次元オブザーバの代わりに最小次元オブザーバを用いると, ノミナル性能をより低次のコントローラで達成することができる. その場合に必要になるのが, 最小次元オブザーバに基づく安定化制御器の一般系である. これについては, すでに参考文献 [4] で提案されている. しかし, そ

の構成は全次元オブザーバを使った場合に比べて複雑でわかりにくく, また全次元オブザーバに基づく安定化制御器の一般形との関係が明らかにされていない.

本研究では, まず前半において, 全次元オブザーバに基づく安定化制御器を単に等価変換することによって, 参考文献 [4] で提案されている最小次元オブザーバに基づく安定化制御器が導出できることを示し, 両者の関係を明らかにする. さらに後半では, 最小次元オブザーバに基づく安定化制御器を「周波数整形 ILQ サーボ系の設計問題」に応用し, 参考文献 [2] と同様な設計法が導出できることを示す. そしてこの設計法をもとに, 1 入出力系に対して観測ノイズ抑制特性の段階的な整形法を提案する. 最後に, 本設計法を磁気浮上系 [7] に適用した設計例を示す.

2. 制御対象とオブザーバ

制御対象として, 可制御かつ可観測な線形時不変システム

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ y = Cx, & C \in \mathbb{R}^{l \times n}, \text{rank } C = l \end{cases} \quad (1)$$

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2)$$

を考える. 制御対象 (1) 式に対する全次元オブザーバを

$$\dot{\hat{x}}_f = (A - HC)\hat{x}_f + Bu + Hy, \quad H \in \mathbb{R}^{n \times l} \quad (3)$$

$$\hat{y}_f = C\hat{x}_f \quad (4)$$

ただし $A - HC$ は安定行列

* 原稿受付 2000 年 4 月 19 日

[†] 石川島播磨重工業 (株) Ishikawajima-Harima Heavy Industries Co., Ltd.; 1-15, Toyosu 3-chome, Koto-ku, Tokyo 135-8732, JAPAN

[‡] 大阪大学 大学院 基礎工学研究科 Graduate School of Engineering Science, Osaka University; 1-3 Machikaneyama, Toyonaka, Osaka 560-8531, JAPAN

[§] 川崎重工業 (株) Kawasaki Heavy Industries, Ltd.; 1-1 Kawasaki, Akashi, Hyogo 673-8666, JAPAN

Key Words: ILQ servo system, minimal-order observer, stabilizing controller, frequency-shaping.

最小次元オブザーバを

$$\dot{\omega} = \hat{A}\omega + \hat{B}u + Gy, \quad (5)$$

$$\hat{A} \in \mathbb{R}^{(n-l) \times (n-l)}, \hat{B} \in \mathbb{R}^{(n-l) \times m}, G \in \mathbb{R}^{(n-l) \times l}$$

$$\hat{x}_m = \hat{C}\omega + \hat{D}y, \quad (6)$$

$$\hat{C} \in \mathbb{R}^{n \times (n-l)}, \hat{D} \in \mathbb{R}^{n \times l}$$

ただし ω は Fx ($F \in \mathbb{R}^{(n-l) \times n}$) の推定値

$\hat{A}$ は安定行列

$$\hat{B} = FB \quad (7)$$

$$FA = \hat{A}F + GC \quad (8)$$

$$\hat{C}F + \hat{D}C = I \quad (9)$$

とする。最小次元オブザーバの条件式は、通常よく用いられる (7)~(9) 式と等価な

$$\hat{A} = FAC, \hat{B} = FB, G = FAD \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (11)$$

を用いることもできる [5]。

3. 最小次元観測器に基づく安定化制御器

本節では、全次元オブザーバに基づく安定化制御器を等価変換することにより、参考文献 [4] で提案されている最小次元オブザーバに基づく安定化制御器を導出できることを示し、併せて両者の関係を明らかにする。まず、全次元オブザーバを状態変数変換して最小次元オブザーバの (5) 式とそれ以外の部分に分解し、それをもとに両者の自由度の間に成り立つ関係を求める。また、最小次元オブザーバに基づく安定化制御器の自由度に対して別の解釈を与える。

3.1 全次元観測器と最小次元観測器の関係

全次元オブザーバの状態方程式 (3) 式は状態変数変換により最小次元オブザーバの状態方程式 (5) 式とそれ以外の部分に分解できることを示す。まず、(3) 式的全次元オブザーバの H に対して

$$F(A-HC) = \hat{A}F \quad (12)$$

および (11) 式を満たす $\hat{A}$, F , $\hat{D}$, $\hat{C}$ を求める。たとえば、 $A-HC$ の n 本の左固有ベクトルから適当に $(n-l)$ 本を選んで F を構成し、(11), (12) 式が成り立つようにできる。(逆に、 $\hat{A}$ が与えられたときに (11), (12) 式をみたす F , H , $\hat{D}$, $\hat{C}$ が存在することはよく知られている [6].) (12) 式より明らかに $\hat{A}$ は安定行列 $A-HC$ の固有値の一部を共有するから安定である。またこの式に右から $\hat{C}$ をかけて (11) 式を用いると

$$\hat{A} = FAC \quad (13)$$

を得る。ゆえに、 $\hat{B}$ と G を (10) 式のように定義すれば (10), (11) 式が成立し、これら $\hat{A}$, $\hat{B}$, G , $\hat{C}$, $\hat{D}$ を係数行

列にもつ (5), (6) 式は (1) 式に対する最小次元オブザーバであることがわかる。また、(11), (12) 式より

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix} (A-HC) \begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{C} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C(A-HC)\hat{D} & C(A-HC)\hat{C} \\ F(A-HC)\hat{D} & F(A-HC)\hat{C} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C(A-HC)\hat{D} & CAC \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

が成り立つことに注意すれば、 $A-HC$ の安定性より

$$A := C(A-HC)\hat{D} \quad (15)$$

は安定であることがわかる。

以上の準備のもとに、(3) 式的全次元オブザーバは状態変数変換により上で求めた最小次元オブザーバとそれ以外の部分に分解できることを示す。まず、(3) 式的全次元オブザーバに

$$z = \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix} \hat{x}_f = \begin{bmatrix} \hat{y}_f \\ F\hat{x}_f \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\left(\hat{x}_f = \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}^{-1} z = \hat{C}F\hat{x}_f + \hat{D}\hat{y}_f \right) \quad (17)$$

という状態変数変換を行うと、(14), (15) 式から

$$\dot{\hat{y}}_f = A\hat{y}_f + CAC\hat{F}\hat{x}_f + CBu + CHy \quad (18)$$

$$F\hat{x}_f = \hat{A}F\hat{x}_f + FBu + FH y \quad (19)$$

が成り立つ。ここで、(11), (12) 式から $FH = FAD$, (15) 式から $CH = CAD - A$ が導けるのでこれらを (18), (19) 式に代入し、(10) 式を用いて整理するとそれぞれ

$$\dot{\hat{y}}_f = C\{A(\hat{C}F\hat{x}_f + \hat{D}y) + Bu\} - A(y - \hat{y}_f) \quad (20)$$

$$F\hat{x}_f = \hat{A}F\hat{x}_f + \hat{B}u + Gy \quad (21)$$

となる。したがって (21) 式で

$$F\hat{x}_f = \omega \quad (22)$$

とおけば、先に述べた最小次元オブザーバの状態方程式を得る。つぎに、(20) 式について考える。(6), (22) 式より (20) 式を書き直すと

$$\dot{\hat{y}}_f = C(A\hat{x}_m + Bu) - A(y - \hat{y}_f) \quad (23)$$

となる。これは参考文献 [4] で導入されている出力推定値に関する微分方程式と同じである。以下では、便宜上分解後の $\hat{y}_f$ を y_e と表し、(23) 式の果たす役割を考える。(1), (6), (23) 式を用いて $\dot{y} - \dot{y}_e$ を計算すると、

$$\dot{y} - \dot{y}_e = CAC(Fx - \omega) + A(y - y_e) \quad (24)$$

となる. (24) 式をラプラス変換して整理し, 最小次元オブザーバの (5) 式に関する関係式

$$Fx - \omega = (sI - \hat{A})^{-1}(Fx(0) - \omega(0)) \quad (25)$$

を用いると,

$$y - y_e = (sI - \Lambda)^{-1}CAC\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}(Fx(0) - \omega(0)) \quad (26)$$

となり, $\hat{A}$, Λ の安定性より $x(0)$, $\omega(0)$ の値によらず

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y - y_e) = 0 \quad (27)$$

となる. したがって (23) 式は出力の推定器である.

以上の議論により,

【定理 1】 全次元オブザーバ (4) は, 出力推定器 (24) と, 出力以外の状態量を推定する最小次元オブザーバ (5) に分解できる. さらに, これら三つの推定機構の極ならびに推定値の間には次の関係が成立する.

$$\sigma(A - HC) = \sigma(\hat{A}) \cup \sigma(\Lambda) \quad (28)$$

$$\hat{x}_f = \hat{x}_m - \hat{D}(y - \hat{y}_f) \quad (29)$$

ここに, $\sigma(\cdot)$ は行列の固有値の集合を表す.

(証明) 前半はすでに示した. 後半の (28) 式は, (14), (15) 式より自明であり, (29) 式は (6), (17), (22) 式より容易に導かれる. $\square$

(注意 1) F の選び方によって, 最小次元オブザーバと出力推定器の極 (つまり Λ と $\hat{A}$ の固有値) の組合せを変えることができる.

(注意 2) 1 出力 2 次の制御対象と複素極を持つ 2 次元オブザーバの場合を考えればわかるように, 一般に奇数個の出力を持つ偶数次元の制御対象と, 複素極のみを持つ全次元オブザーバの組合せに対しては, (12) 式を満たす行列 F として実数行列を選ぶことができない. この特別な場合を除くすべての組合せに対しては, $\hat{A}$ を実数行列の範囲で適切に選ぶことにより常に F を実数行列に選ぶことができる.

3.2 自由度の関係

全次元オブザーバに基づく安定化制御器 [1] と最小次元オブザーバに基づく安定化制御器 [4] は, それぞれ自由度 $Q_f(s)$, $Q_m(s) \in \text{RH}_\infty$ を用いて Figs. 1, 2 のように表される. ここに, RH_∞ は安定プロポパな有理関数行列の集合を表す. Figs. 1, 2 より制御対象への入力はその

$$u = -K\hat{x}_f + Q_f(s)(y - \hat{y}_f) \quad (30)$$

$$u = -K\hat{x}_m + Q_m(s)(y - y_e) \quad (31)$$

である. (31) 式に (29) 式を代入すると

$$u = -K\hat{x}_f + (Q_m(s) - K\hat{D})(y - \hat{y}_f) \quad (32)$$

Fig. 1 Stabilizing controller based on full-order observer

Fig. 2 Stabilizing controller based on minimal-order observer

となるので, (30) 式と (32) 式を比較すると $Q_f(s)$ と $Q_m(s)$ の間には

$$Q_f(s) = Q_m(s) - K\hat{D} \quad (33)$$

という関係がある. つまり Fig. 1 と Fig. 2 の破線で囲まれた部分は等価である.

(注意 3) 注意 2 で述べた特別な場合は, Fig. 2 の構成では二つの推定器はともに複素係数になる. しかしこの場合も, 詳細は省くが, Fig. 2 の $Q_m(s)$ の次数を増やすなどすれば実係数の範囲内で Fig. 1 の構成と等価になる. つまり, 安定化制御器として等価になるが, それを構成するオブザーバの間にはやはり定理 1 の関係は成立せず, (33) 式も成立しない.

3.3 自由度の解釈

Fig. 2 では Λ を用いて出力推定器を構成し, 出力推定誤差 $y - y_e$ を自由度 $Q_m(s)$ への入力としている. しかし, Λ を自由度の一部とみなし, $Q_m(s)$ と Λ を合わせた部分 (Fig. 2 の点線で囲まれた部分) を自由度と考えることもできる. その場合の自由度について解釈する. (23) 式を (1), (6), (9) 式を用いて変形すると

$$y_e = -(sI - \Lambda)^{-1}CAC\hat{C}(Fx - \omega) + y \quad (34)$$

となり, 自由度 $Q_m(s)$ の出力 v はつぎのように表せる.

$$v = Q_m(s)(y - y_e) = \{Q_m(s)(sI - \Lambda)^{-1}\} \cdot CAC\hat{C}(Fx - \omega) \quad (35)$$

ゲイン K_F^0, K_C^0 が解析的に求まり、閉ループ系の安定性を保証する Σ の下限値 $\Sigma_{\min}$ が存在する。 $G_{yr}^\infty(s)$ を

$$G_{yr}^\infty(s) = \text{diag} \left\{ g_{yr_i}^\infty(s) \right\} \quad (44)$$

$$g_{yr_i}^\infty(s) = \frac{\phi_i(0)}{\phi_i(s)} \quad (45)$$

$\phi_i(s)$: d_i 次の任意の安定多項式

と指定すると、 K_F^0, K_C^0 はつぎのようになる。

$$K_C^0 = D^{-1} \text{diag} \left\{ \phi_i(0) \right\} \quad (46)$$

$$K_F^0 = D^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \psi_1(A) \\ \vdots \\ c_m \psi_m(A) \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\psi_i(s) = \frac{\phi_i(s) - \phi_i(0)}{s} \quad (48)$$

4.2 観測ノイズ抑制特性の整形

4.2.1 指定可能なクラス

$G_{yn}(s)$ の整形は、 $G_{yr}(s)$ と同様に $\Sigma \rightarrow \infty$ としたときの伝達関数 $G_{yn}^\infty(s) := \lim_{\Sigma \rightarrow \infty} G_{yn}(s)$ を指定することによって行う。ここでは、設計の簡単化のため

$$G_{yn}^\infty(s) = \text{diag} \left\{ g_{yn_i}^\infty(s) \right\} \quad (49)$$

$$g_{yn_i}^\infty(s) = \frac{N_i(s)}{D_i(s)} \quad (50)$$

という対角行列の形で指定する。

Fig. 5 より $G_{yr}(s)$ と $G_{yn}(s)$ を計算すると、

$$G_{yr}(s) = C(sI - A + B\Sigma K_F^0 + B\Sigma K_C^0 \frac{I}{s} C)^{-1} \times B\Sigma K_C^0 \frac{I}{s} \quad (51)$$

$$G_{yn}(s) = -G_{yr}(s) \times \left[(K_C^0 \frac{I}{s})^{-1} \{ K_F^0 (\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1} G + \hat{D}) + \tilde{Q}^0(s) \{ CA(\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1} G + \hat{D}) - sI \} + I \} \right] \quad (52)$$

となる。ただし、 $\tilde{Q}^0(s) := Q_m^0(s)(sI - A)^{-1}$ である。(52) 式の $G_{yn}(s)$ において、 Σ に関係するのは $G_{yr}(s)$ の部分だけであるので、 $\Sigma \rightarrow \infty$ としたときの伝達関数

$G_{yn}^\infty(s) := \lim_{\Sigma \rightarrow \infty} G_{yn}(s)$ は、(52) 式右辺の $G_{yr}(s)$ を $G_{yr}^\infty(s)$ に置き換えたものである。つまり

$$G_{yn}^\infty(s) = -G_{yr}^\infty(s) \times \left[(K_C^0 \frac{I}{s})^{-1} \{ K_F^0 (\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1} G + \hat{D}) + \tilde{Q}^0(s) \{ CA(\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1} G + \hat{D}) - sI \} + I \} \right] \quad (53)$$

となる。 $G_{yr}^\infty(s)$ を指定して K_F^0 と K_C^0 を求め、適当な最小次元オブザーバを設計したあと、次式より $\tilde{Q}^0(s)$ を求める。

$$\tilde{Q}^0(s) = -[(K_C^0 \frac{I}{s})(G_{yr}^{\infty-1}(s)G_{yn}^\infty(s) + I) + K_F^0(\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}G + \hat{D})] \times \{ CA(\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}G + \hat{D}) - sI \}^{-1} \quad (54)$$

なお、(54) 式は (52) 式から $\tilde{Q}^0(s)$ を逆算したものである。また、(45)、(46) 式を代入すると、 $\tilde{Q}^0(s)$ は

$$\tilde{Q}^0(s) = \tilde{Q}_1(s) + \tilde{Q}_2(s) \quad (55)$$

$$\tilde{Q}_1(s) = D^{-1} \text{diag} \left\{ \frac{\phi_i(s)}{s} \right\} (G_{yn}^\infty(s) + I) \times C(sI - A)^{-1} \hat{D} \quad (56)$$

$$\tilde{Q}_2(s) = [-D^{-1} \text{diag} \{ \psi_i(s) \} + K_F^0(\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}G + \hat{D})] \times C(sI - A)^{-1} \hat{D} \quad (57)$$

とも表せる。(54)~(57) 式と「 $\tilde{Q}^0(s)$ が安定かつ厳密にプロバである」という条件から、つぎの定理を得る。

【定理 2】 指定可能な $G_{yn}^\infty(s)$ のクラス $\mathcal{G}^\infty$ は、つぎの必要十分条件で完全に特徴づけられる。

条件 1 $N_i(s) + D_i(s)$ が s と $\beta_i(s)$ を因子にもつ。

条件 2 $\deg D_i(s) - \deg N_i(s) \geq d_i - 1$ 。

ただし、 $\beta_i(s)$ はシステム (A, B, c_i) の可制御かつ可観測な不安極を重複度も含めてすべて根にもつ多項式であり、不安定極がない場合は $\beta_i(s) = 1$ とする。

(証明) 付録参照。 $\square$

これらの条件は、全次元オブザーバを用いたときの条件と一致している [2]。

4.2.2 1 入出力系の場合の指定法

以下では、制御対象が 1 入出力系である場合について、オブザーバのみで ($\tilde{Q}^0(s) = 0$ で) ノミナル性能を達成した後、 $\tilde{Q}^0(s)$ を利用してロバスト安定化する、という観測ノイズ抑制特性 $G_{yn}(s)$ の段階的な設計法を提案する。

まず、 $\tilde{Q}^0(s) = 0$ でノミナル性能を達成したときの $G_{yn}^\infty(s)$ を $G_{yn}^{\infty 0}(s)$ とする。つぎに、 $\tilde{Q}^0(s)$ を追加し、 $G_{yn}^\infty(s)$ を

$$G_{yn}^\infty(s) \left(= \frac{N(s)}{D(s)} \right) = G_{yn}^{\infty 0}(s) \times f(s) \quad (58)$$

という形で指定する。 $f(s)$ は観測ノイズや制御対象の不確かさが存在する周波数領域でゲインを下げるようなフィルタに選ぶとよいが、 $G_{yn}^\infty(s)$ には前節の定理 2 のような制約があるため $f(s)$ にも制約がかかる。しかし、 $G_{yn}^{\infty 0}(s) \in \mathcal{G}^\infty$ であるので、つぎのようにしてこれを $f(s)$ の制約に書き換えることができる。

$G_{yn}^{\infty 0}(s)$ と $f(s)$ を

$$G_{yn}^{\infty}(s) = \frac{N^0(s)}{D^0(s)}, f(s) = \frac{N_f(s)}{D_f(s)} \quad (59)$$

とおく。\$G_{yn}^{\infty}(s)\$ は定理 2 の制約をみたすため、条件 1 より適当な多項式 \$k(s)\$ を用いて

$$N^0(s) + D^0(s) = s\beta(s)k(s) \quad (60)$$

と表すことができ、条件 2 より

$$\deg D^0(s) - \deg N^0(s) \geq d-1 \quad (61)$$

である。ここで、\$N(s) + D(s)\$ を計算すると

$$\begin{aligned} N(s) + D(s) &= N^0(s)N_f(s) + D^0(s)D_f(s) \\ &= (N^0(s) + D^0(s))N_f(s) + D^0(s)(D_f(s) - N_f(s)) \\ &= s\beta(s)k(s)N_f(s) + D^0(s)(D_f(s) - N_f(s)) \end{aligned} \quad (62)$$

となるので、\$G_{yn}^{\infty}(s)\$ が条件 1 をみたすためには \$D_f(s) - N_f(s)\$ が \$s\beta(s)\$ を因子にもつことが必要十分である。また、\$G_{yn}^{\infty}(s)\$ が条件 2 をみたすため、つまり

$$\deg D(s) - \deg N(s) \geq d-1 \quad (63)$$

となるためには (61) 式より \$f(s)\$ がプロパであることが必要十分である。以上よりつぎの定理を得る。

【定理 3】 観測ノイズ抑制特性の仕様を \$G_{yn}^{\infty}(s) = G_{yn}^{\infty}(s) \times f(s)\$ と指定するとき、\$G_{yn}^{\infty}(s) \in \mathcal{G}^{\infty}\$ となる必要十分条件は、\$f(s)\$ が制約条件

1. \$D_f(s) - N_f(s)\$ が \$s\beta(s)\$ を因子にもつ
2. プロパである

をみたすことである。

この結果に基づいて、\$f(s)\$ は定理 3 の制約をみたし、かつ希望のフィルタ特性をもつように選ばばよい。

(注意 4) 全次元オブザーバを用いた場合も段階的に周波数整形をすることができる。しかし、最小次元オブザーバを用いたほうがノミナル性能をより低次で達成することもあり、その時にはフィルタ \$f(s)\$ の選び方（たとえば \$f(s)\$ が両者で等しい場合など）によってはコントローラが低次になる。

設計手順をまとめると、つぎのようになる。

【ILQ サーボ系の設計手順】

手順 1 目標値追従特性 \$G_{yr}(s)\$ の整形（ILQ 設計法）
\$G_{yr}^{\infty}(s)\$ を指定して \$K_F^0, K_C^0\$ を求め、\$\Sigma\$ を調整する。

手順 2 観測ノイズ抑制特性 \$G_{yn}(s)\$ の整形
\$\mathcal{G}^{\infty}\$ の中から \$G_{yn}^{\infty}(s)\$ を指定し、最小次元オブザーバを設計してから (54) 式より \$\tilde{Q}^0(s)\$ を求める。

特に 1 入出力系の場合には、手順 2 はつぎのように段階的に整形することができる。

手順 2-1 ノミナル性能の達成

ノミナル性能を達成するように適当に最小次元

オブザーバを設計する。

手順 2-2 ロバスト安定化

まずロバスト安定性を満たし、かつ定理 3 の制約をみたすように \$f(s)\$ を選ぶ。つぎに、\$G_{yn}^{\infty}(s) = G_{yn}^{\infty}(s) \times f(s)\$ と指定し、(54) 式で \$\tilde{Q}^0(s)\$ を計算する。

5. 磁気浮上系に対する設計例

前節で提案した設計法を磁気浮上系 [7] に適用する。磁気浮上系は 3 入出力の不安定系であり、オブザーバのみを用いた ILQ サーボ系ではモデル化誤差によるスピルオーバー現象が生じることが知られている。参考文献 [7] では新たに付加された自由度を活用して、モデル化誤差の存在する周波数領域で \$G_{yn}(s)\$ がノッチフィルタ特性を持つように整形し、ロバスト安定化に成功している。

対象とする磁気浮上系のモデルは非干渉化されており、すべての入出力がつぎのシステム

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (64)$$

$$P(s) = \frac{1}{s^2} \quad (65)$$

$$\text{ただし } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

で表される。したがって、1 入出力系の問題に帰着させて考えることができる。これにより、\$G_{yn}^{\infty}(s)\$ は段階的に整形することができる。以下では 3 入出力とも同じ特性を指定するため、ひとつの入出力のみについて示す。また、全次元オブザーバに基づく ILQ サーボ系 [2,7] に対しても同様に \$G_{yn}^{\infty}(s)\$ の段階的な整形を行い、その整形結果を示す。

5.1 目標値追従特性の整形

磁気浮上系では \$d=2\$ であるので、\$G_{yr}^{\infty}(s)\$ は最小次元オブザーバを用いた場合も、全次元オブザーバを用いた場合も同じ伝達関数

$$G_{yr}^{\infty}(s) = \frac{\phi(0)}{\phi(s)}, \phi(s) = (s + \frac{1}{T})^2 \quad (67)$$

に指定する。そのとき \$K_C^0, K_F^0\$ は (42), (46)~(48) 式より

$$K_C^0 = \frac{1}{T^2}, K_F^0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{T} & 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

となる。ここで、時定数 \$T\$ は \$T=0.08\$ と選んだ。また、最適性を保証する \$\Sigma\$ の下限値 \$\Sigma_{\min}\$ は \$\Sigma_{\min}=50\$ となり、\$\Sigma\$ は \$\Sigma = \Sigma_{\min} \times 14\$ とした。

5.2 観測ノイズ抑制特性の整形（最小次元オブザーバを用いた場合）

制御対象は相対次数が 2 で原点に二つの不安定極をもつので、指定可能なクラス \$\mathcal{G}^{\infty}\$ は定理 2 より

1. $N(s)+D(s)$ が s^3 を因子にもつ
 2. $\deg D(s) - \deg N(s) \geq 1$
- となる.

5.2.1 ノミナル性能

最小次元オブザーバはゴピナスの方法を用いると

$$\hat{A} = -r_1, \quad \hat{B} = 1, \quad G = -r_1^2 \quad (69)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \quad (70)$$

となる. このときオブザーバの特性多項式 $r(s)$ は

$$r(s) = s + r_1 \quad (71)$$

となる. 最小次元オブザーバのみでノミナル安定性を達成するように, オブザーバ極は -130 に選んだ. そのとき $G_{yn}^{\infty}(s)$ は

$$G_{yn}^{\infty}(s) = \frac{1}{(s+12.5)^2(s+130)} \left(-(1.5500e+2)s^2 - (3.4062e+3)s - (2.0312e+4) \right) \quad (72)$$

となる. $G_{yn}^0(s)$ のゲイン特性を Fig. 6 (破線) に, 観測ノイズ n から偏差 e までの伝達関数 (感度関数) $G_{en}^0(s)$ のゲイン特性を Fig. 7 (破線) に示す.

Fig. 6 $G_{yn}(s)$

5.2.2 ロバスト安定性

つぎに, 自由度 $\tilde{Q}^0(s)$ を付加してロバスト安定化する. $f(s)$ の制約は 定理 3 より

1. $D_f(s) - N_f(s)$ が s^3 を因子にもつ
 $\Leftrightarrow D_f(s)$ と $N_f(s)$ の 2 次以下の係数が互いに一致する

2. プロパである

となる. $f(s)$ は上の制約を満たすように, つぎのように選んだ.

$$f(s) = \frac{n(s)\delta(s)}{d(s)} \quad (73)$$

$$n(s) = s^2 + 2 \times 0.01 \times 2\pi \times 60s + (2\pi \times 60)^2 \quad (74)$$

Fig. 7 $G_{en}(s)$

$$\delta(s) = 1.0804s^2 + (1.9853e+2)s + 2.7047e+4 \quad (75)$$

$$d(s) = (s^2 + 200s + 200^2)(s^2 + 230s + 310^2) \quad (76)$$

ここで, $n(s)$ はモデル化誤差の存在する 60Hz 付近のゲインを下げるために, また 2 次の多項式 $\delta(s)$ は制約 2 を満たすために導入したもので, $d(s)$ を決めると一意に求まる. よって $G_{yn}^{\infty}(s)$ を

$$G_{yn}^{\infty}(s) = G_{yn}^0(s) \times \frac{n(s)\delta(s)}{d(s)} \quad (77)$$

と指定する. $G_{yn}(s)$ のゲイン特性を Fig. 6 (実線) に, $G_{en}(s)$ のゲイン特性を Fig. 7 (実線) に示す. また, $\tilde{Q}^0(s)$ はつぎのように求まった.

$$\tilde{Q}^0(s) = \frac{-(1.2470e+1)s^3 + (3.4341e+4)s^2}{(s^2 + 200s + 200^2)(s^2 + 230s + 310^2)} + \frac{(7.5905e+5)s + 4.5362e+6}{(s^2 + 200s + 200^2)(s^2 + 230s + 310^2)} \quad (78)$$

このとき, コントローラの次数は 18 次 (1 入出力につき 6 次) である.

5.3 観測ノイズ抑制特性の整形 (全次元オブザーバを用いた場合)

全次元オブザーバを用いて前節と同様に段階的な整形を行う. 指定可能なクラス G^{∞} は最小次元オブザーバを用いた場合と同じである.

5.3.1 ノミナル性能

オブザーバゲイン H を

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

とすると, オブザーバの特性多項式 $h(s)$ は

$$h(s) = s^2 + h_1s + h_2 \quad (80)$$

となる. 全次元オブザーバのみでノミナル安定性を達成するように, オブザーバ極は -130 , -10000 とした. そ

のときの $G_{yn}^{\infty 0}(s)$ は

$$G_{yn}^{\infty 0}(s) = \frac{1}{(s+12.5)^2(s+130)(s+10000)} \times \left(-(1.5534e+6)s^2 - (3.4083e+7)s - 2.0312e+8 \right) \quad (81)$$

である。低周波域における $G_{yn}^0(s)$ のゲイン特性と $G_{en}^0(s)$ のゲイン特性は、最小次元オブザーバだけを用いてノミナル安定性を達成した場合の特性とほぼ同じである。

5.3.2 ロバスト安定性

指定可能なクラス G^∞ が最小次元オブザーバを用いた場合と一致するため、 $f(s)$ の制約条件も同じである。よって、最小次元オブザーバの場合と同じ $f(s)$ を用いて、 $G_{yn}^\infty(s)$ を

$$G_{yn}^\infty(s) = G_{yn}^{\infty 0}(s) \times f(s) \quad (82)$$

と指定する。低周波域では $G_{yn}(s)$ のゲイン特性と $G_{en}(s)$ のゲイン特性は、最小次元オブザーバでロバスト安定化したときの特性とほぼ同じである。その結果、 $Q_f(s)$ はつぎのようになった。

$$Q_f(s) = \frac{-(1.2497e+5)s^3 + (3.4416e+8)s^2}{(s^2+200s+200^2)(s^2+230s+310^2)} + \frac{(7.5950e+9)s + 4.5362e+10}{(s^2+200s+200^2)(s^2+230s+310^2)} \quad (83)$$

このときのコントローラの次数は21次（1入出力につき7次）であり、最小次元オブザーバを用いた場合と比べてオブザーバの次数が大きい分だけコントローラも高次になっている。

なお、段階的な整形を行わず、全次元オブザーバと自由度を同時に設計すると、12次のコントローラが得られる[7]。同様に最小次元オブザーバを用いて同時に設計してもコントローラの次数は同じになる[8]。しかし、その場合はオブザーバでノミナル性能を達成し、自由度でロバスト安定化するという意味は失われる。段階的な整形法はコントローラが高次になりやすいが、それぞれのパラメータの役割が明確であるので直感的に理解しやすい整形法である。

6. おわりに

本研究では、まず全次元オブザーバを状態変換によって最小次元オブザーバと出力推定器に分解した。つぎにその結果を用いて全次元オブザーバに基づく安定化制御器を状態変数変換すれば、最小次元オブザーバに基づく安定化制御器を導出できることを示した。つぎに、最小次元オブザーバに基づく安定化制御器を周波数整形 ILQ サーボ系に応用し、指定可能な $G_{yn}^\infty(s)$ のクラスが参考文献[2]のクラスと一致することを示すとともに、1入出力系に対して段階的な $G_{yn}^\infty(s)$ の整形法を提案した。今

後の課題は、この整形法を非最小位相系や多入出力系に拡張することである。

参考文献

- [1] 美多： H_∞ 制御，昭晃堂（1994）
- [2] 酒井，藤井：ループ整形機能を有する ILQ ロバストサーボ系の解析的設計法；計測自動制御学会論文集，Vol. 36, No. 4, pp. 340-347（2000）
- [3] 木村，藤井，森：ロバスト制御，コロナ社（1994）
- [4] A. J. Telford and J. B. Moore: Doubly coprime factorizations, reduced-order observers, dynamic state estimate feedback; *International J. on Control*, Vol. 50, No. 6, pp. 2583-2597（1989）
- [5] J. O'Reilly: *Observers for Linear Systems*, Academic Press（1983）
- [6] 岩井，井上，川路：オブザーバ，コロナ社（1988）
- [7] 酒井，黒江，中島，藤井：磁気浮上系の振動抑制を目的とした周波数整形 ILQ コントローラの設計；システム制御情報学会論文誌，Vol. 11, No. 5, pp. 267-276（1998）
- [8] 中村，豊田，中島，藤井：磁気浮上系の振動抑制を目的とした周波数整形 ILQ コントローラの設計 - 最小次元オブザーバを用いた場合；第41回自動制御連合講演会，pp. 27-30（1998）

付 録

定理 2 の証明

(54)~(57) 式と「 $\tilde{Q}^0(s)$ が安定かつ厳密にプロバである」という条件から指定可能な $G_{yn}^\infty(s)$ のクラスを求め。まず、(54) 式において

$$\{CA(\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}G + \hat{D}) - sI\}^{-1} \quad (A1)$$

が厳密にプロバ，

$$K_F^0(\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}G + \hat{D}) \quad (A2)$$

がプロバであるので、 $\tilde{Q}^0(s)$ が厳密にプロバになるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} & (K_C^0 \frac{I}{s})(G_{yr}^{\infty -1}(s)G_{yn}^\infty(s) + I) \\ & = (K_C^0 \frac{1}{s} \text{diag} \{ \frac{g_{yn_i}^\infty(s)}{g_{yr_i}^\infty(s)} + 1 \}) \end{aligned} \quad (A3)$$

がプロバになることである。そのためには、 $1/g_{yr_i}^\infty(s)$ が d_i 次/0 次であるので、 $g_{yn_i}^\infty(s)$ の相対次数が $d_i - 1$ 以上であればよい。

つぎに安定性について考えると、(57) 式の $\tilde{Q}_2(s)$ では制御対象の極が相殺される（証明は省略）ので、 $\tilde{Q}^0(s)$ が安定であるための必要十分条件は (56) 式の $\tilde{Q}_1(s)$ が安定であることである。 $\tilde{Q}_1(s)$ の不安定因子のうち、 $c_i(sI - A)^{-1}\hat{D}$ の可制御かつ可観測な不安定極を重複度も含めてすべて根にもつ多項式は $\beta_i(s)$ と一致する（証明は省略）ため、 $\tilde{Q}_1(s)$ が安定になるには、 $g_{yn_i}^\infty(s) + 1$

の分子, つまり $N_i(s) + D_i(s)$ がこの $\beta_i(s)$ と s を因子にもてばよい. したがって, 指定可能な $G_{yn}^\infty(s)$ のクラスは定理 2 のようになる.